Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по дополнительному образованию

_____ В.Л. Петров

«_9_» _октября_ 2026 г.

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа

«Дифференциальное исчисление: от типовых задач к олимпиадным»

НАПРАВЛЕННОСТЬ: ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ

Уровень: вводный
Возраст обучающихся: 16–18 лет
Срок реализации: 20 академических часов

Разработчик:
Т.В. Завьялова,
к.ф.-м.н., доцент кафедры математики
НИТУ МИСИС

Москва, 2026

1. Пояснительная записка

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Дифференциальное исчисление: от типовых задач к олимпиадным» (далее – Программа) является образовательной программой для школьников, обладающих фундаментальными знаниями школьного курса по алгебре и началам математического анализа и знаниями, полученными слушателями в рамках проекта г. Москвы «Математическая вертикаль ПЛЮС». Программа ориентирована на обучающихся 11-х классов со средним и высоким уровнем математической подготовки. Программа предусматривает повторение изученной техники дифференцирования и переход на более сложные задачи с применением базовых знаний по этой теме.

Программа разработана в соответствии с обновлённым ФГОС среднего общего образования и Федеральной рабочей программой по учебному предмету «Математика. 10–11 классы» (базовый и углублённый уровни, 2023 г.), в которой теме «Производная. Применение производной» отведён отдельный раздел, включающий применение производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах и для определения скорости процесса, заданного формулой или графиком.

Актуальность программы связана с тем, что дифференциальное исчисление — это основной инструмент решения задач оптимизации в технике, физике, экономике и естествознании, однако в школьном курсе на систематическую отработку задач, использующих производную, практически не остаётся времени: смысловым задачам и чтению графиков, задачам на наибольшее и наименьшее значения и прикладной оптимизации уделяется лишь несколько уроков. При этом именно задачи этих типов наиболее полно проверяют умение выпускника соединить вычислительную технику с логическим обоснованием решения. Программа закрывает этот разрыв и одновременно показывает обучающимся широту применения техники дифференцирования. Сильные школьники знакомятся с применением производной в задачах с параметром и в олимпиадной математике (доказательство неравенств через монотонность, подсчёт числа корней уравнения, метод оценок).

Программа является дополнением к школьному курсу математики, развивающей знания и навыки в области предмета. Прослушав курс, учащиеся смогут применить свои знания и навыки, участвуя в математических олимпиадах, конкурсах и при поступлении в вузы. Программа реализуется Федеральным государственным автономным образовательным учреждением высшего образования Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС» (далее – НИТУ МИСИС, Университет). Программа разработана и утверждена в соответствии с Уставом НИТУ МИСИС с целью формирования у школьников позитивного восприятия инженерных специальностей.

Программа имеет естественнонаучную направленность.

Уровень освоения – вводный. Программа предполагает расширить и углубить знания слушателя по дифференциальному исчислению, развить навыки владения методами исследования функций и решения прикладных задач оптимизации, познакомить с методами решения задач повышенной сложности.

Новизна программы состоит в сквозном принципе «от простого к сложному» и встроенной двухуровневой системе задач: каждая тема начинается с опорных типовых задач и завершается задачами повышенной сложности и олимпиадными задачами (в том числе с параметром). Теоретические элементы демонстрируются на практических модельных примерах. В учебном процессе используются цифровые образовательные ресурсы для построения графиков функций и визуализации их свойств.

Педагогическая целесообразность. Обучение данному курсу направлено на выработку способностей к логическому мышлению, усвоение различных методов решения задач математического анализа, практическое применение полученных навыков и знаний в области геометрии и физики, на развитие научно-технического способа мышления обучающихся.

Цель и задачи программы

Цель программы — формирование и развитие у обучающихся интеллектуальных и практических компетенций в области дифференциального исчисления, уверенное освоение методов дифференциального исчисления для решения нестандартных задач; моделирования прикладных задач на оптимизацию; применения производной в задачах с параметром и олимпиадных задачах.

