

УДК 534+535
P27

Рецензент
д-р техн. наук, проф. *К.Л. Косырев*
(председатель НМСН *Металлургия*)

Рахштадт Ю.А.

P27 Физика. Колебания и волны: Учеб. пособие. Ч. 4. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2009. – 180 с.

Учебное пособие состоит из пяти частей, соответствующих пяти разделам курса физики. В четвертой части «Колебания и волны» рассматриваются закономерности колебательных и волновых процессов различной природы.

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению «Металлургия».

© Государственный технологический университет «Московский институт стали и сплавов» (МИСиС), 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 20. Колебания	4
20.1. Линейный гармонический осциллятор	4
20.2. Энергетика ЛГО	4
20.3. Динамика ЛГО	12
20.4. Графическое представление колебаний. Плоские диаграммы	17
20.5. Векторное представление колебаний. Векторная диаграмма	21
20.6. Сложение колебаний	22
20.7. Затухающие колебания	27
20.8. Вынужденные колебания	33
Контрольные вопросы	41
Примеры решения задач	42
Глава 21. Волны	53
21.1. Общие понятия. Уравнения волновых процессов	53
21.2. Упругие волны	56
21.3. Электромагнитные волны	70
Контрольные вопросы	97
Примеры решения задач	97
Глава 22. Волновые явления	107
22.1. Интерференция волн	107
22.2. Стоячие волны	118
22.3. Дифракция волн	126
Контрольные вопросы	150
Примеры решения задач	151
Домашние задания	158
Приложение	188
Библиографический список	190

Глава 20. КОЛЕБАНИЯ

Колебательное движение (колебание) – это изменение состояния вещества или поля, характеризующееся повторяемостью во времени определенной физической величины ξ .

- Виды колебаний:
- Периодические (гармонические и негармонические) и непериодические.
- Собственные, затухающие, вынужденные, параметрические и автоколебания.
- Механические, электромагнитные и др.

20.1. Линейный гармонический осциллятор

Колебательная система, совершающая собственные колебания по гармоническому закону

$$\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (20.1)$$

называется линейным гармоническим осциллятором (ЛГО).

Примеры ЛГО

1. Пружинный маятник – материальная точка массой m , подвешенная на пружине жесткостью k .
2. Физический маятник – абсолютно твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции.
3. Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити длиной ℓ .
4. Электрический колебательный контур – электрическая цепь, содержащая конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L .

20.2. Энергетика ЛГО

Движение в любой потенциальной яме $U = U(\xi)$ есть колебательное движение (рис. 20.1).

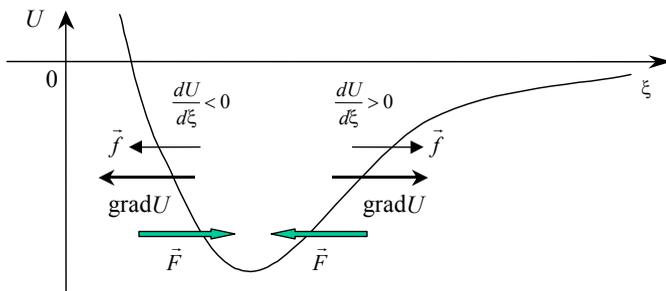


Рис. 20.1. Колебательное движение в потенциальной яме

Если на механическую систему (например, пружинный маятник), находящуюся в состоянии устойчивого равновесия, действует *внешняя* сила \vec{f} , то возникает градиент потенциальной энергии и, как следствие, – *внутренняя* сила \vec{F} :

$$\vec{F} = -\text{grad}U, \quad (20.2)$$

которая возвращает систему в положение устойчивого равновесия. Таким образом, в системе возникают колебания.

Движение в любой потенциальной яме может быть аппроксимировано движением в *параболической* потенциальной яме, если рассматривать лишь *малые* отклонения (смещения) от положения равновесия.

Движение в параболической потенциальной яме ($U \sim \xi^2$) приводит к гармоническим колебаниям.

20.2.1. Пружинный маятник

Закон сохранения и превращения энергии колебаний пружинного маятника (рис. 20.2):

$$U_m = U + K = K_m, \quad (20.3)$$

где U_m и K_m – амплитудные значения потенциальной и кинетической энергий соответственно.

При малых отклонениях от положения равновесия изменением потенциальной энергии материальной точки в однородном поле тяготения можно пренебречь.

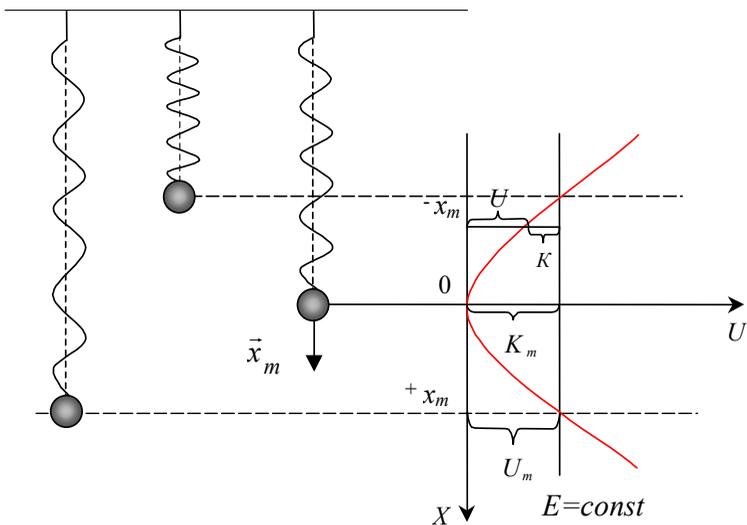


Рис. 20.2. Энергетика колебаний пружинного маятника

Рассмотрим превращение энергии за половину периода колебания:

$$\frac{1}{2} kx_m^2 = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_m^2, \quad (20.4)$$

где v – линейная скорость, $v = \frac{dx}{dt}$;

x – мгновенное значение отклонение маятника от положения равновесия;

x_m – максимальное значение этого отклонения.

Отсюда

$$\frac{k}{m} (x_m^2 - x^2) = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

После разделения переменных и интегрирования получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x_m^2 - x^2}} = \int \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot dt,$$

откуда

$$\arcsin \frac{x}{x_m} + c = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t. \quad (20.5)$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ смещение $x_0 = x_m$, то $c = -\frac{\pi}{2}$ и решение интегрального уравнения имеет вид:

$$x(t) = x_m \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (20.6)$$

Амплитуда x_m есть наибольшее значение колеблющейся величины. Амплитуда – положительная величина. Амплитуда определяется начальным запасом энергии и не зависит от параметров колебательной системы.

Собственная циклическая (круговая) частота $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

зависит от параметров колебательной системы:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (20.7)$$

Период собственных колебаний: T_0 .

Линейная частота: ν_0 .

Фаза колебания: $\Phi = \omega_0 t$ определяет значение смещения x в данный момент времени.

Если в момент времени $t = 0$ смещение $|x_0| < x_m$, то фаза колебания

$$\Phi = \omega_0 t + \varphi, \quad (20.8)$$

где φ – начальная фаза колебания.

Уравнение гармонических колебаний пружинного маятника:

$$x(t) = x_m \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi \right). \quad (20.9)$$

20.2.2. Физический маятник

Закон сохранения и превращения энергии колебаний физического маятника (рис. 20.3):

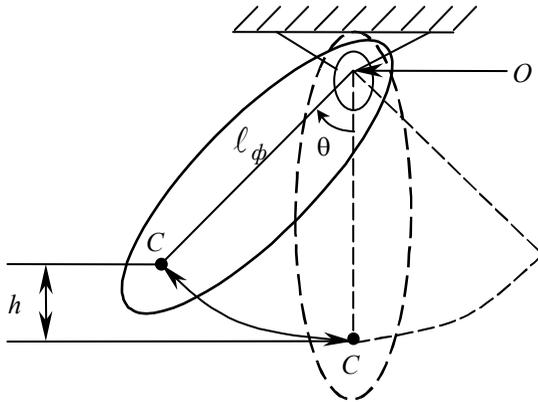


Рис. 20.3. Физический маятник:
O – точка подвеса, *C* – центр инерции

Рассмотрим превращение энергии за половину периода колебания:

$$U_m = U + K = K_m.$$

$$mgh_m = mgh + \frac{1}{2} \mathfrak{I} \Omega^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{I} \Omega_m^2, \quad (20.10)$$

где Ω – угловая скорость, $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$;

\mathfrak{I} – момент инерции маятника относительно т. *O*,
h – высота, на которую поднимается центр инерции (т. *C*), определена по формуле

$$h = \ell_\phi (1 - \cos \theta), \quad (20.11)$$

здесь $\ell_\phi = OC$ – длина физического маятника;

h_m – максимальная высота подъема центра инерции.

При малых θ $\sin \theta \approx \theta$ (в радианах) и тогда

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \approx \sqrt{1 - \theta^2} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Поэтому

$$h_m = \ell_\phi \frac{\theta_m^2}{2} \text{ и } h = \ell_\phi \frac{\theta^2}{2}, \quad (20.12)$$

где θ – мгновенное значение угла отклонения маятника от положения равновесия;

θ_m – максимальное значение этого угла (*амплитуда*).

Тогда закон сохранения и превращения энергии может быть записан в виде

$$mg\ell_{\phi} \frac{\theta_m^2}{2} = mg\ell_{\phi} \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2} \mathfrak{I} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (20.13)$$

После разделения переменных и интегрирования (по аналогии с выводом для пружинного маятника) получим уравнение гармонических колебаний физического маятника:

$$\theta(t) = \theta_m \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (20.14)$$

Амплитуда θ_m определяется начальным запасом энергии и не зависит от параметров колебательной системы.

Собственная циклическая (круговая) частота $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

зависит от параметров колебательной системы:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell_{\phi}}{\mathfrak{I}}}. \quad (20.15)$$

Период собственных колебаний: T_0 .

Линейная частота: ν_0 .

Фаза колебания: $\Phi = \omega_0 t$ определяет значение смещения θ в данный момент времени.

Если в момент времени $t = 0$ смещение $|\theta_0| < \theta_m$, то фаза колебания

$$\Phi = \omega_0 t + \varphi,$$

где φ – начальная фаза колебания.

Уравнение гармонических колебаний физического маятника:

$$\theta(t) = \theta_m \cos \left(\sqrt{\frac{mg\ell_{\phi}}{\mathfrak{I}}} \cdot t + \varphi \right). \quad (20.16)$$

20.2.3. Математический маятник

Математический маятник – это частный случай физического маятника: размерами тела массой m пренебрегаем по сравнению с длиной подвеса ℓ (рис. 20.4).

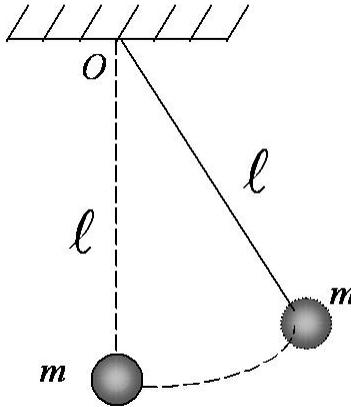


Рис. 20.4. Математический маятник

Так как момент инерции материальной точки относительно т. O равен:

$$\mathfrak{I} = m\ell^2, \quad (20.17)$$

то собственная частота колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (20.18)$$

20.2.4. Электрический колебательный контур (LC-контур)

Закон сохранения и превращения энергии в электрическом колебательном контуре (рис. 20.5):

$$W_{\mathfrak{E}}^m = W_{\mathfrak{E}} + W_{\mathfrak{M}} = W_{\mathfrak{M}}^m, \quad (20.19)$$

где $W_{\mathfrak{E}}$ – энергия электрического поля в конденсаторе;

$W_{\mathfrak{M}}$ – энергия магнитного поля в соленоиде;

$W_{\mathfrak{E}}^m$ и $W_{\mathfrak{M}}^m$ – их амплитудные значения.

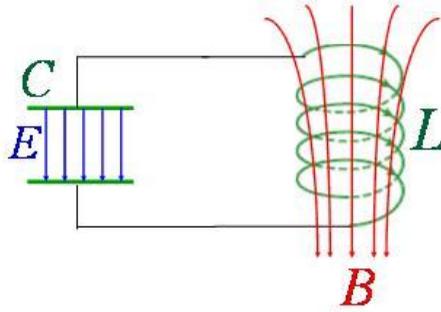


Рис. 20.5. Электрический колебательный контур:
 L – индуктивность катушки, C – емкость конденсатора

Рассмотрим превращение энергии за половину периода колебания:

$$\frac{1}{2C}q_m^2 = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Li_m^2, \quad (20.20)$$

где q и q_m – мгновенное и максимальное значения заряда на обкладках конденсатора;

i и i_m – соответственно мгновенное и максимальное значения тока

в контуре, $i = \frac{dq}{dt}$.

После разделения переменных и интегрирования (по аналогии с выводом для пружинного маятника) получим уравнение гармонических колебаний в электрическом колебательном контуре:

$$q(t) = q_m \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (20.21)$$

Амплитуда q_m определяется начальным запасом энергии и не зависит от параметров колебательной системы.

Собственная циклическая (круговая) частота $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

зависит от параметров колебательной системы:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (20.22)$$

Период собственных колебаний: T_0 .

Линейная частота: ν_0 .

Фаза колебания: $\Phi = \omega_0 t$ определяет значение заряда q в данный момент времени.

Если в момент времени $t = 0$ заряд $|q_0| < q_m$, то фаза колебания

$$\Phi = \omega_0 t + \varphi,$$

где φ – начальная фаза колебания.

Закон сохранения энергии можно записать иначе:

$$\frac{1}{2} q_m u_m = \frac{1}{2} q u + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L i_m^2 \quad (20.23)$$

или

$$\frac{1}{2} C u_m^2 = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L i_m^2, \quad (20.24)$$

где u и u_m – мгновенное и амплитудное значения напряжения между обкладками конденсатора.

Так как $u(t) = \frac{q(t)}{C}$ и $u_m = \frac{q_m}{C}$, то

$$u(t) = u_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (20.25)$$

Из закона сохранения энергии можно получить соотношение, связывающее амплитудные значения тока и напряжения:

$$i_m = u_m \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (20.26)$$

20.3. Динамика ЛГО

При динамическом рассмотрении ЛГО условие возникновения гармонических колебаний можно представить так: *вторая производная от смещения по времени должна быть прямо пропорциональна величине смещения из положения равновесия:*

$$\ddot{\xi} \sim (-\xi). \quad (20.27)$$

20.3.1. Пружинный маятник

Уравнение основного закона динамики материальной точки (второй закон Ньютона):

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (20.28)$$

Пружинный маятник в положении равновесия (рис. 20.6):

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}} = 0 \text{ или } mg - kx_0 = 0.$$

Отсюда

$$mg = kx_0 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{x_0} = \omega_0^2. \quad (20.29)$$

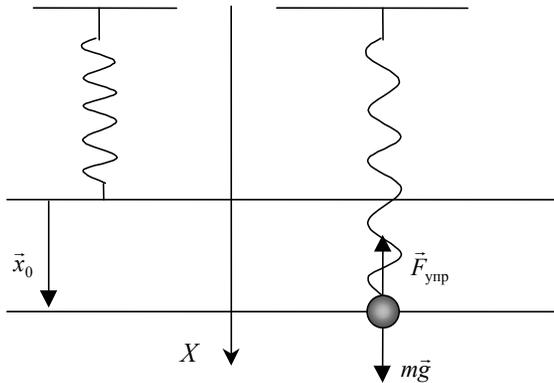


Рис. 20.6. Динамика пружинного маятника

При смещении маятника из положения равновесия возникает возвращающая упругая сила

$$mg - k(x_0 + x) = m\ddot{x}.$$

Отсюда

$$-kx = m\ddot{x}. \quad (20.30)$$

Дифференциальное уравнение собственных колебаний пружинного маятника:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (20.31)$$

Поскольку $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ – собственная циклическая частота колебаний пружинного маятника (20.7), то дифференциальное уравнение собственных колебаний можно представить в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (20.32)$$

20.3.2. Физический маятник

Уравнение основного закона динамики вращательного движения абсолютно твердого тела:

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = [\vec{\ell}_\phi, m\vec{g}] = \mathfrak{I}\vec{\beta}. \quad (20.33)$$

Так как для физического маятника (рис. 20.7) $\vec{M} \parallel -\vec{\theta}$, то

$$-\ell_\phi mg \sin \theta = \mathfrak{I} \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

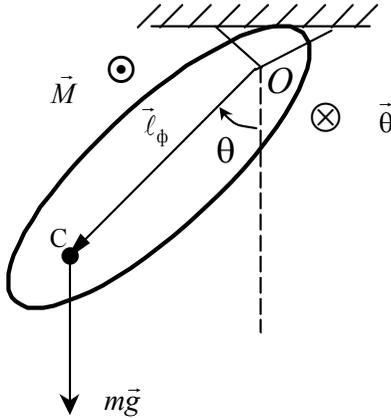


Рис. 20.7. Динамика физического маятника:
 $\odot \vec{M}$ – вектор момента силы тяжести относительно точки O ;
 $\otimes \vec{\theta}$ – вектор угла поворота

При малых углах $\sin \theta \approx \theta$ (в радианах). Тогда

$$-\ell_\phi mg \theta = \mathfrak{I} \frac{d^2 \theta}{dt^2}. \quad (20.34)$$

Дифференциальное уравнение собственных колебаний физического маятника:

$$\ddot{\theta} + \frac{\ell_{\phi} mg}{\mathfrak{I}} \theta = 0. \quad (20.35)$$

Поскольку $\sqrt{\frac{\ell_{\phi} mg}{\mathfrak{I}}} = \omega_0$ (20.15) – собственная циклическая частота колебаний, то *дифференциальное уравнение собственных колебаний физического маятника*:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (20.36)$$

Для математического маятника дифференциальное уравнение собственных колебаний:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0, \quad (20.37)$$

где $\sqrt{\frac{g}{\ell}} = \omega_0$ – собственная циклическая частота (20.18).

Тогда *дифференциальное уравнение собственных колебаний математического маятника* тоже можно представить в виде

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (20.38)$$

20.3.3. Электрический колебательный контур (LC-контур)

Уравнение второго закона Кирхгофа:

$$\sum_{i=1}^N u_i = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j. \quad (20.39)$$

Здесь $\sum_{i=1}^N u_i$ – падение напряжения на обкладках конденсатора в LC-

контуре (см. рис. 20.5), $\sum_{i=1}^N u_i = u_c = \frac{q}{c}$;

$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j$ – ЭДС самоиндукции, $\sum_{j=1}^m \varepsilon_j = \varepsilon_{\text{самоинд}} = -L \frac{di}{dt}$;

i – ток разрядки/зарядки конденсатора.

Тогда уравнение второго закона Кирхгофа:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}. \quad (20.40)$$

Поскольку $i = \frac{dq}{dt}$, то дифференциальное уравнение собственных колебаний в LC-контуре можно представить в виде

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad (20.41)$$

или

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (20.42)$$

где $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ – собственная циклическая частота колебаний в электрическом колебательном контуре (20.22).

При описании электрических и механических колебательных систем существует аналогия (табл. 20.1).

Таблица 20.1

МЕХАНИЧЕСКИЕ ЛГО		ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР	
Смещение	x	Заряд	q
Угол поворота	θ		
Скорость	$V = \dot{x}$	Ток	$i = \dot{q}$
Угловая скорость	$\Omega = \dot{\theta}$		
Масса	m	Индуктивность	L
Момент инерции	\mathfrak{I}		
Сила	\vec{F}	Электродвижущая сила	ε
Момент силы	\vec{M}		
Потенциальная энергия	$\frac{1}{2} kx^2$ $\frac{1}{2} mg\ell^2 \phi$	Потенциальная энергия электрического поля	$\frac{1}{2} cu^2$
Кинетическая энергия	$\frac{1}{2} m\dot{x}^2$ $\frac{1}{2} \mathfrak{I} \dot{\theta}^2$	Энергия магнитного поля	$\frac{1}{2} L\dot{q}^2$

20.4. Графическое представление колебаний. Плоские диаграммы¹

20.4.1. Пружинный и физический (математический) маятники

Для произвольных колебательных систем *дифференциальное уравнение собственных колебаний* имеет вид

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0. \quad (20.43)$$

Зависимость смещения от времени (рис. 20.8):

$$\xi(t) = \xi_m \cos \omega_0 t = A \cos \omega_0 t. \quad (20.44)$$

при условии, что начальная фаза $\varphi = 0$

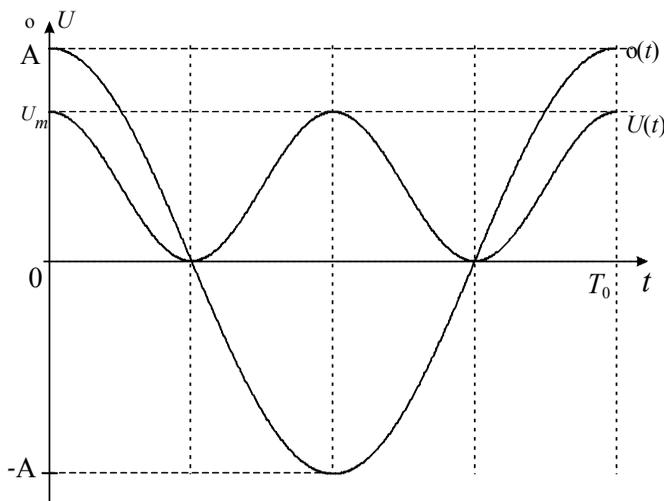


Рис. 20.8. Графики зависимости смещения ξ и потенциальной энергии U от времени t

Поскольку потенциальная энергия ЛГО пропорциональна квадрату смещения осциллятора из положения равновесия, то зависимость потенциальной энергии от времени (см. рис. 20.8)

¹ Графики на рис.20.8 – 20.12 построены в предположении: начальная фаза $\varphi = 0$.

$$U(t) = U_m \cos^2 \omega_0 t. \quad (20.45)$$

Поскольку зависимость скорости колебания от времени (рис. 20.9)

$$\dot{\xi}(t) = \frac{d\xi(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin \omega_0 t, \quad (20.46)$$

а кинетическая энергия ЛГО пропорциональна квадрату скорости, то зависимость кинетической энергии от времени (см. рис. 20.9)

$$K(t) = K_m \sin^2 \omega_0 t. \quad (20.47)$$

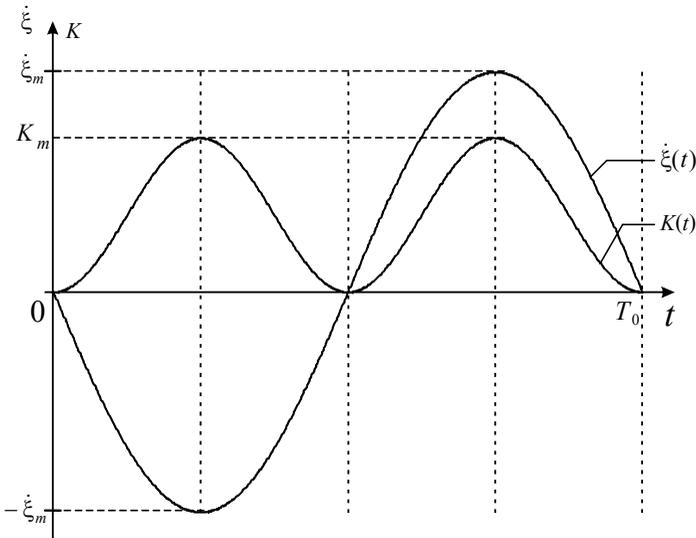


Рис. 20.9. Графики зависимости скорости колебания $\dot{\xi}$ и кинетической энергии K от времени t

Поскольку зависимость ускорения ЛГО от времени (рис. 20.10)

$$\ddot{\xi}(t) = \frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t, \quad (20.48)$$

а возвращающая сила пропорциональна ускорению

$$F(t) = -mA\omega_0^2 \cos \omega_0 t, \quad (20.49)$$

то график зависимости возвращающей силы от времени будет аналогичен графику ускорения (см. рис. 20.10).

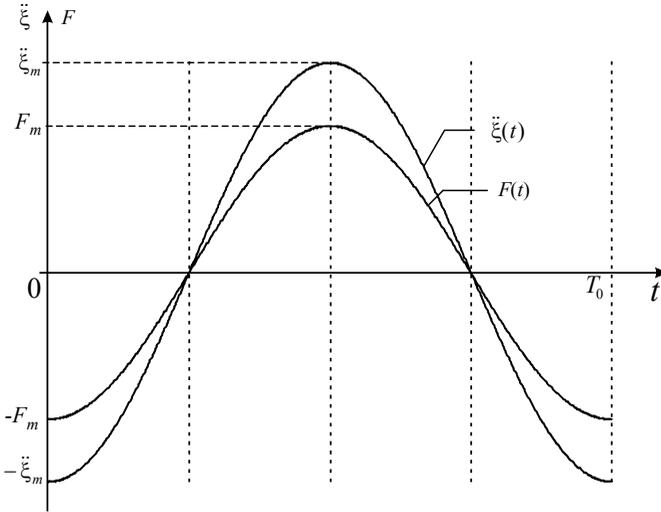


Рис. 20.10. Графики зависимости ускорения $\ddot{\xi}$ и возвращающей силы F от времени t

Так же будет выглядеть и график зависимости от времени момента возвращающей силы, действующей на физический (математический) маятник.

20.4.2. Электрический колебательный контур

Графики зависимости от времени заряда и падения напряжения на обкладках конденсатора представлены на рис. 20.11 (начальная фаза $\varphi = 0$).

Поскольку энергия электрического поля (потенциальная энергия) пропорциональна квадрату заряда (падения напряжения)

$$W_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} Cu^2 = \frac{1}{2C} q^2, \quad (20.50)$$

то зависимость энергии электрического поля от времени

$$W_{\mathcal{E}}(t) = W_{\mathcal{E}}^m \cos^2 \omega_0 t. \quad (20.51)$$

График $W_{\mathcal{E}}(t)$ представлен на рис. 20.12.

Поскольку ток

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \dot{q}(t), \quad (20.52)$$

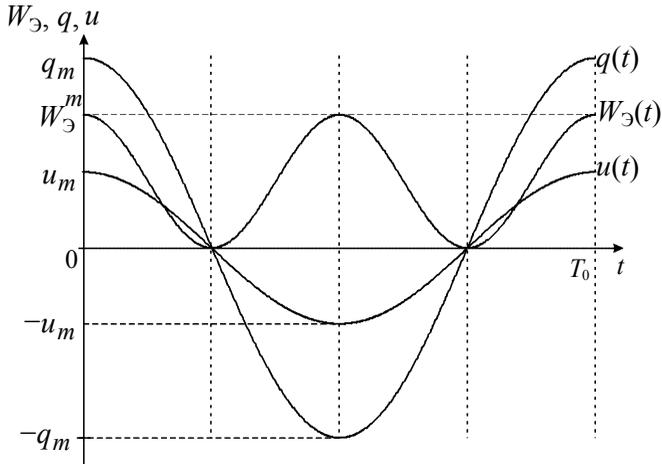


Рис. 20.11. Графики зависимости заряда q , падения напряжения u и энергии электрического поля $W_{\text{Э}}$ от времени t

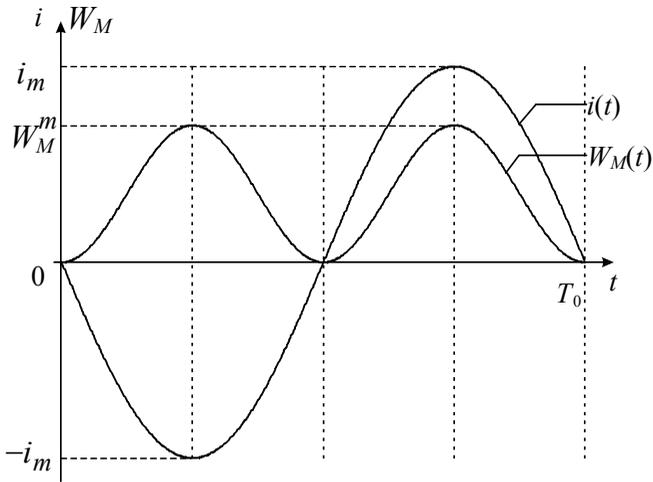


Рис. 20.12. Графики зависимости тока i и энергии магнитного поля $W_{\text{М}}$ от времени

то зависимость тока в колебательном контуре от времени (см. рис. 20.12)

$$i(t) = -q_m \omega_0 \sin \omega_0 t = -i_m \sin \omega_0 t . \quad (20.53)$$

Так как энергия магнитного поля в соленоиде

$$W_M = \frac{1}{2} Li^2 , \quad (20.54)$$

то зависимость энергии магнитного поля от времени

$$W_M(t) = W_M^m \sin^2 \omega_0 t . \quad (20.55)$$

График $W_M(t)$ представлен на рис. 20.12.

20.5. Векторное представление колебаний. Векторная диаграмма

Сложение нескольких гармонических функций становится наглядным, если изображать колебания графически в виде *амплитудных векторов* на плоскости. Проекция конца вектора \vec{A} на ось OX (рис. 20.13) будет совершать гармоническое колебание с амплитудой A , равной длине амплитудного вектора $|\vec{A}|$, с циклической частотой, равной угловой скорости ω_0 вращения вектора \vec{A} , и с начальной фазой φ , равной углу, образуемому вектором \vec{A} с осью OX в начальный момент времени:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) , \quad (20.56)$$

где $A = x_m$ – амплитуда колебаний.

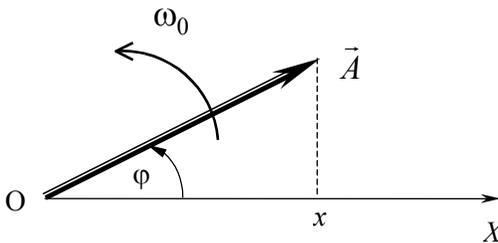


Рис. 20.13. Векторная диаграмма гармонического колебания

Полученная таким способом схема называется *векторной диаграммой*.

20.6. Сложение колебаний

20.6.1. Сложение колебаний одинакового направления

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2 , которые запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (20.57)$$

Представим оба колебания с помощью векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 (рис. 20.14). Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор \vec{A} . Легко видеть, что проекция этого вектора на ось X равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2$$

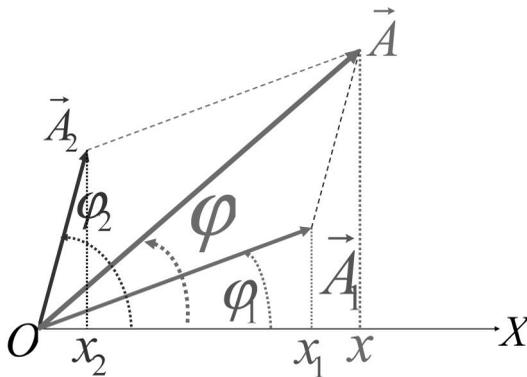


Рис. 20.14. Сложение колебаний одинакового направления

Следовательно, вектор \vec{A} представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0 , как и так что результирующее движение будет гармоническим коле-

банием с частотой ω_0 , амплитудой A и начальной фазой φ . Из построения видно, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (20.58)$$

Итак, представление гармонических колебаний посредством векторов дает возможность свести сложение нескольких колебаний к операции сложения векторов.

Этот прием бывает особенно полезен, например, в оптике, где световые колебания в некоторой точке определяются как результат наложения многих колебаний, приходящих в данную точку от различных участков волнового фронта.

Проанализируем выражение (20.58) для амплитуды. Если разность фаз обоих колебаний $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ равна нулю, амплитуда результирующего колебания равна сумме A_1 и A_2 . Если разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ равна $+\pi$ или $-\pi$, т.е. оба колебания находятся в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна разности A_1 и A_2 .

Если частоты колебаний x_1 и x_2 неодинаковы, векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор \vec{A} пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью. Следовательно, результирующим движением будет в этом случае не гармоническое колебание, а некоторый сложный колебательный процесс – *биения*.

20.6.2. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний

Допустим, что материальная точка может совершать колебания как вдоль оси X , так и вдоль перпендикулярной к ней оси Y . Если возбудить оба колебания, материальная точка будет двигаться по некоторой, вообще говоря, криволинейной траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих колебаний.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = A \cos \omega_0 t,$$

$$y = B \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (20.59)$$

где φ – разность фаз обоих колебаний.

Выражения (20.59) представляют собой заданное в *параметрической форме* уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений (20.59) параметр t . Из первого уравнения следует, что

$$\cos \omega_0 t = \frac{x}{A}. \quad (20.60)$$

Следовательно,

$$\sin \omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (20.61)$$

Теперь развернем косинус во втором из уравнений (20.59) по формуле для косинуса суммы, подставляя при этом вместо $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ их значения (20.60) и (20.61). В результате получим

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cdot \sin \varphi. \quad (20.62)$$

Последнее уравнение после несложных преобразований можно привести к виду

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (20.63)$$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение (20.63) есть уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей X и Y произвольно. Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд A и B и разности фаз φ .