Задачи программы:

- систематизировать теоретические знания: определение производной, её физический и геометрический смысл, уравнение касательной, схему исследования функции;
- отработать технику дифференцирования: производные элементарных функций, суммы, произведения, частного и сложной функции;
- отработать методы решения смысловых задач на применение производной и первообразной, в том числе по готовым графикам;
- освоить алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке для целых рациональных, дробно-рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических функций;
- научить переводить текст прикладной задачи (геометрия, физика, экономика) на язык функций и находить оптимальное решение;
- познакомить с применением производной в задачах с параметром (условие касания, число корней уравнения) и с олимпиадными методами, опирающимися на монотонность и оценки (доказательство неравенств, метод касательной как опорной прямой).

Возраст обучающихся: 16–18 лет.

Сроки реализации: 20 академических часов.

Наполняемость группы: 25–35 человек.

Формы и режим занятий:

Режим занятий: 1–2 занятия в неделю; 1 занятие — 2 академических часа.

Формы организации деятельности: групповые, индивидуально-групповые.

Методы обучения: словесные, комбинированные, теоретические, практические.

Ожидаемые результаты и способы их определения

В результате освоения программы обучающиеся

будут **знать**:

- физический и геометрический смысл производной и их отражение в формулировках задач;
- уравнение касательной и условия параллельности и перпендикулярности прямых;
- схему исследования функции с помощью производной и алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке;
- этапы математического моделирования прикладной задачи на оптимизацию;
- основные приёмы использования производной в задачах с параметром и олимпиадных задачах: условие касания, связь числа корней с экстремумами, доказательство неравенств через монотонность.

будут **уметь:**

- вычислять производные элементарных функций, суммы, произведения, частного и сложной функции;
- решать задачи на чтение графиков функции и её производной, задачи на физический и геометрический смысл производной;
- находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке с полным обоснованием решения, включая отбор корней уравнения производной по области определения;
- составлять функцию по условию прикладной задачи и интерпретировать найденную точку экстремума;
- переводить условие касания прямой и графика функции в уравнение с параметром и исследовать число корней уравнения через экстремумы и монотонность;
- доказывать неравенства методом исследования монотонности вспомогательной функции.

Способы определения результатов: три тематических мини-зачёта (по одному после каждого раздела), итоговая работа с последующим разбором.

2. Учебно-тематический план

№ п/п	Раздел / Тема	Количество часов			Форма аттестации/ контроля
		Всего ауд. часов	Лекции	Практические занятия	
	Раздел 1. Производная и техники дифференцирования	**6**	**1,5**	**4,5**	
1.1	Производная: определение, физический и геометрический смысл. Уравнение касательной	2	0,5	1,5	Текущий
1.2	Правила дифференцирования. Производные элементарных функций. Производная сложной функции	2	0,5	1,5	
1.3	Чтение графиков функции и её производной. Первообразная и её график	2	0,5	1,5	мини-зачёт
	Раздел 2. Исследование функций с помощью производной	**6**	**1,5**	**4,5**	
2.1	Монотонность и экстремумы целых рациональных функций	2	0,5	1,5	Текущий
2.2	Наибольшее и наименьшее значения на отрезке: дробно-рациональные и иррациональные функции	2	0,5	1,5	
2.3	Исследование показательных, логарифмических и тригонометрических функций	2	0,5	1,5	мини-зачёт
	Раздел 3. Задачи повышенной сложности, прикладные и олимпиадные методы	**8**	**2**	**6**	
3.1	Прикладные задачи на оптимизацию: от текста задачи к функции	2	0,5	1,5	Текущий
3.2	Касательная в задачах с параметром: условие касания	2	0,5	1,5	
3.3	Производная в олимпиадных задачах: число корней уравнения, доказательство неравенств, оценки	2	0,5	1,5	мини-зачёт
	Итоговая аттестация и разбор варианта	2	0,5	1,5	
	ИТОГО	**20**	5	**15**	

3. Содержание образовательной программы

Раздел 1. Производная и техники дифференцирования (6 а.ч.)