Исследуем форму траектории в некоторых частных случаях.

1. *Разность фаз φ равна нулю.* В этом случае из уравнения (20.63) получается уравнение прямой линии

$$y = \frac{B}{A} x \quad (20.64)$$

Колеблющаяся точка перемещается по этой прямой, причем расстояние ее от начала координат равно

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Подставляя сюда выражения (20.59) для x и y и учитывая, что $\varphi = 0$, получаем закон, по которому r изменяется со временем:

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos \omega_0 t. \quad (20.65)$$

Из (20.65) следует, что результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с частотой ω_0 и амплитудой, равной $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 20.15, а).

2. Разность фаз φ равна $\pm\pi$. Уравнение (20.63) будет иметь вид

$$y = -\frac{B}{A}x \quad (20.66)$$

откуда получается, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис. 20.15, б)

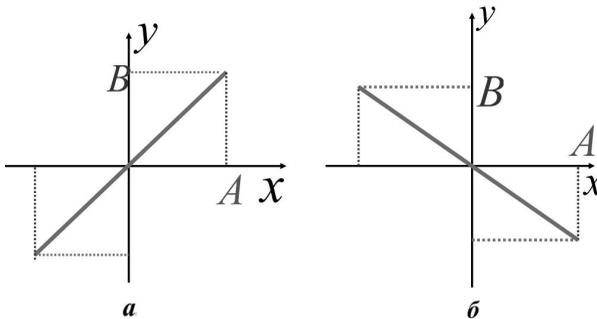


Рис. 20.15. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний:
 а – разность фаз φ равна нулю; б – разность фаз φ равна $\pm\pi$

3. Разность фаз φ равна $\pm\frac{\pi}{2}$. При $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ уравнение (20.63) переходит в

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1, \quad (20.67)$$

т.е. в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колеба-

ний (рис. 20.16). При равенстве амплитуд A и B эллипс вырождается в окружность.

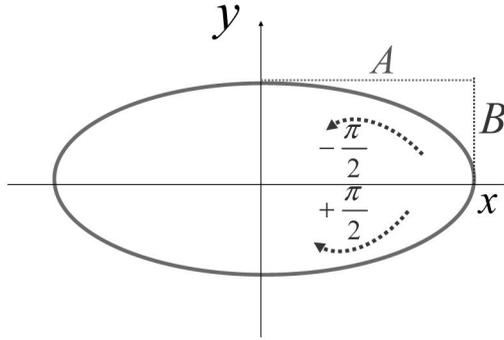


Рис. 20.16. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний

с разностью фаз $\pm \frac{\pi}{2}$.

Из сказанного следует, что равномерное движение по окружности радиуса R с угловой скоростью ω_0 может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$x = R \cos \omega_0 t, \quad y = \pm R \sin \omega_0 t, \quad (20.68)$$

(знак « \rightarrow » в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак « \leftarrow » – движению по часовой стрелке).

В случае, когда частоты взаимно-перпендикулярных колебаний отличаются на очень малую величину $\Delta\omega$, их можно рассматривать как колебания одинаковой частоты, но с медленно изменяющейся разностью фаз. В самом деле, уравнения колебаний можно представить следующим образом:

$$x = A \cos \omega_0 t, \quad y = B \cos [\omega_0 t + (\Delta\omega t + \varphi)] \quad (20.69)$$

и выражение $(\Delta\omega + \varphi)$ рассматривать как разность фаз, медленно изменяющуюся со временем по линейному закону.

Результирующее движение в этом случае происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая будет последовательно принимать форму, отвечающую всем значениям разности фаз от $-\pi$ до $+\pi$. Если частоты взаимно-перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*.

20.7. Затухающие колебания

20.7.1. Пружинный маятник

Второй закон Ньютона для пружинного маятника в вязкой среде:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m\ddot{x} \\ F_x^{\text{тр}} + F_x^{\text{упр}} &= m\ddot{x}\end{aligned}\quad (20.70)$$

где $F_x^{\text{тр}}$ – сила вязкого трения, $F_x^{\text{тр}} = -r\dot{x}$;

r – коэффициент трения;

$F_x^{\text{упр}}$ – сила упругости, $F_x^{\text{упр}} = -kx$.

Тогда дифференциальное уравнение затухающих колебаний пружинного маятника:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \quad (20.71)$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (20.72)$$

Здесь

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad (20.73)$$

– коэффициент затухания.

20.7.2. Электрический колебательный контур

В электрическом колебательном контуре (рис. 20.17) при учете активного (омического) сопротивления возникают затухающие колебания.

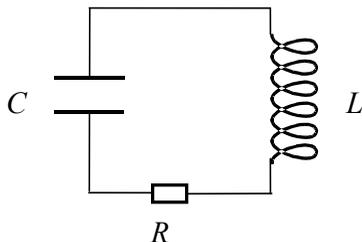


Рис. 20.17. Электрический колебательный контур с активным сопротивлением R

В соответствии со вторым законом Кирхгофа

$$\sum_{i=1}^N u_i = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j, \quad (20.74)$$

$$u_C + u_R = \varepsilon_{\text{самоинд}}, \quad (20.75)$$

где u_C – падение напряжения на конденсаторе, равное

$$u_C = \frac{q}{C}; \quad (20.76)$$

u_R – падение напряжения на активном сопротивлении, равное

$$u_R = iR = \frac{dq}{dt} R = \dot{q}R; \quad (20.77)$$

$\varepsilon_{\text{самоинд}}$ – ЭДС самоиндукции, равная

$$\varepsilon_{\text{самоинд}} = -L \frac{di}{dt} = -L\ddot{q}. \quad (20.78)$$

Поэтому уравнение второго закона Кирхгофа можно записать:

$$\frac{q}{C} + \dot{q}R = -L\ddot{q}$$

или

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (20.79)$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний в электрическом колебательном контуре:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (20.80)$$

где

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (20.81)$$

– коэффициент затухания.

Для произвольных колебательных систем дифференциальное уравнение затухающих колебаний имеет вид:

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0, \quad (20.82)$$

а его решение

$$\xi = A(t)\cos(\omega' t + \varphi), \quad (20.83)$$

где

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (20.84)$$

– частота затухающих колебаний;

T' – период затухающих колебаний.

Затухающие колебания – это пример квазипериодического процесса, так как в каждом периоде амплитуда уменьшается по закону (рис. 20.18)

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (20.85)$$

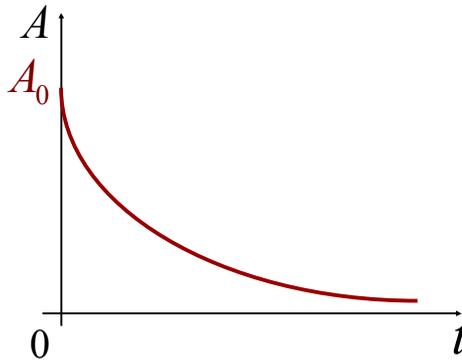


Рис. 20.18. График зависимости амплитуды A затухающих колебаний от времени t

20.7.3. Режимы затухания

$\beta < \omega_0$ – квазипериодический колебательный режим (рис. 20.19):

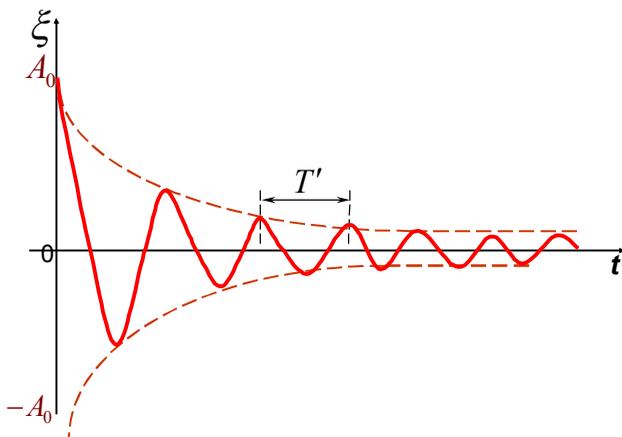


Рис. 20.19. График затухающих колебаний

$\beta = \omega_0$ – *критический режим*: период колебаний обращается в бесконечность, т.е. движение перестает быть периодическим.

Условие *критического режима*:

для пружинного маятника:

$$r_{\text{кр}} = 2\sqrt{km} ; \quad (20.86)$$

для электрического колебательного контура:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} . \quad (20.87)$$

$\beta > \omega_0$ – *апериодический режим* (рис. 20.20): колебательная система, выведенная из положения равновесия, возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний:

а) если при $t = 0$ скорость колебаний $v_0 = 0$, то движение изображается кривой 1;

б) если при $t = 0$ скорость колебаний отлична от нуля, то движение изображается кривой 2.

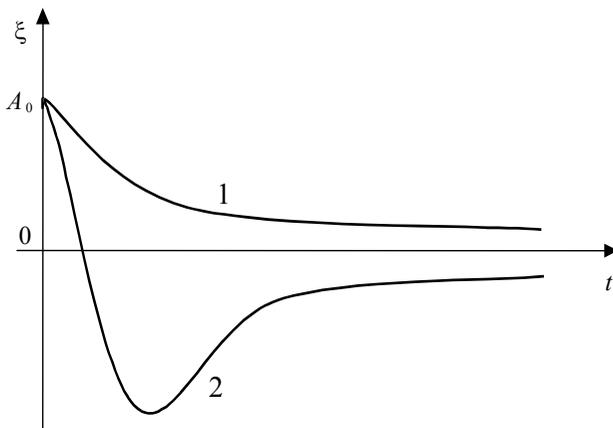


Рис. 20.20. Графики аperiodического режима затухающих колебаний

20.7.4. Параметры затухающих колебаний

Коэффициент затухания β

Если за некоторое время τ_e амплитуда колебаний уменьшается в e раз

$$\frac{A(0)}{A(\tau_e)} = e,$$

то

$$\frac{A(0)}{A(0)e^{-\beta\tau_e}} = e.$$

Тогда $e = e^{\beta\tau_e}$, следовательно,

$$\beta = \frac{1}{\tau_e}, \quad (20.88)$$

где τ_e – время релаксации.

Логарифмический декремент затухания λ

Логарифмический декремент равен натуральному логарифму отношения амплитуд соседних колебаний, т.е. отличающихся на один период T' :

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T')} = \ln \frac{A(0)e^{-\beta t}}{A(0)e^{-\beta(t+T')}} = \beta T'.$$

т.е.

$$\lambda = \beta T' = \frac{1}{\tau_e} T' = \frac{1}{N_e}. \quad (20.89)$$

Физический смысл логарифмического декремента λ – величина, обратная числу колебаний, в течение которых амплитуда убывает в e раз:

$$N_e = \frac{\tau_e}{T'}. \quad (20.90)$$

Добротность Q

Добротность определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e = \frac{\omega'}{2\beta}. \quad (20.91)$$

При *слабом* затухании:

а) для пружинного маятника

$$Q = \frac{f_{\text{унр}}^{\max}}{f_{\text{тр}}^{\max}} = \frac{kA}{r v_m} = \frac{\omega_0}{2\beta}; \quad (20.92)$$

б) для электрического колебательного контура

$$Q = \frac{u_C^{\max}}{u_R^{\max}} = \frac{q_m / C}{i_m R} = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (20.93)$$

При *слабом* затухании добротность можно представить как

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{(-\Delta E)}, \quad (20.94)$$

где E_0 – запасенная энергия;

ΔE – потери энергии за один период.

20.8. Вынужденные колебания

Вынужденными колебаниями называются колебания, происходящие под действием внешней переменной (периодической) силы, работа которой компенсирует потери энергии на преодоление трения (в механических колебательных системах) и на преодоление электрического сопротивления (в электрических колебательных системах).

20.8.1. Пружинный маятник

В соответствии со *вторым законом Ньютона*

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = m\vec{a},$$

$$\vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F} = m\vec{a}, \quad (20.95)$$

где

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t \quad (20.96)$$

– внешняя периодическая сила, действующая на пружинный маятник.

В скалярном виде:

$$-kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}. \quad (20.97)$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний пружинного маятника

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

можно представить в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (20.98)$$

где

$$f_0 = \frac{F_0}{m} \quad (20.99)$$

– приведенная сила.

20.8.2. Электрический колебательный контур

В соответствии со вторым законом Кирхгофа

$$\sum_{i=1}^N u_i = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j, \quad (20.100)$$

$$u_C + u_R = \varepsilon_{\text{самоинд}} + \varepsilon_0 \cos \omega t, \quad (20.101)$$

где $u_C = \frac{q}{C}$ – падение напряжения на конденсаторе;

$u_R = iR = \dot{q}R$ – падение напряжения на активном сопротивлении;

$\varepsilon_{\text{самоинд}}$ – ЭДС самоиндукции, равная

$$\varepsilon_{\text{самоинд}} = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2} = -L\ddot{q}; \quad (20.102)$$

$\varepsilon_0 \cos \omega t$ – внешняя ЭДС.

Тогда

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega t. \quad (20.103)$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в электрическом контуре:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t$$

можно представить в виде

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t. \quad (20.104)$$

20.8.3. Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний (на примере пружинного маятника)

В колебательной системе одновременно происходят два процесса:

- 1) затухающие колебания $x_1(t)$;
- 2) незатухающие вынужденные колебания $x_2(t)$ с частотой вынуждающей силы.

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний (20.98) представим в виде суммы двух решений:

$$x = x_1 + x_2.$$

1. *Общее решение однородного уравнения затухающих колебаний:*

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi'), \quad (20.105)$$

где ω' – циклическая частота затухающих колебаний, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

2. *Частное решение неоднородного уравнения вынужденных колебаний:*

$$x_2(t) = A(\omega) \cos[\omega t - \psi(\omega)], \quad (20.106)$$

где $\psi(\omega)$ – начальная фаза вынужденных колебаний.

Подставим x_2 в исходное дифференциальное уравнение и получим

$$-A\omega^2 \cos(\omega t - \psi) - 2\beta A\omega \sin(\omega t - \psi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \psi) = f_0 \cos \omega t. \quad (20.107)$$

Для использования *метода векторной диаграммы* представим это уравнение в виде

$$A\omega^2 \cos(\omega t - \psi + \pi) + 2\beta A\omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \psi) = f_0 \cos \omega t. \quad (20.108)$$

Из этого уравнения следует, что постоянные A и ω должны иметь такие значения, чтобы гармоническая функция $f_0 \cos \omega t$ была равна сумме трех гармонических функций, стоящих в левой части этого уравнения.

Представим (рис. 20.21, а, б):

– функцию $f_0 \cos \omega t$ вектором \vec{f}_0 ;

– функцию $\omega_0^2 A \cos(\omega t - \psi)$ вектором $\omega_0^2 \vec{A}$, повернутым относительно вектора \vec{f}_0 на угол $(-\psi)$;

– функцию $2\beta A\omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right)$ вектором $2\beta\omega \vec{A}$, повернутым

на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно вектора $\omega_0^2 \vec{A}$;

– функцию $A\omega^2 \cos(\omega t - \psi + \pi)$ вектором $\omega^2 \vec{A}$, повернутым относительно вектора $\omega_0^2 \vec{A}$ на угол π .

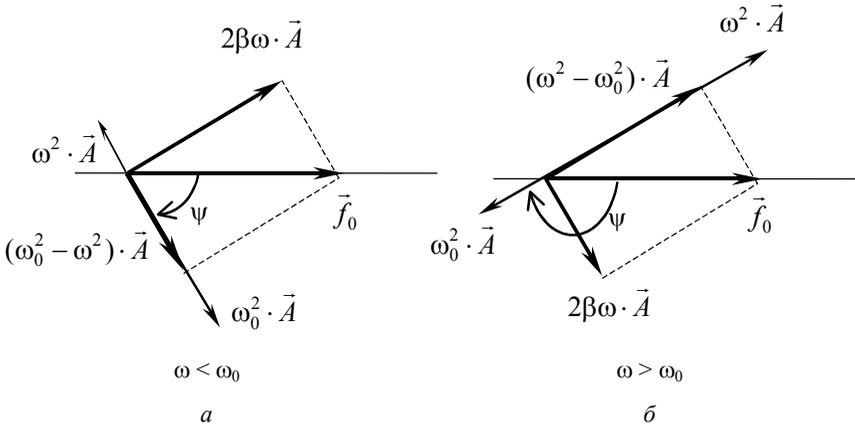


Рис. 20.21. Векторные диаграммы для решения дифференциального уравнения вынужденных колебаний

Чтобы рассматриваемое уравнение было удовлетворено, должно выполняться следующее векторное равенство

$$\omega^2 \vec{A} + 2\beta\omega \vec{A} + \omega_0^2 \vec{A} = \vec{f}_0. \quad (20.109)$$

Векторные диаграммы, соответствующие случаям $\omega < \omega_0$ и $\omega > \omega_0$, представлены на рис. 20.21, а, б.

Из этих диаграмм следует, что уравнение справедливо, если

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg}\psi(\omega) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{при } \omega < \omega_0 \quad (20.110)$$

и

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg}\psi(\omega) = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{при } \omega > \omega_0. \quad (20.111)$$

Резонансом называют явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при стремлении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний ($\omega \rightarrow \omega_0$).

При $\omega \rightarrow \omega_0 \operatorname{tg} \psi \rightarrow \infty$ и начальная фаза ψ стремится к $\frac{\pi}{2}$, т.е. вектор внешней силы становится параллельным вектору скорости маятника.

$A = A(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (резонансная кривая) представлена на рис. 20.22.

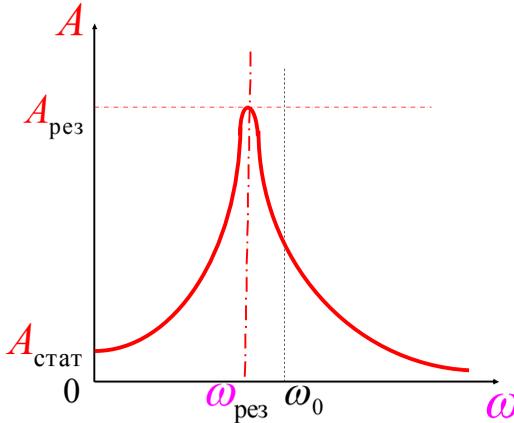


Рис. 20.22. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний: $A_{\text{рез}}$ – резонансная амплитуда, $A_{\text{стат}}$ – статическая амплитуда

Функция $A(\omega)$ достигает экстремума при частоте вынуждающей силы ω , равной

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (20.112)$$

где $\omega_{\text{рез}}$ – резонансная частота.

Если $\omega \rightarrow 0$, то

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{m k/m} = \frac{F_0}{k} = A_{\text{стат}}, \quad (20.113)$$

где $A_{\text{стат}}$ – статическая амплитуда.

При $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда вынужденных колебаний $A \rightarrow 0$.

При достижении резонансной частоты $\omega \rightarrow \omega_{\text{рез}}$ амплитуда стремится к резонансной величине

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (20.114)$$

где $A_{\text{рез}}$ – резонансная амплитуда.

Семейство резонансных кривых при различных коэффициентах затухания представлено на рис. 20.23.

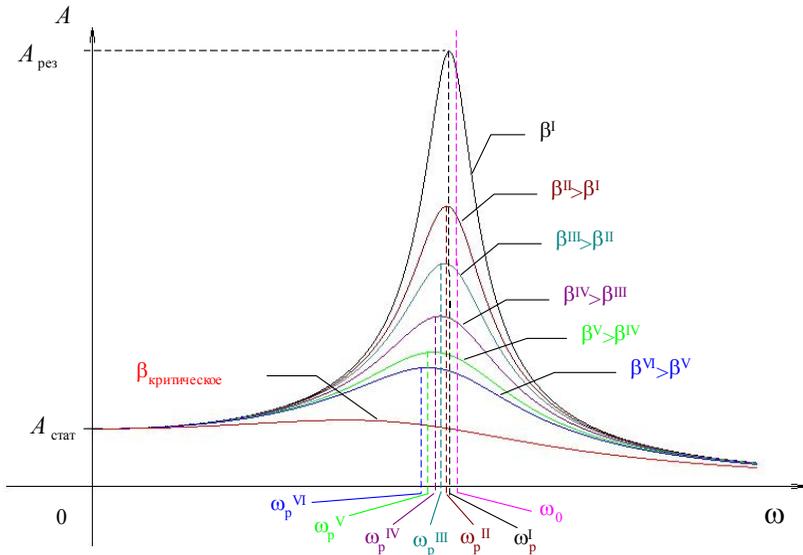


Рис. 20.23. Амплитудно-частотные характеристики при различных коэффициентах затухания

При *критическом* затухании

$$\beta = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \beta_{\text{крит}} \quad (20.115)$$

резонанс не наступает – резонансная частота $\omega_{\text{рез}}$ стремится к нулю.

Добротность колебательной системы, находящейся в режиме вынужденных колебаний, можно найти как

$$Q = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\Delta\omega_{0,7}}, \quad (20.116)$$

где $\Delta\omega_{0,7}$ – ширина резонансной кривой (рис. 20.24) на уровне половинной мощности внешнего источника вынуждающей силы

$$\frac{A_{\text{рез}}}{\sqrt{2}} \approx 0,7 A_{\text{рез}}.$$

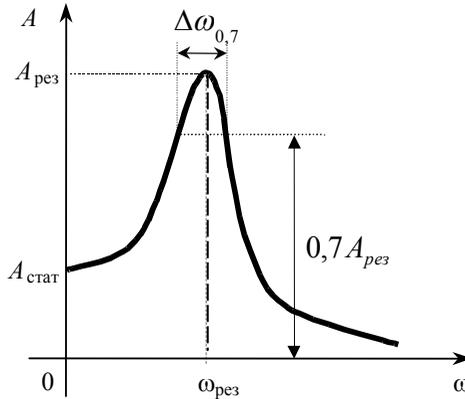


Рис. 20.24. Определение величины добротности

Добротность можно представить и как отношение резонансной амплитуды к статической, т.е. как *коэффициент усиления*:

$$Q = \frac{A_{\text{рез}}}{A_{\text{стат}}}. \quad (20.117)$$

При *слабом затухании* добротность равна

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (20.118)$$

20.8.4. Процесс установления вынужденных незатухающих колебаний

Процесс установления вынужденных незатухающих колебаний можно представить как процесс сложения двух колебаний:

1) затухающих колебаний (рис. 20.25)

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi);$$

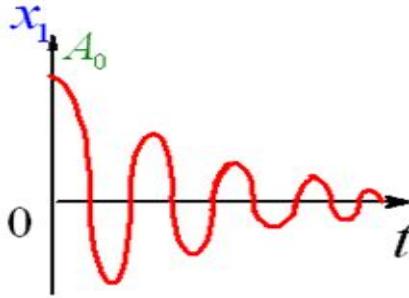


Рис. 20.25. Затухающие колебания

2) вынужденных колебаний (рис. 20.26)

$$x_2(t) = A \cos(\omega t - \psi),$$

где $\psi = \pi - \varphi$ – начальная фаза;

ω – частота вынуждающей силы.

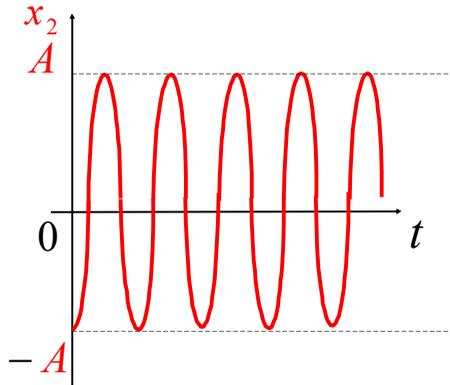


Рис. 20.26. Вынужденные колебания

Суммирование двух процессов

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

для случая $A = A_0$ и приводит к процессу установления незатухающих вынужденных колебаний (рис. 20.27).

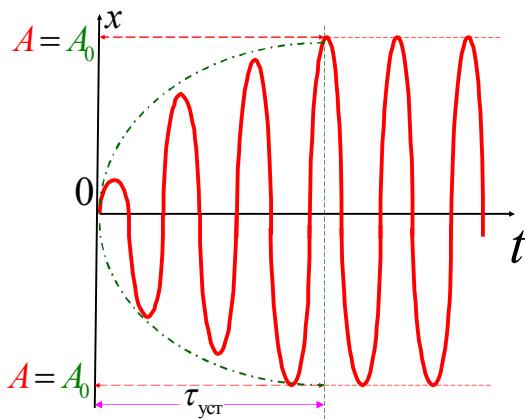


Рис. 20.27. Процесс установления незатухающих вынужденных колебаний

Вынужденные колебания считают установившимися, если

$$\frac{A_0}{A_0 \exp(-\beta \tau_{\text{уст}})} = 100. \quad (20.119)$$

Тогда *время установления* незатухающих вынужденных колебаний равно

$$\tau_{\text{уст}} = \frac{4,6}{\beta}, \quad (20.120)$$

т.е. чем больше затухание в системе, тем быстрее устанавливаются незатухающие вынужденные колебания.

Контрольные вопросы

1. Какое колебание называется гармоническим?
2. Чем определяется вид траектории частицы, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях одинаковой частоты?
3. В каких волновых явлениях используется сложение колебаний одинакового направления?
4. В чем заключается наглядный физический смысл коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания?

5. Что такое аperiодический процесс в затухающих колебаниях?
6. Почему затухающие колебания называются квазипериодическими?
7. Чем определяется резонансная частота колебательной системы?
8. Что является источником возрастания амплитуды при резонансе?

Примеры решения задач

Пример 20.1. Точка совершает колебания по закону $x(t) = A \sin \omega_0 t$. В некоторый момент времени смещение точки оказалось равным $x_1 = 5$ см. Когда же фаза колебаний Φ увеличилась вдвое, смещение стало равным $x_2 = 8$ см. Определите амплитуду колебаний A .

Решение

$$\begin{cases} x_1 = A \sin \Phi_1, \\ x_2 = A \sin \Phi_2. \end{cases} \quad (20.121)$$

По условию задачи $\Phi_2 = 2\Phi_1$. Следовательно

$$\sin \Phi_2 = \sin(2\Phi_1) = 2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_1.$$

Тогда систему уравнений (20.121) перепишем так:

$$\begin{cases} x_1 = A \sin \Phi_1, \\ x_2 = 2A \sin \Phi_1 \cos \Phi_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = A \sin \Phi_1, \\ x_2 = 2x_1 \cos \Phi_1. \end{cases} \quad (20.122)$$

Выразим из системы уравнений (20.122)

$$\begin{cases} \sin \Phi_1 = \frac{x_1}{A}, \\ \cos \Phi_2 = \frac{x_2}{2x_1}. \end{cases} \quad (20.123)$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 \Phi_1 + \cos^2 \Phi_1 = 1. \quad (20.124)$$

Подставим (20.123) в (20.124). Получим:

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{4x_1^2} = 1.$$

Отсюда выразим амплитуду колебаний:

$$A = \frac{2x_1^2}{\sqrt{4x_1^2 - x_2^2}}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$A = \frac{2 \cdot (0,05)^2}{\sqrt{4(0,05)^2 - (0,08)^2}} = 0,0833 \text{ м.}$$

Пример 20.2. Диск радиусом $R = 0,24$ м колеблется около горизонтальной оси Z , проходящей через середину (точка O) одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска (рис. 20.28). Определите приведенную длину $\ell_{\text{привед}}$ и период колебаний T_0 такого маятника.

Решение

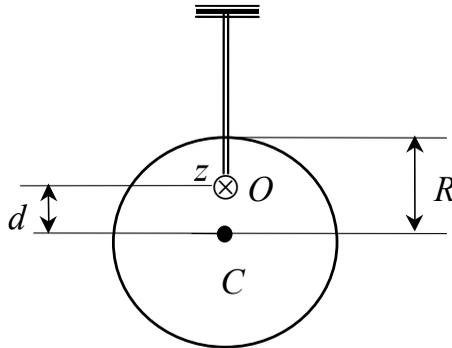


Рис. 20.28

Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{I}}{mgd}}, \quad (20.125)$$

где \mathfrak{I} – момент инерции диска относительно оси Z , проходящей через точку O ;

m – масса диска;

g – ускорение свободного падения;

d – длина физического маятника, т.е. расстояние от точки подвеса (точка O) до центра инерции (точка C).

Момент инерции \mathfrak{I} относительно оси Z , проходящей через точку подвеса диска, определяем по теореме Штейнера:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_C + md^2, \quad (20.126)$$

где $\mathfrak{I}_C = \frac{1}{2}mR^2$ – момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр инерции;

$$d = \frac{R}{2}.$$

Подставим эти значения в формулу (20.126) и получим

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2.$$

Тогда, в соответствии с (20.125), период колебаний физического маятника будет равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{4}mR^2}{mg\left(\frac{R}{2}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}. \quad (20.127)$$

Поскольку приведенная длина физического маятника есть длина такого математического маятника, который колеблется синхронно с данным физическим, то воспользуемся формулой периода колебаний математического маятника

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_{\text{привед}}}{g}}.$$

Отсюда с учетом (20.127)

$$\ell_{\text{привед}} = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = \frac{3}{2}R. \quad (20.128)$$

Подставим числовые значения в (20.127) и (20.128) и выполним вычисления:

$$T_0 = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{3 \cdot 0,24}{2 \cdot 9,81}} = 1,20 \text{ с};$$

$$\ell_{\text{привед}} = \frac{3}{2} \cdot 0,24 = 0,36 \text{ м.}$$

Пример 20.3. К пружине подвешен груз. Зная, что максимальная кинетическая энергия гармонических колебаний груза равна $K_m = 1$ Дж, найдите жесткость пружины k . Амплитуда колебаний равна $A = 0,05$ м.

Решение

Груз на пружине (пружинный маятник) совершает гармонические колебания по закону

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Скорость колебаний маятника выражается уравнением

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где

$$A\omega_0 = v_{\text{max}}, \quad (20.129)$$

здесь v_{max} – амплитуда скорости.

Поэтому с учетом (20.129) максимальная кинетическая энергия пружинного маятника равна

$$K_m = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (20.130)$$

Подставим квадрат собственной частоты колебаний пружинного маятника

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

в (20.130) и получим, что максимальная кинетическая энергия равна

$$K_m = \frac{kA^2}{2}.$$

Отсюда может быть найдена жесткость пружины:

$$k = \frac{2K_m}{A^2}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$k = \frac{2 \cdot 1}{0,05^2} = 800 \text{ Н/м.}$$

Эту задачу можно решить другим способом. В соответствии с законом сохранения энергии

$$K_m = U_m$$

или

$$K_m = \frac{kA^2}{2}.$$

Отсюда можно найти жесткость пружины k .

Пример 20.4. Катушка (длина $\ell = 50$ см, площадь поперечного сечения $S_{\text{катушки}} = 3$ см², число витков $N = 1000$, без сердечника) и плоский воздушный конденсатор (площадь каждой пластины $S_{\text{пластины}} = 75$ см², расстояние между пластинами $d = 5$ мм, диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$) образуют электрический колебательный контур. Определите T_0 – период гармонических колебаний в этом контуре.

Решение

Период гармонических колебаний в электрическом колебательном контуре определяется по формуле Томсона:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (20.131)$$

где L – индуктивность катушки;

C – емкость конденсатора.

Индуктивность катушки находится по формуле

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S_{\text{катушки}}}{\ell}, \quad (20.132)$$

где μ – магнитная проницаемость сердечника катушки (здесь $\mu = 1$).

Емкость конденсатора находится по формуле

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S_{\text{пластины}}}{d}. \quad (20.133)$$

Тогда, подставив формулы (20.132) и (20.133) в формулу (20.131), получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_0 \mu N^2 S_{\text{катушки}} \varepsilon_0 \varepsilon S_{\text{пластины}}}{\ell d}}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1000^2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}}{0,005 \cdot 0,5}} = \\ &= 6,28 \cdot 10^{-7} \text{ с.} \end{aligned}$$

Пример 20.5. Ток в колебательном контуре изменяется по закону $i(t) = -0,02 \sin 400\pi t$, А. Индуктивность контура $L = 1$ Гн. Найдите максимальную энергию электрического поля в конденсаторе W_3^m .