Тема 1.1. Производная: определение, физический и геометрический смысл. Уравнение касательной

Теория (0,5 а.ч.). Введение определения производной как предела разностного отношения; физический смысл производной (мгновенная скорость, ускорение) и геометрический смысл (угловой коэффициент касательной); уравнение касательной к графику функции в точке; условие параллельности прямых.

Практика (1,5 а.ч.). Решение задач на физический и геометрический смысл производной, составление уравнения касательной, задачи о прямых, параллельных касательной; модельная задача о мгновенной скорости. Задачи повышенной сложности: касательная, проходящая через заданную точку вне графика; взаимное расположение касательной и графика.

Планируемые результаты: слушатели научатся вычислять значение производной в точке по определению и по таблице, составлять уравнение касательной, решать задачи на физический и геометрический смысл производной, включая задачи о прямых, параллельных касательной.

Тема 1.2. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций. Производная сложной функции

Теория (0,5 а.ч.). Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного; таблица производных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических); производная сложной функции; приведение иррациональных выражений к степеням с дробным показателем.

Практика (1,5 а.ч.). Отработка техники дифференцирования на нарастающей сложности: от линейных комбинаций к сложным функциям. Задачи повышенной сложности: дифференцирование функции, заданной произведением и частным нескольких сомножителей; вычисление производной по определению для функции с параметром.

Планируемые результаты: слушатели научатся уверенно вычислять производные элементарных, суммы, произведения, частного и сложных функций, что образует вычислительную основу всех последующих тем.

Тема 1.3. Чтение графиков функции и её производной. Первообразная и её график

Теория (0,5 а.ч.). Связи между графиком функции и графиком её производной: монотонность и знак производной, точки экстремума и смена знака производной. Понятие первообразной; связь графика функции с графиком её первообразной; геометрический смысл первообразной (площадь криволинейной трапеции).

Практика (1,5 а.ч.). Задачи на чтение графиков: определение по графику производной промежутков монотонности и точек экстремума функции; по графику функции — количество

точек с заданным значением производной; задачи на значение первообразной по её графику. Задачи повышенной сложности: графически заданная производная с разрывом; сопоставление четырёх графиков — функции, производной и первообразной.

Планируемые результаты: слушатели научатся по графику производной определять промежутки монотонности и точки экстремума функции, по графику функции — количество точек с заданным значением производной, решать задачи на первообразную, в том числе с её геометрическим смыслом.

Раздел 2. Исследование функций с помощью производной (6 а.ч.)

Тема 2.1. Монотонность и экстремумы целых рациональных функций

Теория (0,5 а.ч.). Схема исследования функции с помощью производной; необходимое и достаточное условия экстремума; поведение знака производной в окрестности критической точки; исследование кубических и многочленов четвёртой степени.

Практика (1,5 а.ч.). Нахождение промежутков монотонности и точек экстремума многочленов; оформление решения с полным обоснованием смены знака производной. Задачи повышенной сложности: производная задана аналитически в факторизованном виде, например $f'(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$, — определение экстремумов без самого выражения функции; понятие «функция, производная которой не меняет знак в критической точке».

Планируемые результаты: слушатели научатся находить промежутки монотонности и точки экстремума целых рациональных функций и записывать решение с полным письменным обоснованием.

Тема 2.2. Наибольшее и наименьшее значения на отрезке: дробно-рациональные и иррациональные функции

Теория (0,5 а.ч.). Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке: критические точки, отбор принадлежащих отрезку, сравнение значений на концах. Особенности дробно-рациональных функций (обнуление знаменателя при сокращении производной) и иррациональных функций (область определения).

Практика (1,5 а.ч.). Задачи на наибольшее и наименьшее значения дробно-рациональных (вида $x + a/x$) и иррациональных функций на отрезке; отбор корней уравнения производной по области определения. Задачи повышенной сложности: наименьшее значение функции $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, допускающее два способа решения — через производную и через вершину параболы (сравнение методов).