Решение

Энергию электрического поля в конденсаторе найдем по формуле

$$W_3 = \frac{q^2}{2C}. \quad (20.134)$$

Так как заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (20.135)$$

то формула (20.134) с учетом (20.135) примет вид

$$W_3 = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (20.136)$$

Поскольку ток в контуре изменяется по закону

$$i(t) = \dot{q}(t) = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = -i_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (20.137)$$

то максимальный заряд на обкладках конденсатора согласно (20.137) будет равен

$$q_m = \frac{i_m}{\omega_0}. \quad (20.138)$$

Для определения емкости конденсатора воспользуемся формулой собственной частоты колебаний в электрическом колебательном контуре

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L}. \quad (20.139)$$

Таким образом, подставив (20.138) и (20.139) в (20.136), получим, что энергия электрического поля в конденсаторе равна

$$W_{\mathcal{E}} = \frac{Li_m^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Отсюда максимальная энергия электрического поля

$$W_{\mathcal{E}}^m = \frac{Li_m^2}{2}. \quad (20.140)$$

Так как $i_m = 0,02$ А, то подставив в (20.140) числовые значения получим:

$$W_{\mathcal{E}}^m = \frac{1 \cdot 0,02^2}{2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Эту же задачу можно решить и другим способом. В соответствии с законом сохранения энергии, максимальная энергия электрического поля в конденсаторе равна максимальной энергии магнитного поля в катушке:

$$W_{\mathcal{E}}^m = W_M^m.$$

Поскольку

$$W_M^m = \frac{1}{2} Li_m^2,$$

то

$$W_{\mathcal{E}}^m = \frac{1}{2} Li_m^2.$$

Пример 20.6. Электрический колебательный контур (рис. 20.17) состоит из конденсатора емкостью $C = 7$ мкФ, катушки индуктивностью $L = 0,23$ Гн и сопротивления $R = 40$ Ом. Максимальный заряд на

обкладках конденсатора равен $q_m = 5,6 \cdot 10^{-4}$ Кл. Начальная фаза равна нулю. Выведите закон изменения тока в контуре $i = i(t)$.

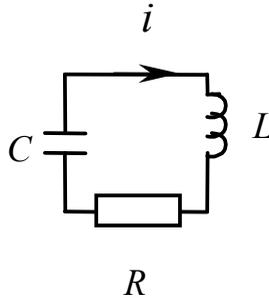


Рис. 20.17

Решение

Ток в цепи контура может быть найден по формуле

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{20.141}$$

Так как сопротивление контура не равно нулю, то колебания будут затухающими. А это означает, что закон изменения заряда на обкладках конденсатора имеет вид

$$q(t) = q_m e^{-\beta t} \cos \omega' t, \tag{20.142}$$

где β – коэффициент затухания;

ω' – циклическая частота затухающих колебаний.

Эти величины выражаются через параметры колебательной системы по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \beta &= \frac{R}{2L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{20.143}$$

Подставим (20.143) в (20.142) и продифференцируем:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= -\beta q_m e^{-\beta t} \cos \omega' t - q_m \omega' e^{-\beta t} \sin \omega' t = \\
 &= q_m e^{-\beta t} (\beta \cos \omega' t + \omega' \sin \omega' t).
 \end{aligned}
 \tag{20.144}$$

Подставим числовые значения в (20.143) и выполним вычисления:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{0,23 \cdot 7 \cdot 10^{-6}} - \frac{40^2}{4 \cdot 0,23^2}} = 783 = 249\pi \text{ с}^{-1};$$

$$\beta = \frac{40}{2 \cdot 0,23} = 87 \text{ с}^{-1}.$$

Результаты подставим в (20.144) и получим закон изменения тока:

$$i(t) = -5,6 \cdot 10^{-4} e^{-87t} [87 \cos(249\pi t) + 783 \sin(249\pi t)] \text{ (A)}.$$

Пример 20.7. Пружинный маятник массой $m = 5$ г совершает затухающие колебания. В течение $t = 50$ с тело потеряло 60 % своей энергии. Определите коэффициент сопротивления среды r .

Решение

В соответствии с условием задачи, к моменту времени t энергия маятника

$$W = 0,4W_0, \tag{20.145}$$

где W_0 – энергия в начальный момент времени.

Как известно, полная энергия колебаний маятника пропорциональна квадрату амплитуды:

$$W = \frac{kA^2}{2}, \tag{20.146}$$

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \tag{20.147}$$

Подставив (20.147) в (20.146), получим закон изменения полной энергии затухающих колебаний:

$$W(t) = \frac{kA_0^2}{2} e^{-2\beta t} = W_0 e^{-2\beta t}. \tag{20.148}$$

Сравнивая формулы (20.145) и (20.148), находим, что

$$e^{-2\beta t} = 0,4.$$

Отсюда

$$\beta = \frac{\ln 2,5}{2t}. \quad (20.149)$$

С другой стороны

$$\beta = \frac{r}{2m} \Rightarrow r = 2m\beta. \quad (20.150)$$

Подставив (20.149) в (20.150), получим

$$r = \frac{m \ln 2,5}{t}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$r = \frac{0,005 \cdot \ln 2,5}{50} = 9,16 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с}.$$

Пример 20.8. При неизменной амплитуде вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний оказывается одинаковой для частот $\omega_1 = 100 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_2 = 300 \text{ с}^{-1}$ (рис. 20.30). Определите резонансную частоту. Затуханием следует пренебречь.

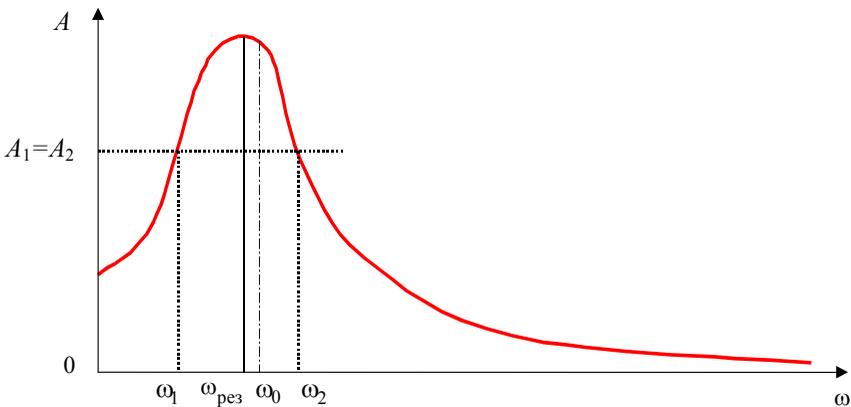


Рис. 20.30

Решение

Амплитуда вынужденных колебаний при частоте $\omega_1 < \omega_0$ равна

$$A_1 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}}. \quad (20.151)$$

Амплитуда вынужденных колебаний при частоте $\omega_2 > \omega_0$ равна

$$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_2^2}}. \quad (20.152)$$

При малом затухании ($\beta \rightarrow 0$) формулы (20.151) и (20.152) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2}, \\ A_2 &= \frac{f_0}{\omega_2^2 - \omega_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (20.153)$$

В соответствии с условием задачи

$$A_1 = A_2. \quad (20.154)$$

Тогда из (20.153) и (20.154) следует, что

$$\omega_2^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 - \omega_1^2. \quad (20.155)$$

Из равенства (20.155) найдем собственную частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{100^2 + 300^2}{2}} = 224 \text{ с}^{-1}.$$

Резонансная частота равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

При малом затухании резонансная частота практически совпадает с собственной частотой, т.е.

$$\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 = 224 \text{ с}^{-1}.$$

Глава 21. ВОЛНЫ

21.1. Общие понятия. Уравнения волновых процессов

Волна – периодическое (в пространстве и во времени) изменение (возмущение) состояния вещества или поля, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью, то есть волна – это процесс распространения колебаний в пространстве.

Волновое движение есть альтернатива корпускулярному движению. Основное понятие корпускулярного движения – траектория. Основное понятие волнового движения – фронт волны.

Фронт волны – волновая поверхность, отделяющая возмущенную область пространства от невозмущенной. В однородном и изотропном пространстве форма фронта определяется формой источника (рис. 21.1).

Примеры:

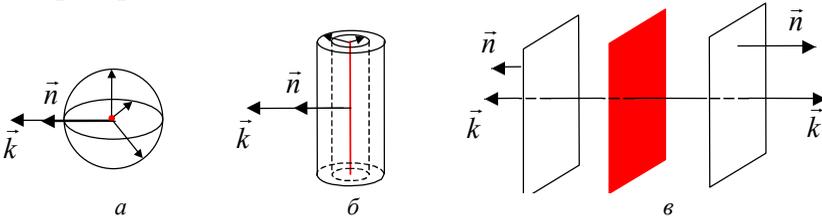


Рис. 21.1. Фронт волны при различных формах источника волны: а – точечный источник; б – линейный источник; в – плоский источник: $\vec{k} = k\vec{n}$ – волновой вектор, где $k = |\vec{k}|$ – волновое число

Дифференциальное волновое уравнение в общем виде

$$\Delta\Psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}, \quad (21.1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

u – фазовая скорость, т.е. скорость распространения фронта волны; Ψ – волновая функция, т.е. физическая величина, которая характеризует состояние поля или вещества.

Для гравитационной волны Ψ – напряженность гравитационного поля¹ \vec{G} .

Для электромагнитной волны Ψ – напряженность электрического поля \vec{E} и индукция магнитного поля \vec{B} .

Для упругой волны Ψ – смещение \vec{S} частицы из положения равновесия.

Решение волнового дифференциального уравнения для плоской волны

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad (21.2)$$

где A – амплитуда волны;

\vec{k} – волновой вектор;

\vec{r} – радиус-вектор точки в пространстве, в которой рассматривается состояние поля или вещества;

Φ – фаза волны, $\Phi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$.

Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси X :

$$\Psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (21.3)$$

Где k – модуль волнового вектора (волновое число), $k = |\vec{k}| \text{ м}^{-1}$.

21.1.1. Временная периодичность волны

Если в моменты времени 1 и 2 (рис. 21.2) происходят колебания в фазе, т.е.

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t = \pm 2\pi,$$

то

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} = T, \quad (21.4)$$

где T – период волны.

¹ Гравитационные волны есть слабое нестационарное гравитационное поле в вакууме. Гравитационные волны – поперечные и распространяются со скоростью света.

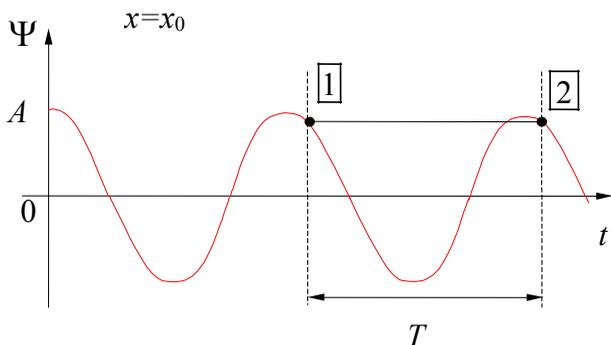


Рис. 21.2. Временной период волны

21.1.2. Пространственная периодичность волны

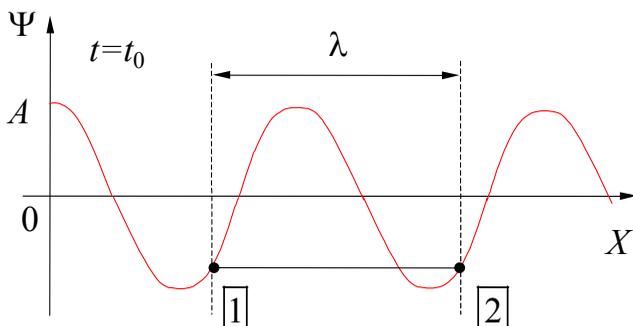


Рис. 21.3. Пространственный период – длина волны

Если в точках 1 и 2 (рис. 21.3) колебания происходят в фазе, т.е.

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = k(x_2 - x_1) = k\Delta x = \pm 2\pi,$$

то

$$\Delta x = \frac{2\pi}{k} = \lambda, \quad (21.5)$$

где λ – длина волны.

Взаимосвязь периодов волны

$$\lambda = uT. \quad (21.6)$$

21.2. Упругие волны

Упругие волны – процесс распространения упругой деформации в веществе, например, распространение звука.

Дифференциальное волновое уравнение упругой волны:

$$\Delta \vec{S} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial t^2}. \quad (21.7)$$

Условие испускания упругой волны: отличное от нуля ускорение частиц вещества $\ddot{\vec{S}} \neq 0$.

Уравнение упругой плоской волны:

$$S = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad (21.8)$$

где S – смещение частицы вещества из положения равновесия.

21.2.1. Виды упругих волн

1. Поперечная упругая волна – распространение упругой деформации формы (сдвиг, изгиб, кручение) в твердых телах.

2. Продольная упругая волна – распространение упругой деформации объема (растяжение, сжатие) в твердых, жидких и газообразных веществах.

В однородной и изотропной среде волна распространяется вдоль линии действия внешней силы:

$$\vec{k} \parallel \vec{F}.$$

Понятия «продольность» и «поперечность» относятся к направлению смещения частиц \vec{S} по отношению к направлению волнового вектора \vec{k} . На рис. 21.4 показаны две поперечные волны и одна продольная волна, распространяющиеся в однородном и изотропном твердом теле:

продольная волна – $\vec{S}_{\parallel} \parallel \vec{k}$,

поперечные волны – $\left. \begin{array}{l} \vec{S}_{\perp}^* \\ \vec{S}_{\perp}^{**} \end{array} \right\} \perp \vec{k}$.

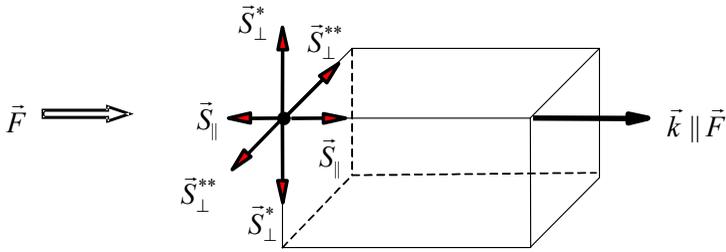


Рис. 21.4. Распространение упругих волн в однородном и изотропном твердом теле

Скорость упругой волны (фазовая скорость)

$$u = \sqrt{\frac{M}{\rho}}, \quad (21.9)$$

где ρ – плотность вещества;

M – модуль упругости.

1. В твердых телах:

- При распространении *поперечных* упругих волн модуль M – это *модуль сдвига* G , который характеризует упругость *формы*.
- При распространении *продольных* упругих волн модуль M – это *модуль нормальной упругости Юнга* E , который характеризует упругость *объема*.

2. В жидкостях:

При распространении продольных упругих волн модуль M – это *модуль объемной упругости* K . Модуль $K = \frac{1}{B}$, где B – *модуль всестороннего сжатия* жидкости.

3. В газах:

• При *изотермическом* процессе распространения упругих продольных волн (при низких частотах) модуль M – это *давление* газа P . Поэтому скорость волны

$$u = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \quad (21.10)$$

где R – универсальная газовая постоянная;

μ – молярная масса;

T – абсолютная температура.

- При *адиабатическом* процессе распространения упругих продольных волн (при высоких частотах) модуль M – это произведение коэффициента Пуассона γ на давление газа. Поэтому скорость волны:

$$u = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}. \quad (21.11)$$

Коэффициент Пуассона (или показатель степени адиабаты) равен:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}, \quad (21.12)$$

где C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении;
 C_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме;
 i – число степеней свободы молекулы.

В трехмерном пространстве (рис. 21.5):

- а) у *одноатомной молекулы* три степени свободы в поступательном движении ($i = 3$);
- б) у *двухатомной жесткой молекулы* три степени свободы в поступательном движении и две – во вращательном ($i = 5$);
- в) у *трехатомной жесткой молекулы* три степени свободы в поступательном движении и три – во вращательном ($i = 6$).

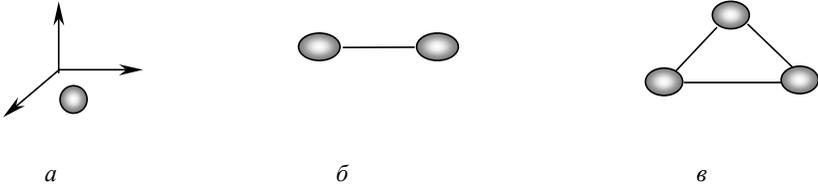


Рис. 21.5. Модели молекул: а – одноатомная; б – двухатомная жесткая; в – трехатомная жесткая

21.2.2. Энергетика упругой волны

Рассмотрим плоскую продольную волну в твердом теле:

$$S = A \cos(\omega t - kx). \quad (21.13)$$

Полная энергия волны складывается из потенциальной и кинетической энергии:

$$W = U + K.$$

Потенциальная энергия:

$$U = \frac{\varepsilon^2 E}{2} V, \quad (21.14)$$

где ε – относительная деформация упругой среды,

$$\varepsilon = \frac{\partial S}{\partial x} = Ak \sin(\omega t - kx). \quad (21.15)$$

Кинетическая энергия:

$$K = \frac{m v_S^2}{2}, \quad (21.16)$$

где $m = \rho V$ – масса вещества в объеме V ;

v_S – скорость колебаний частиц в упругой среде

$$v_S = \frac{\partial S}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx).$$

Объемная плотность энергии:

$$w = w_{\text{п}} + w_{\text{к}} = \frac{U}{V} + \frac{K}{V} = \frac{\varepsilon^2 E}{2} + \frac{\rho v_S^2}{2}. \quad (21.17)$$

Объемная плотность потенциальной энергии:

$$w_{\text{п}} = \frac{\varepsilon^2 E}{2} = \frac{1}{2} A^2 k^2 E \sin^2(\omega t - kx). \quad (21.18)$$

Объемная плотность кинетической энергии:

$$w_{\text{к}} = \rho \frac{v_S^2}{2} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (21.19)$$

В соответствии с законом сохранения энергии амплитудные значения потенциальной и кинетической энергий равны между собой:

$$U_m = K_m.$$

С учетом формул

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{и} \quad k = \frac{\omega}{u}$$

получаем, что объемные плотности потенциальной и кинетической энергии тоже равны между собой:

$$w_{\text{п}} = w_{\text{к}} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (21.20)$$

Объемная плотность полной энергии равна

$$w = w_{\text{п}} + w_{\text{к}} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = w_m \sin^2(\omega t - kx). \quad (21.21)$$

Процесс распространения волны – это процесс переноса энергии (рис. 21.6).

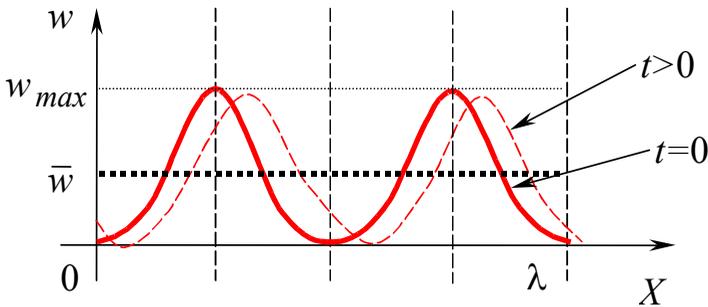


Рис. 21.6. Изменение объемной плотности энергии при распространении волны

Так как среднее значение

$$\overline{\sin^2(\omega t - kx)} = \frac{1}{2},$$

то средняя объемная плотность энергии:

$$\bar{w} = \frac{1}{2} w_m = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 = \text{const}. \quad (21.22)$$

Следовательно, среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной энергией \bar{w} .

Процесс переноса энергии характеризуется следующими величинами:

1. Поток энергии (мощность источника упругой волны)

$$\Phi = \frac{W}{t}, \quad (21.23)$$

где W – полная энергия, переносимая волной через поперечную площадку S_{\perp} за время t (рис. 21.7).

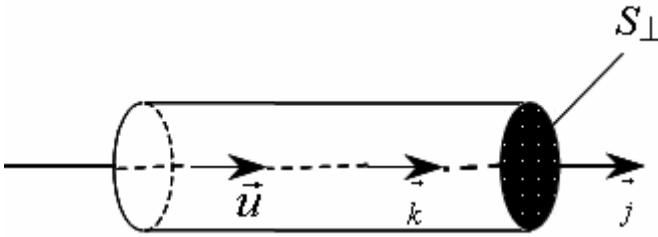


Рис. 21.7. Перенос энергии упругой волной: \vec{u} – фазовая скорость; \vec{k} – волновой вектор; \vec{j} – вектор плотности потока энергии (вектор Умова)

2. Плотность потока энергии:

$$j = \frac{\Phi}{S_{\perp}} = \frac{W}{S_{\perp}t} = \frac{wV}{S_{\perp}t} = \frac{w(S_{\perp}tu)}{S_{\perp}t} = wu, \quad (21.24)$$

где V – объем вещества, в котором распространяется волна со скоростью u , $V = S_{\perp}tu$.

Вектор плотности потока энергии – вектор Умова:

$$\vec{j} = w\vec{u}. \quad (21.25)$$

3. Интенсивность волны – модуль среднего значения вектора Умова:

$$I = |\vec{j}| = \bar{w}|\vec{u}| = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u. \quad (21.26)$$

21.2.3. Давление звука

Пусть в твердом теле распространяется продольная упругая волна в направлении волнового вектора \vec{k} с фазовой скоростью \vec{u} (рис. 21.8). Перенос энергии волной характеризуется вектором Пойнтинга \vec{j} .

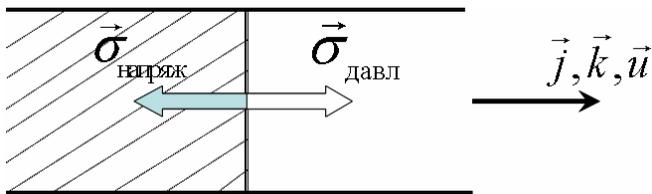


Рис. 21.8. Давление звука

Заштрихованная часть рисунка демонстрирует возмущенную область вещества, в которой под действием упругой волны возникло механическое напряжение, характеризуемое вектором $\vec{\sigma}_{\text{напряж}}$. По третьему закону Ньютона на невозмущенную область вещества будет оказываться давление

$$\vec{\sigma}_{\text{давл}} = -\vec{\sigma}_{\text{напряж}}. \quad (21.27)$$

В соответствии с законом Гука

$$\sigma_{\text{напряж}} = \varepsilon E = \frac{\partial S}{\partial x} E. \quad (21.28)$$

С учетом (21.15) величину механического напряжения можно записать в виде

$$\sigma_{\text{напряж}} = \varepsilon E = AEk \sin \Phi = A\omega \rho u \sin \Phi, \quad (21.29)$$

где учтено, что скорость продольной волны в твердом теле равна (с учетом (21.9))

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Но в соответствии с (21.17)

$$A\omega \sin \Phi = -v_S \quad (21.30)$$

Следовательно,

$$\sigma_{\text{напряж}} = -v_S \rho u, \quad (21.31)$$

а давление тогда будет равно

$$\sigma_{\text{давл}} = v_s \rho u. \quad (21.32)$$

В этой формуле – с одной стороны – произведение плотности вещества на фазовую скорость называют *акустическим или волновым сопротивлением* вещества:

$$Z = \rho u, \quad (21.33)$$

а с другой стороны – произведение плотности вещества на скорость колебания частиц вещества иногда называют *объемной плотностью импульса* g , переносимого волной

$$g = \rho v_s. \quad (21.34)$$

Таким образом, давление звука есть результат того, что упругая волна переносит не только энергию, но и импульс.

21.2.4. Шкала упругих волн

Упругие волны, распространяющиеся в среде и создающие в ней механические колебания, *в широком смысле* называются звуком. *В узком смысле* – звук это субъективное восприятие этих колебаний специальным органом чувств животных.

Как и любая волна, звук характеризуется амплитудой и частотой (табл. 21.1). Считается, что человек слышит звуки в диапазоне частот от 20 до 20 000 Гц. Среди слышимых звуков следует также особо выделить фонетические, речевые звуки и фонемы, из которых состоит устная речь, и музыкальные звуки, из которых состоит музыка.

Звук ниже диапазона слышимости человека называют инфразвуком, выше, до 2 ГГц – ультразвуком, от 2 ГГц – гиперзвуком.

Инфразвук, ультразвук и гиперзвук человеческим ухом не распространяются.

Таблица 21.1

Название диапазона	Частота, Гц
Инфразвук	< 20
Слышимый звук	20...2·10 ⁴
Ультразвук	2·10 ⁴ ...2·10 ⁹
Гиперзвук	2·10 ⁹ ...2·10 ²²

Техногенные источники инфразвука – мощное оборудование: станки, котельные, транспорт, подводные и подземные взрывы. Кро-

ме того, инфразвук излучают ветряные электростанции. *Естественные источники инфразвука* – землетрясения, бури и ураганы, волны цунами и проч. Практический интерес могут представлять колебания от десятых и даже сотых долей герц, т.е. с периодами в десяток секунд. Нижняя граница инфразвукового диапазона условно определена как 0,001 Гц.

Техногенные источники ультразвука. Частота сверхвысокочастотных ультразвуковых волн, применяемых в промышленности и биологии, лежит в диапазоне порядка нескольких мегагерц. Фокусировка таких пучков обычно осуществляется с помощью специальных звуковых линз и зеркал. Ультразвуковой пучок с необходимыми параметрами можно получить с помощью соответствующего преобразователя. Наиболее распространены керамические преобразователи из титаната бария. В тех случаях, когда основное значение имеет мощность ультразвукового пучка, обычно используются механические источники ультразвука. Первоначально все ультразвуковые волны получали механическим путем (камертоны, свистки, сирены). *Естественными источниками ультразвука* являются например, летучие мыши. Они способны компенсировать даже частотный сдвиг между испускаемыми и отраженными сигналами, обусловленный эффектом Доплера. Понижая во время полета эхолокационную частоту таким образом, чтобы частота отраженного ультразвука оставалась в области максимальной чувствительности их слуховых центров, они могут определить скорость собственного перемещения. У ночных бабочек из семейства медведиц развился генератор ультразвуковых помех, «сбивающий со следа» летучих мышей, преследующих этих насекомых. Источниками ультразвука являются также дельфины и киты.

Наивысшая частота *гиперзвука* в веществе не может превышать значений, при которых длина волны гиперзвука оказывается сравнимой с межатомными расстояниями, так как это исключает возможность распространения упругой волны.

21.2.5. Эффект Доплера в акустике

Эффект Доплера заключается в том, что при относительном движении источника и приемника в среде частота ν принимаемой упругой волны отличается от частоты ν_0 испускаемой упругой волны.

Поскольку упругие волны распространяются только в среде, внутри которой могут двигаться источник и приемник, рассматрива-

ют не только их относительное движение, но и их движение относительно среды.

1. Двигается источник, приемник покоится (рис.21. 9).

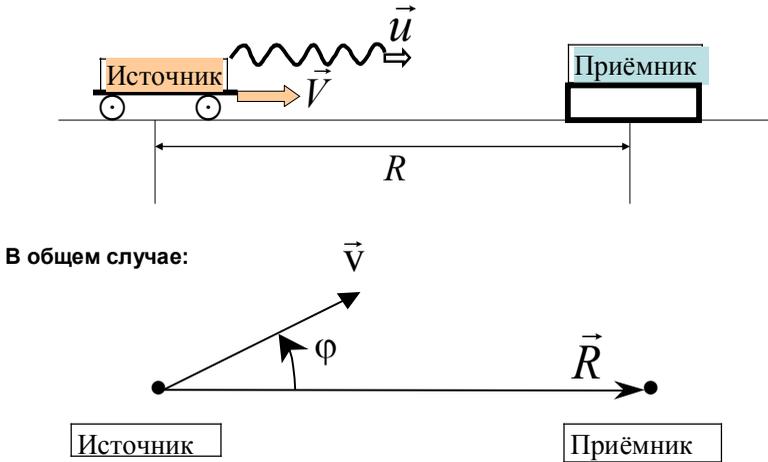


Рис.21.9. Эффект Доплера: источник движется.

В этой задаче

скорость волна/среда u

скорость волна/приёмник u'

скорость источник/среда V

Поскольку приёмник неподвижен, то

$$u = u'.$$

Обозначим:

t_1 - начало передачи сигнала

θ_1 - начало приёма сигнала

t_2 - конец передачи

θ_2 -конец приёма.

В таком случае

$$\theta_1 = t_1 + \frac{R}{u'} = t_1 + \frac{R}{u}$$

$$\theta_2 = t_2 + \frac{R \mp V \cdot \tau}{u}$$

где верхний знак « - » относится к случаю приближения источника к приёмнику, а нижний знак «+» - к случаю удаления.

Длительность процесса передачи сигнала будет равна

$$\tau = t_2 - t_1$$

Длительность процесса приёма сигнала будет равна

$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

Длительность процессов передачи и приёма связаны между собой соотношением

$$\theta = \tau \mp \frac{V}{u} \cdot \tau = \tau \cdot \left(1 \mp \frac{V}{u} \right)$$

Число переданных волн равно

$$N = \frac{\tau}{T_0} = \tau \cdot \nu_0$$

Число принятых волн равно

$$N = \frac{\theta}{T} = \theta \cdot \nu,$$

где T_0, ν_0, T и ν - есть период и частота переданных и принятых волн, соответственно.

Естественно полагать, что число переданных волн будет равно числу принятых волн:

Тогда частоты принятых и переданных волн будут связаны между собой *формулой эффекта Доплера*:

$$(21.36)$$

Частота волны, воспринимаемой приемником, будет равна

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 + \frac{v}{u}},$$

если источник удаляется от приемника, и

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{u}},$$

если источник приближается к приемнику.

Замечание 1. При движении источника с $v \ll u$ приведенные выше формулы можно разложить в ряд Тейлора и представить в виде

$$\nu \approx \nu_0 \left(1 \pm \frac{v}{u} + \frac{v^2}{u^2} \pm \dots \right), \quad (21.37)$$

где знак «+» соответствует случаю приближения источника к приемнику;

знак «-» – случаю удаления источника от приемника.

Замечание 2. Если φ – угол между вектором \vec{v} скорости движения источника и вектором \vec{R} (рис. 21.9), соединяющим источник с приемником волн, то

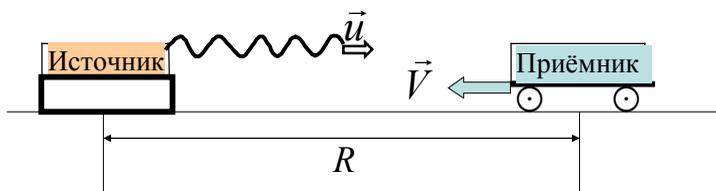
$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{u} \cos \varphi}. \quad (21.38)$$

При приближении источника к приёмнику $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и поэтому

$v > v_0$, а при удалении источника от приёмника $\varphi > \frac{\pi}{2}$ и поэтому $v < v_0$.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $v \equiv v_0$ – «поперечный» эффект Доплера в акустике (для звуковых волн) отсутствует.

2. Двигается приёмник, источник покоится (рис.21.10).



В общем случае:

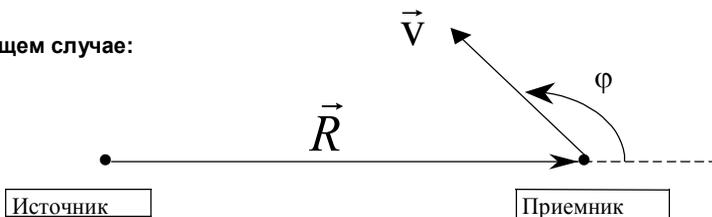


Рис.21.10.

В этой задаче

скорость волна/среда u

скорость волна/приёмник u'

скорость источник/среда V

Поскольку приёмник движется, то

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{V}.$$

При сближении приёмника и источника

$$u' = u + V,$$

а при удалении

$$u' = u - V$$

В этом случае

$$\theta_1 = t_1 + \frac{R}{u'} = t_1 + \frac{R}{u \pm V}$$

$$\theta_2 = t_2 + \frac{R \mp V \cdot \tau}{u \pm V},$$

где обозначения – те же, что и в предыдущей задаче.

В этих формулах верхние знаки относятся к случаю приближения источника к приёмнику, а нижние знаки - к случаю удаления.

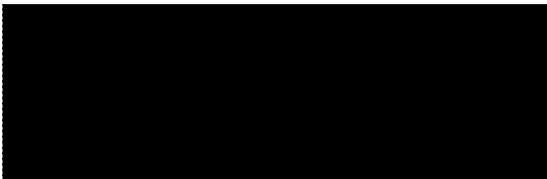
Длительность процессов передачи и приёма связаны между собой соотношением

$$\theta = \tau \mp \frac{V}{u \pm V} \cdot \tau = \tau \cdot \left(1 \mp \frac{V}{u \pm V} \right)$$

Как и в предыдущей задаче полагаем, что число переданных волн будет равно числу принятых волн:



Тогда частоты принятых и переданных волн будут связаны между собой *формулой эффекта Доплера*:



(21.39)

Частота волны, воспринимаемой приемником, будет равна

$$v = v_0 \left(1 - \frac{v}{u} \right),$$

если источник удаляется от приемника, и

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v}{u} \right),$$

если источник приближается к приемнику.

Замечание. Если φ – угол между вектором \vec{v} скорости движения приемника и вектором \vec{R} (рис. 21.10), соединяющим источник с приемником волн, то

$$v = v_0 \left(1 - \frac{v}{u} \cos \varphi \right). \quad (21.40)$$

При приближении приемника к источнику $\varphi > \frac{\pi}{2}$ и поэтому $v > v_0$, а при удалении приемника от источника $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и поэтому $v < v_0$.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $v \equiv v_0$ – «поперечный» эффект Доплера в акустике (для звуковых волн) отсутствует.