Планируемые результаты: слушатели научатся находить наибольшее и наименьшее значения дробно-рациональных и иррациональных функций на отрезке, выполнять отбор корней уравнения производной по области определения и видеть рациональные пути решения.

Тема 2.3. Исследование показательных, логарифмических и тригонометрических функций

Теория (0,5 а.ч.). Формулы дифференцирования показательных и логарифмических функций; сохранение знака положительного множителя (экспоненты) при исследовании знака производной; особенности исследования тригонометрических функций: оценка производной, отбор корней тригонометрического уравнения на отрезке.

Практика (1,5 а.ч.). Нахождение точек экстремума и наибольших/наименьших значений показательных, логарифмических и тригонометрических функций на отрезке. Задачи повышенной сложности: точка максимума функции $y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 7$ на промежутке $(0; \pi/2)$; наибольшее значение функции $y = x \cdot e^{5-x}$; оценка знака производной без решения уравнения $f'(x) = 0$.

Планируемые результаты: слушатели научатся исследовать показательные, логарифмические и тригонометрические функции, выполнять отбор корней уравнения производной по отрезку и использовать оценки знака производной.

Раздел 3. Задачи повышенной сложности, прикладные и олимпиадные методы (8 а.ч.)

Тема 3.1. Прикладные задачи на оптимизацию: от текста задачи к функции

Теория (0,5 а.ч.). Этапы математического моделирования прикладной задачи: выделение оптимизируемой величины, выражение её через одну переменную с использованием условия-связи, отыскание экстремума, интерпретация ответа с учётом физического смысла области определения.

Практика (1,5 а.ч.). Задачи из геометрии (коробка наибольшего объёма из квадратной заготовки, цилиндр наибольшего объёма, вписанный в шар), физики и экономики; практическая работа в малых группах с защитой решений. Задачи повышенной сложности: оптимизация с двумя условиями-связями; задачи, в которых оптимум достигается на границе области определения.

Планируемые результаты: слушатели научатся составлять функцию по условию текстовой задачи, находить оптимальное значение и интерпретировать его в исходных терминах (размеры, время, затраты).

Тема 3.2. Касательная в задачах с параметром: условие касания

Теория (0,5 а.ч.). Условие касания прямой и графика функции как уравнение с параметром: совпадение значений функций и их производных в точке касания; сведение условия касания к требованию единственности решения уравнения (дискриминант); два способа решения задач о касании.

Практика (1,5 а.ч.). Задачи вида «найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = ax$ касается графика функции $y = f(x)$»; касание прямой с кубической параболой; два способа решения и их сравнение. Задачи повышенной сложности: касание прямой с графиком, содержащим экспоненту или логарифм; общее уравнение касательной как опорной прямой.

Планируемые результаты: слушатели научатся переводить условие касания в систему уравнений относительно параметра и абсциссы точки касания, решать её двумя способами и обосновывать полноту полученного ответа.

Тема 3.3. Производная в олимпиадных задачах: число корней уравнения, доказательство неравенств, оценки

Теория (0,5 а.ч.). Связь числа корней уравнения f(x) = a с промежутками монотонности и экстремумами функции f; метод исследования монотонности вспомогательной функции при доказательстве неравенств; метод оценок; классические олимпиадные неравенства

$(\sin x > \frac{2x}{\pi},\ x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right), \ln(x+1) > x/(1+x))$

как иллюстрации метода.

Практика (1,5 а.ч.). Разбор и решение олимпиадных задач: подсчёт числа корней уравнения с параметром через экстремумы (например, $x^3 - 3x = a$); доказательство неравенств через монотонность разности; коллективное обсуждение альтернативных решений без производной и сравнение их сложности.

Планируемые результаты: слушатели научатся применять производную в нестандартных ситуациях: исследовать число корней уравнения с параметром через экстремумы, доказывать неравенства исследованием монотонности вспомогательной функции, использовать касательную как опорную прямую.

Итоговая аттестация (2 а.ч.)

Итоговая работа состоит из двух вариантов сложности.