21.3. Электромагнитные волны

Электромагнитные волны (ЭМВ) – процесс распространения в пространстве электромагнитного поля, характеризующийся периодическим изменением и периодическим взаимопревращением компонент \vec{E} и \vec{B} электромагнитного поля.

Дифференциальные волновые уравнения электромагнитной волны:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \Delta \vec{B} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (21.41)$$

Условия испускания ЭМВ: вторые производные дипольных электрического и магнитного моментов по времени должны быть отличны от нуля:

$$\frac{d^2 \vec{P}_e}{dt^2} \neq 0 \text{ и } \frac{d^2 \vec{P}_m}{dt^2} \neq 0 .$$

Это реализовано, например,

1) в электрическом колебательном контуре, где благодаря гармоническому закону изменения величины заряда отлична от нуля вторая производная $\ddot{q} \neq 0$;

2) в атомах, когда по гармоническим законам меняются проекции координат x и y вращающихся электронов;

3) в круговых токах («магнитных диполях») при изменении по гармоническому закону величины тока.

Решения дифференциальных уравнений – уравнения ЭМВ:

$$\left. \begin{aligned} E &= E_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \\ B &= B_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \end{aligned} \right\} \quad (21.42)$$

Как видно из рис. 21.11, электромагнитная волна есть волна поперечная: векторы \vec{E} и \vec{B} ортогональны по отношению к волновому вектору \vec{k} и к вектору плотности потока энергии (вектору Пойнтинга) \vec{j} – см. (21.51).

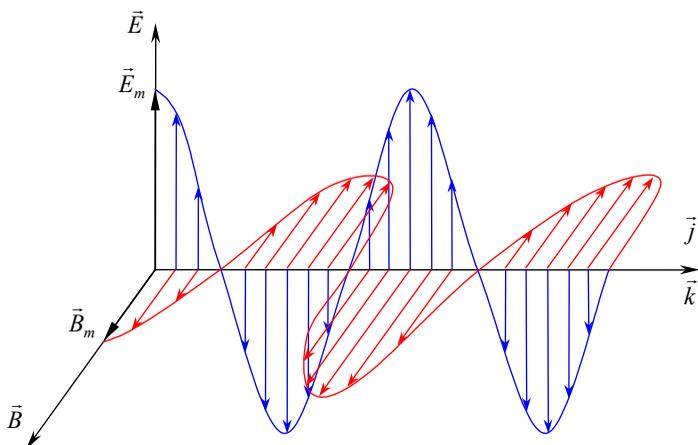


Рис. 21.11. Модель электромагнитной волны: \vec{k} – волновой вектор, \vec{j} – вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга)

21.3.1. Скорость электромагнитной волны

Скорость электромагнитной волны в общем случае равна

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \mu \epsilon}}. \quad (21.43)$$

В вакууме (а также в воздухе) диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно равны $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ и тогда

$$u = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (21.44)$$

В прозрачных диэлектриках $\mu = 1$ и тогда $u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$,

где $\sqrt{\epsilon} = n$ – показатель преломления;

c – скорость света (в вакууме).

21.3.2. Энергетика электромагнитной волны

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w_{ЭМ} = w_{Э} + w_{М} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu}, \quad (21.45)$$

где $w_{Э}$ – объемная плотность энергии электрического поля;
 $w_{М}$ – объемная плотность энергии магнитного поля.

Как видно из рис. 21.11, в данной точке пространства векторы \vec{E} и \vec{B} изменяются в одинаковых фазах, и поэтому в соответствии с требованием закона сохранения энергии равны максимальные (амплитудные) значения объемных плотностей энергии $w_{Э}^m$ и $w_{М}^m$:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_m^2 = \frac{1}{2} \frac{B_m^2}{\mu_0 \mu}. \quad (21.46)$$

Иначе говоря, в соответствии с (21.46) амплитудные значения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля связаны соотношениями

$$E_m = u B_m \quad (\text{в веществе}); \quad (21.47)$$

$$E_m = c B_m \quad (\text{в вакууме}). \quad (21.48)$$

Эти соотношения распространяются и на текущие (мгновенные) значения E и B .

Поэтому объемная плотность энергии

$$w = w_{Э} + w_{М} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_m^2 \cos^2(\omega t - kx) = w_m \cos^2(\omega t - kx). \quad (21.49)$$

Средняя объемная плотность энергии

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_m^2 = \frac{1}{2} w_m = \text{const}, \quad (21.50)$$

так как среднее значение $\cos^2(\omega t - kx)$ равно $\frac{1}{2}$.

Плотность потока энергии – вектор Пойнтинга:

$$\vec{j} = \varepsilon_0 c^2 [\vec{E}, \vec{B}]. \quad (21.51)$$

В вакууме $\varepsilon = 1$ и в соответствии с (21.51):

$$|\vec{j}| = \varepsilon_0 c^2 E \frac{E}{c} = \varepsilon_0 c E^2 = wc. \quad (21.52)$$

Вектор Пойнтинга

$$\vec{j} = w\vec{c} \quad (21.53)$$

аналогичен вектору Умова для упругих волн.

В прозрачном диэлектрике

$$|\vec{j}| = \varepsilon_0 c^2 E \frac{E}{u}, \quad (21.54)$$

здесь $u = \frac{c}{n}$, где n – показатель преломления.

Таким образом, в прозрачных диэлектриках

$$|\vec{j}| = \varepsilon_0 c^2 \frac{E^2}{c} \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon_0 c \sqrt{\varepsilon} E^2 = wc \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (21.55)$$

В векторной форме

$$\vec{j} = w\vec{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (21.56)$$

Интенсивность волны I – модуль усредненного за период значения вектора Пойнтинга.

$$I = |\overline{\vec{j}}| = \overline{wc} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (21.57)$$

21.3.3. Давление света

Давление электромагнитной волны (*давление света*) можно представить так же, как и давление упругой волны (*давление звука*):

$$\sigma = \frac{F}{S_{\perp}} = \frac{dp}{dt} \frac{1}{S_{\perp}} = g \frac{dV}{dt} \frac{1}{S_{\perp}} = gu, \quad (21.58)$$

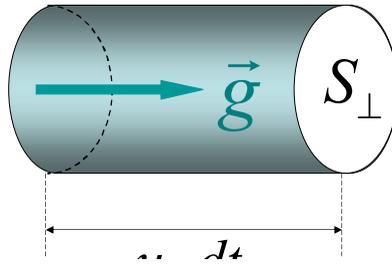


Рис. 21.12. Элементарный объем вещества

где элементарный объем вещества dV (рис. 21.12) можно представить как произведение $(udt)S_{\perp}$, произведение (udt) – расстояние, проходимое волной со скоростью u за время dt , а \vec{g} – *объемная плотность импульса*, переносимого электромагнитной волной:

$$\vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{E}\vec{B}]. \quad (21.59)$$

В прозрачном диэлектрике в соответствии с (21.55)

$$|\vec{g}| = \varepsilon_0 EB = \varepsilon_0 E \frac{E}{u} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c} \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = \frac{w_{\text{диэл}}}{c\sqrt{\varepsilon}}. \quad (21.60)$$

Следовательно, давление света в соответствии с (21.58) будет равно

$$\sigma = \frac{w_{\text{диэл}}}{c\sqrt{\varepsilon}} u = \frac{w_{\text{диэл}}}{\varepsilon}. \quad (21.61)$$

В вакууме в соответствии с (21.52) объемная плотность импульса, переносимого светом:

$$|\vec{g}| = \varepsilon_0 EB = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}, \quad (21.62)$$

а давление света будет равно

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c} c = w_{\text{вак}}. \quad (21.63)$$

Если электромагнитная волна в вакууме падает под углом φ к нормали к поверхности (рис. 21.13), а сама поверхность обладает коэффициентом отражения $0 \leq R \leq 1$, то давление света¹ будет равно

$$\sigma = w(1 + R) \cos \varphi. \quad (21.64)$$

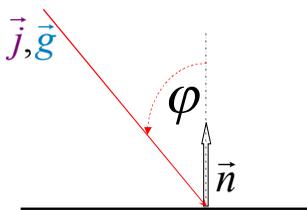


Рис. 21.13. Давление света

21.3.4. Шкала электромагнитных волн

Вся шкала электромагнитных волн условно подразделяется на шесть диапазонов (табл. 21.2): радиоволны (длинные, средние и короткие), инфракрасные, видимые, ультрафиолетовые, рентгеновские и гамма-излучение.

Радиоволны обусловлены переменными токами в проводниках и электронными потоками. Инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучения исходят из атомов, молекул и быстрых заряженных частиц. Рентгеновское излучение возникает при внутриатомных процессах, гамма-излучение имеет ядерное происхождение.

Принято деление оптического спектра на инфракрасное излучение (длина волн от 780 нм до 1 мкм), видимое (780...380 нм) и ультрафиолетовое (380...100 нм).

Таблица 21.2

Диапазон	Частота ν , Гц	Длина волны λ , м
Радиоволны	$10^3 \dots 6 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^5 \dots 5 \cdot 10^{-4}$

¹ Как будет показано при изложении *квантовых* свойств света (см. 23.7 в части 5 пособия) – давление света в вакууме в представлении о частицах света – *фотонах* – будет выражаться аналогичной формулой.

Оптическое излучение	инфракрасное	$6 \cdot 10^{11} \dots 3,75 \cdot 10^{14}$	$5 \cdot 10^{-4} \dots 8 \cdot 10^{-7}$
	видимое	$3,75 \cdot 10^{14} \dots 7,5 \cdot 10^{14}$	$7,8 \cdot 10^{-7} \dots 3,8 \cdot 10^{-7}$
	ультрафиолетовое	$7,5 \cdot 10^{14} \dots 3 \cdot 10^{17}$	$3,8 \cdot 10^{-7} \dots 10^{-8}$
Рентгеновское излучение		$1,5 \cdot 10^{17} \dots 5 \cdot 10^{19}$	$10^{-8} \dots 10^{-14}$
γ -излучение		$> 3 \cdot 10^{18}$	$< 5 \cdot 10^{-12}$

Инфракрасное излучение – электромагнитное излучение, занимающее спектральную область между красным концом видимого света (с длиной волны $\lambda = 0,78$ мкм) и микроволновым излучением ($\lambda \sim 1 \dots 2$ мм). Сейчас весь диапазон инфракрасного излучения делят на три составляющих:

коротковолновая область: $\lambda = 0,78 \dots 2,5$ мкм

средневолновая область: $\lambda = 2,5 \dots 50$ мкм;

длинноволновая область: $\lambda = 50 \dots 2000$ мкм.

Последнее время длинноволновую окраину этого диапазона выделяют в отдельный, независимый диапазон электромагнитных волн терагерцовое (субмиллиметровое) излучение.

Инфракрасное излучение также называют «тепловым» излучением, так как все тела, твердые и жидкие, нагретые до определенной температуры, излучают энергию в инфракрасном спектре. При этом длины волн, излучаемые телом, зависят от температуры нагревания: чем выше температура, тем короче длина волны и выше интенсивность излучения. Спектр излучения абсолютно черного тела при относительно невысоких (до нескольких тысяч кельвинов) температурах лежит в основном именно в этом диапазоне.

Микроволновое излучение. Сверхвысокочастотное излучение (СВЧ-излучение) – электромагнитное излучение, включающее в себя сантиметровый и миллиметровый диапазоны радиоволн (от 30 см – частота 1 ГГц до 1 мм – 300 ГГц). Однако точные границы между инфракрасным, терагерцовым микроволновым излучением и ультравысокочастотными радиоволнами достаточно приблизительны и могут определяться по-разному.

Микроволновое излучение большой интенсивности используется для бесконтактного нагрева тел, например, в быту и для термообработки металлов в микроволновых печах, а также для радиолокации. Микроволновое излучение малой интенсивности используется в средствах связи, преимущественно портативных (рации, сотовые телефоны последних поколений, WiFi – устройства).

Видимое излучение – это электромагнитные волны, воспринимаемые человеческим глазом, которые занимают участок спектра \sim от 380 (фиолетовый) до 780 нм (красный). Интервал видимого излучения является малой частью интервала электромагнитного излучения вообще. За пределами этой ограниченной области электромагнитное излучение не вызывает у человека зрительных ощущений или, другими словами, является для него невидимым. Также видимое излучение принято называть светом в узком смысле этого слова.

Ультрафиолетовое излучение – электромагнитное излучение, занимающее диапазон между видимым и рентгеновским излучением (380...10 нм, $7,5 \cdot 10^{14}$... $3 \cdot 10^{17}$ Гц). Диапазон условно делят на ближний (380...200 нм) и дальний, или вакуумный, (200...10 нм) ультрафиолет, последний так назван, поскольку интенсивно поглощается атмосферой и исследуется только вакуумными приборами.

Рентгеновское излучение – электромагнитные волны, энергия фотонов которых лежит на энергетической шкале между ультрафиолетовым излучением и гамма-излучением, что соответствует длинам волн от 10^{-4} до 10^2 Å (от 10^{-14} до 10^{-8} м).

Положение на шкале электромагнитных волн. Энергетические диапазоны рентгеновского излучения и гамма-излучения перекрываются в широкой области энергий. Оба типа излучения являются электромагнитным излучением и при одинаковой энергии фотонов – эквивалентны. Терминологическое различие лежит в способе возникновения – рентгеновские лучи испускаются при участии электронов (либо в атомах, либо свободных), в то время как гамма-излучение возникает при переходах между возбужденными состояниями атомных ядер. Фотоны рентгеновского излучения имеют энергию от 100 эВ до 250 кэВ, что соответствует излучению с частотой от $1,5 \cdot 10^{17}$ Гц до $5 \cdot 10^{19}$ Гц и длиной волны 10^{-8} ... 10^{-4} м (общепризнанного определения нижней границы диапазона рентгеновских лучей в шкале длин волн не существует). Мягкий рентген характеризуется наименьшей энергией фотона и частотой излучения (и наибольшей длиной волны), а жесткий рентген обладает наибольшей энергией фотона и частотой излучения (и наименьшей длиной волны). Жесткий рентген используется преимущественно в промышленных целях.

Гамма-излучение (γ -лучи) – вид электромагнитного излучения с чрезвычайно маленькой длиной волны $< 5 \cdot 10^{-12}$ м и вследствие этого ярко выраженными корпускулярными и слабо выраженными волновыми свойствами. Гамма-фотонами являются фотоны высокой энергии.

Обычно считается, что энергии фотонов гамма-излучения превышают 10^4 эВ, хотя резкая граница между гамма- и рентгеновским излучением не определена. На шкале электромагнитных волн гамма-излучение граничит с рентгеновским излучением, занимая диапазон более высоких частот и энергий. В области $10 \dots 100$ кэВ гамма-излучение и рентгеновское излучение различаются только по источнику: если квант излучается при переходах нуклонов в возбужденных ядрах, то его принято относить к гамма-излучению, если при взаимодействиях электронов или при переходах в атомной электронной оболочке – то к рентгеновскому излучению. Очевидно, физически кванты электромагнитного излучения с одинаковой энергией не отличаются, поэтому такое разделение условно.

21.3.5. Эффект Доплера в оптике

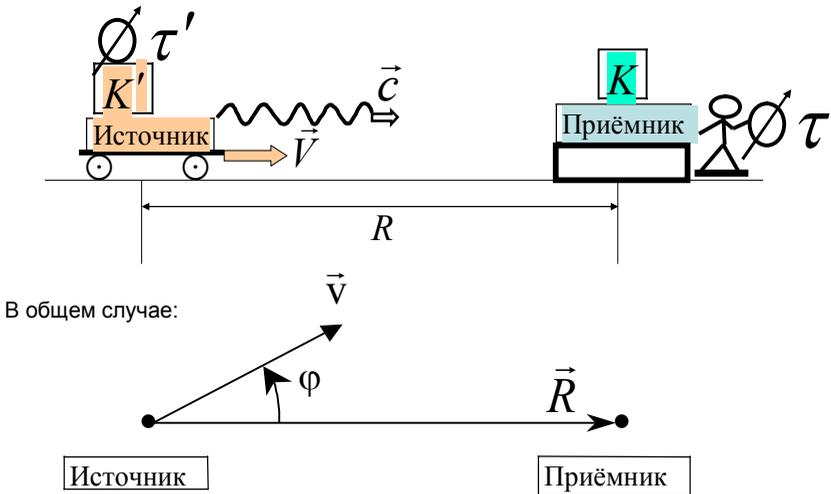


Рис.21.14. Эффект Доплера в оптике

Поскольку свет может распространяться и в веществе, и в вакууме, а скорость света в вакууме не зависит от направления и величины скорости источника и приёмника, то

$$c = u = u'.$$

В таких же обозначениях, как при рассмотрении эффекта Доплера в акустике, -

$$\theta_1 = t_1 + \frac{R}{c}$$

$$\theta_2 = t_2 + \frac{R \mp V \cdot \tau}{c}$$

где верхний знак « - » относится к случаю приближения источника к приёмнику, а нижний знак «+» - к случаю удаления (см.рис.21.14).