Базовый вариант: задачи на смыслы производной и чтение графиков, две задачи на наибольшее и наименьшее значения функции, одна прикладная задача на оптимизацию.

В повышенный вариант (для слушателей высокого уровня подготовки) дополнительно включена задача с параметром на условие касания и олимпиадная задача на доказательство неравенства или подсчёт числа корней.

Последующий разбор решений, анализ типичных ошибок, индивидуальные рекомендации по дальнейшей работе, включая подготовку к олимпиадам.

4. Формы аттестации и контроля

Виды контроля

В образовательном процессе используются следующие методы контроля усвоения учащимися учебного материала:

Текущий контроль. Проводится с целью непрерывного отслеживания уровня усвоения материала. В процессе изложения теоретического материала педагог обращается к учащимся с вопросами и даёт короткие задания

Тематический контроль. После каждого из трёх разделов проводится мини-опрос (10–15 минут): краткая теоретическая часть (2 вопроса) и 1–2 задачи

Итоговый контроль. Итоговая работа с выбором варианта сложности (базовый или повышенный) и последующим разбором решений, анализом типичных ошибок и индивидуальными рекомендациями.

5. Организационно-педагогические условия реализации программы

Методическое обеспечение программы

Методы обучения, используемые в программе:

- словесные (устное объяснение материала);
- наглядные (презентация, построение графиков в цифровых сервисах);
- практические;
- аналитические (сравнение методов решения одной задачи).

С целью стимулирования творческой активности учащихся будут использованы:

- метод опроса;
- коллективное обсуждение методов решения задачи;
- парная взаимная проверка решений задач повышенной сложности;
- «математические бои» на разборе олимпиадных задач раздела 3.

Виды дидактических материалов

Для обеспечения наглядности и доступности изучаемого материала будут использоваться: наглядные пособия в виде слайдов или раздаточного материала; подборки задач трёх уровней сложности по каждой теме (базовые, повышенной сложности, олимпиадные); занятия будут проходить в форме лекций с демонстрацией преподавателем теоретического материала по теме, а также в форме самостоятельных практических занятий, на которых обучающиеся смогут обсуждать подходы к решению нестандартных задач и успешно их решать.

Организационно-педагогические ресурсы программы

Материально-техническое обеспечение учебной программы

Наименование	На группу, ед.	Примечание
Электронная доска	одна	
Компьютер	один	Сервис построения графиков
Экран	один	Для проектора

Кадровое обеспечение программы

Реализатор программы: Завьялова Татьяна Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики НИТУ МИСИС.

6. Список литературы

Основная литература:

1. Башмаков, М.И. Алгебра и начала анализа: задачи и решения / М.И. Башмаков, Б.М. Беккер. — М.: Высшая школа, 2004. — 296 с.

2. Вавилов, В.В. Задачи по математике. Начала анализа / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. — М.: Физматлит, 2008. — 284 с.

3. Агаханов, Н.Х. Всероссийская олимпиада школьников по математике: методическое пособие / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. — М.: МЦНМО, 2020. — 216 с.

4. Горбачев, В.И. Сборник олимпиадных задач по математике / В.И. Горбачев. — М.: МЦНМО, 2018. — 608 с.

5. Ященко, И.В. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 класс. Универсальный сборник задач / И.В. Ященко, С.А. Шестаков. — М.: Просвещение, 2023. — 240 с.

6. Кочетков, Е.С. Арифметика, алгебра, начала анализа: учебное пособие / Е.С. Кочетков. — М.: Форум, 2018. — 384 с.

Интернет-источники:

1. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». Режим доступа: http://fipi.ru/ (дата обращения: 05.10.2026 г.).

2. Задачи и олимпиадные задачи по математике с решениями: problems.ru. Режим доступа: http://problems.ru/ (дата обращения: 05.10.2026 г.).

3. Олимпиады для школьников: математические олимпиады и кружки. Режим доступа: http://olympiads.mccme.ru/ (дата обращения: 05.10.2026 г.).