Длительность процесса передачи сигнала по часам приёмника

\boxed{K} будет равна

$$\tau = t_2 - t_1$$

Длительность процесса приёма сигнала буудет равна

$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

Длительность процессов передачи и приёма связаны между собой соотношением

$$\theta = \tau \mp \frac{V}{c} \cdot \tau = \tau \cdot \left(1 \mp \frac{V}{c} \right)$$

Число переданных волн равно

$$N = \frac{\tau'}{T_0} = \tau' \cdot \nu_0$$

Число принятых волн равно

$$N = \frac{\theta}{T} = \theta \cdot \nu,$$

где T_0, ν_0, T и ν - есть период и частота переданных и принятых волн, соответственно.

Естественно полагать, что число переданных волн будет равно числу принятых волн:

В соответствии с замедлением темпа хода часов в инерциальных системах отсчета (см. формулу 1.6) показания часов источника $[K']$, движущихся относительно приёмника, будут связаны соотношением

$$\tau' = \tau \sqrt{1 - \beta^2}$$

с показаниями часов $[K]$, неподвижных относительно приёмника. В этой формуле

$$\beta = \frac{V}{c}$$

Тогда частоты принятых и переданных волн будут связаны между собой *формулой эффекта Доплера*:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \varphi} \quad (21.65)$$

где знак «+» соответствует случаю взаимного удаления источника и приёмника; знак «-» – случаю сближения источника и приёмника.

В оптическом эффекте Доплера частота волны, воспринимаемой приёмником, зависит только от относительного движения (сближения или удаления) источника и приёмника.

В общем случае

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \varphi)}, \quad (21.66)$$

где γ – релятивистский фактор,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

φ – угол между вектором \vec{V} и вектором \vec{R} , соединяющим источ-

ник с приемником (см. рис. 21.14).

При взаимном сближении источника и приемника $\varphi < \frac{p}{2}$ и поэтому $v > v_0$.

При взаимном удалении источника и приемника $\varphi > \frac{p}{2}$ и поэтому $v < v_0$.

При $\varphi = \frac{p}{2}$

$$v = v_0 \frac{1}{\gamma}$$

и наблюдается *поперечный эффект Доплера*, который в оптике имеет чисто релятивистский характер.

21.3.6. Излучение Вавилова – Черенкова

В вакууме лишь ускоренно движущиеся заряженные частицы могут являться источниками электромагнитного излучения. При движении заряженной частицы в среде с показателем преломления n скорость частицы v_q может оказаться большей фазовой скорости света $\left(u = \frac{c}{n}\right)$ в данной среде, но не может превосходить скорость света в вакууме:

$$\frac{c}{n} < v_q < c. \quad (21.67)$$

В этом случае наблюдается электромагнитное излучение заряженной частицы даже, если частица движется равномерно и прямолинейно. Это излучение называется *излучением Вавилова – Черенкова*. В процессе излучения энергия и скорость частицы уменьшаются, и поэтому частица тормозится.

Характерной особенностью излучения Вавилова – Черенкова является *направленность* излучения.

Свет распространяется по направлениям, составляющим острый угол ϑ с траекторией частицы, т.е. *вдоль* образующих конуса, ось ко-

того совпадает с направлением скорости \vec{v}_q движения заряженной частицы (рис. 21.15).

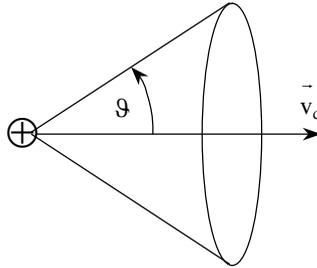


Рис. 21.15. Излучение Вавилова – Черенкова

Угол ϑ определяется из соотношения

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta n}, \quad (21.68)$$

где $\beta = \frac{v_q}{c}$.

Излучение Вавилова – Черенкова возможно, если $\beta n > 1$. Для выполнения этого условия необходимы вещества с большим показателем преломления (твердые или жидкие тела) для медленно движущихся частиц (скорость электронов, например, порядка $2 \cdot 10^8$ м/с) или вещества с малым показателем преломления для быстро движущихся частиц (скорость протонов в газах, например, порядка $1,4 \cdot 10^8$ м/с).

21.3.7. Поляризация света

21.3.7.1. Световой вектор

Как показывает опыт, во взаимодействии электромагнитного излучения с веществом главную роль играет электрическая компонента электромагнитной волны. Это объясняется тем, что величина электрической силы, действующей на электроны вещества,

$$\vec{F}_3 = |e| \vec{E},$$

многократно превосходит величину магнитной силы

$$\vec{F}_M = |e| \left[\vec{v} \vec{B} \right],$$

поскольку в электромагнитной волне $E = cB$ (в вакууме) и, следовательно,

$$\frac{|\vec{F}_Э|}{|\vec{F}_M|} = \frac{|e| |\vec{E}|}{|e| \left[\vec{v} \vec{B} \right]} \gg 1. \quad (21.69)$$

В соответствии с этим мы будем в дальнейшем говорить о *световом векторе*, подразумевая под ним вектор напряженности электрического поля электромагнитной волны.

Несмотря на то, что световые волны *поперечны* (рис. 21.16), они обычно не обнаруживают асимметрии относительно луча (т.е. направления волнового вектора). Это обусловлено тем, что в *естественном* свете (т.е. свете, испускаемом обычными источниками) вектор \vec{E} колеблется в любых направлениях, перпендикулярных лучу (рис. 21.17).

Свет, в котором направления колебаний вектора \vec{E} упорядочены каким-либо образом, называют *поляризованным*. Если колебания светового вектора происходят только в одной проходящей через луч плоскости, то свет называется *плоско-* (или *линейно-*) *поляризованным*. Плоскость, в которой колеблется световой вектор в плоскополяризованной волне, называется *плоскостью поляризации*.

21.3.7.2. Естественный и поляризованный свет

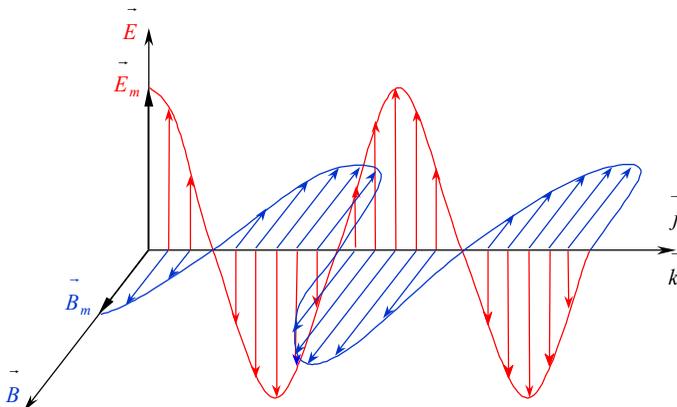


Рис. 21.16. «Моментальная фотография» плоской электромагнитной волны, распространяющейся в соответствии с направлениями волнового вектора \vec{k} и вектора Пойнтинга \vec{j}

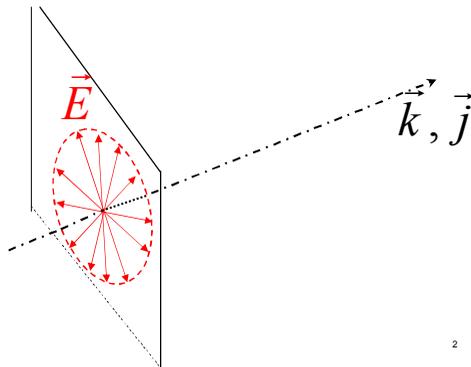


Рис. 21.17. Естественный свет

21.3.7.3. Закон Малюса

Плоско-поляризованный свет можно получить из естественного с помощью приборов, называемых *поляризаторами*. Эти приборы сво-

бодно пропускают колебания, параллельные плоскости, которую мы будем называть *плоскостью поляризатора*, и полностью или частично задерживают колебания, перпендикулярные этой плоскости.

Поляризатор можно условно изобразить в виде решетки, «прутья» которой параллельны направлению колебаний вектора \vec{E}_Π в проходящем сквозь нее свете (рис. 21.18).

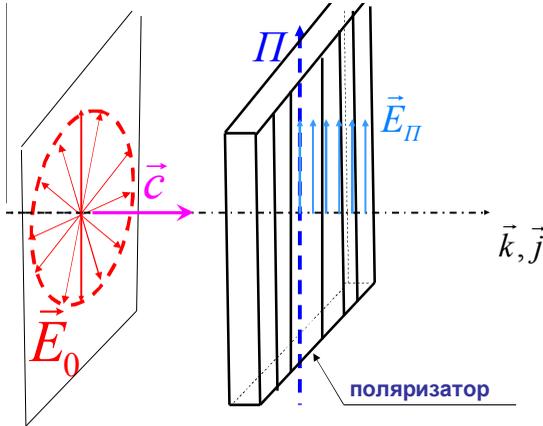


Рис. 21.18. Прохождение естественного света через поляризатор.
Образование плоско-поляризованной волны

Поляризатор (Π) пропускает волны, вектор \vec{E} в которых параллелен \vec{E}_Π , т.е. плоскости поляризатора Π , т.е. *поляризует свет*.

Проекция вектора \vec{E}_0 на плоскость поляризатора (рис. 21.19) равна

$$E_\Pi = E_0 \cos \alpha . \quad (21.70)$$

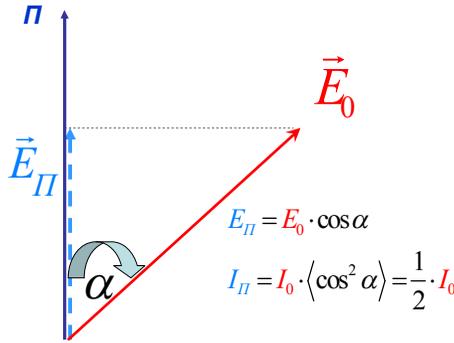


Рис. 21.19. Векторная диаграмма образования плоско-поляризованной волны

Итак, после прохождения поляризатора получается свет, поляризованный так, как показано на рис. 21.18.

Интенсивность получившегося плоско-поляризованного света равна

$$I_{\parallel} = I_0 \overline{\cos^2 \alpha}, \quad (21.71)$$

ибо интенсивность пропорциональна модулю среднего значения вектора Пойнтинга

$$I \sim \overline{|\vec{j}|} \sim \overline{E^2}.$$

Поскольку в падающем *естественном* свете представлены все возможные ориентации \vec{E} , то угол $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\overline{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2}$ и

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2} I_0 \quad (21.72)$$

Если на такую решетку-поляризатор падает естественный свет (см. рис. 21.18), то интенсивность I_{\parallel} проходящего света не изменяется при вращении поляризатора вокруг направления падающего луча. Это является прямым следствием того, что в естественном свете ни одно из направлений плоскости колебаний не является преобладающим.

Для анализа поляризованного света применяют еще один поляризатор, называемый *анализатором*. Анализатор пропускает лишь те

волны, в которых плоскость колебаний вектора \vec{E} совпадает с плоскостью анализатора А (рис. 21.20).

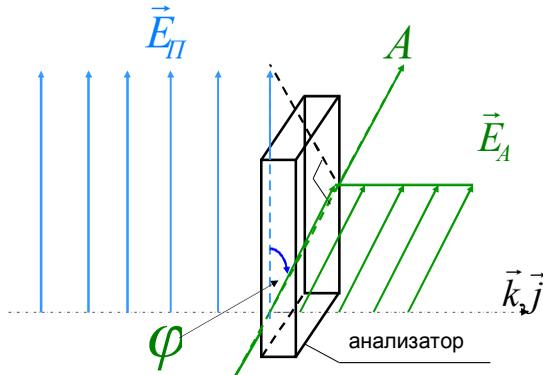


Рис. 21.20. Прохождение поляризованного света через анализатор

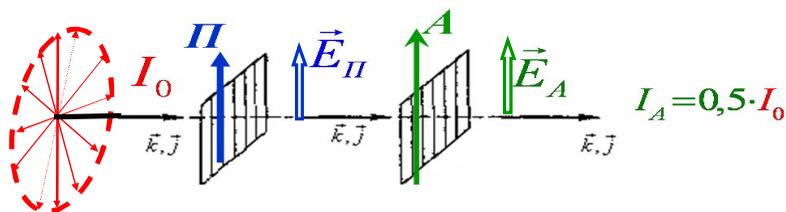
Амплитуда $|\vec{E}_A|$ электрического вектора для света, прошедшего через анализатор, будет численно равна

$$E_A = E_{\Pi} \cos \varphi,$$

а интенсивность I_A этого света, пропорциональная E_A^2 , будет связана с I_{Π} и φ соотношением

$$I_A = I_{\Pi} \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi. \quad (21.73)$$

Соотношение (21.73) выражает **закон Малюса**. На [рис. 21.21](#) и [21.22](#) рассмотрены два предельных случая.



a

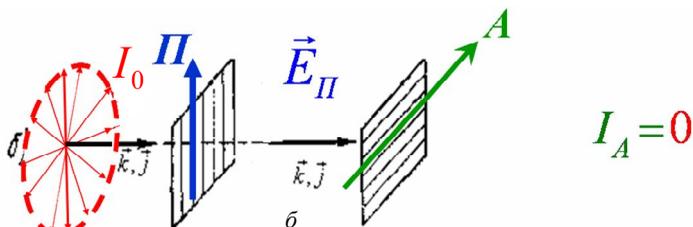


Рис. 21.21. К закону Малюса: *a* – анализатор А «параллелен» поляризатору П ($\varphi = 0$) и $I_A = \frac{1}{2}I_0$; *б* – анализатор А «скрещен» с поляризатором П ($\varphi = \pi/2$) и $I_A = 0$

З а м е ч а н и е. *Несовершенные* поляризаторы задерживают колебания вектора \vec{E} , перпендикулярные плоскости поляризатора, только частично. На выходе из таких поляризаторов получается свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений. Такой свет называется *частично-поляризованным*. Он рассматривается как *смесь* естественного и плоско-поляризованного **света** (рис.21.23).

После прохождения через анализатор общая интенсивность *частично-поляризованного* света будет складываться из интенсивности *плоско-поляризованного* света, прошедшего через анализатор (21.73), и из ослабленной наполовину интенсивности *естественного* света (21.72):

$$I_A = I_P \cos^2 \varphi + \frac{1}{2}I_0. \quad (21.74)$$

Максимальная интенсивность *частично-поляризованного* света будет равна

$$I_A^{\max} = I_{\Pi} + \frac{1}{2}I_0,$$

а минимальная –

$$I_A^{\min} = \frac{1}{2}I_0.$$

Степень поляризации частично-поляризованного света, прошедшего через анализатор, выражается как

$$P = \frac{I^{\max} - I^{\min}}{I^{\max} + I^{\min}}. \quad (21.75)$$

21.3.7.4. Закон Брюстера

Рассмотрим луч S , падающий на границу FF' раздела двух сред (прозрачных диэлектриков) – **рис. 21.24**. Колебания вектора \vec{E} в этом луче могут быть разложены на колебания, параллельные плоскости падения, т.е. в плоскости чертежа (обозначены *черточками*) и на колебания, перпендикулярные плоскости падения, т.е. плоскости чертежа (обозначены *точками*). Если угол падения i_1 отличен от нуля, то отраженный луч S' и преломленный луч S'' оказываются частично поляризованными. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения, а в преломленном луче – колебания, параллельные плоскости падения.

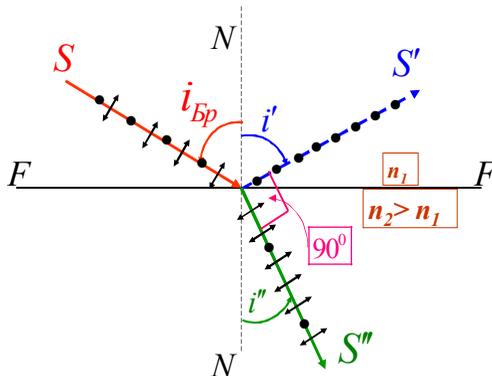


Рис. 21.24. Поляризация света при отражении от границы раздела двух прозрачных диэлектриков

Степень поляризации зависит от угла падения. Если угол падения равен

$$i_1 = \operatorname{arctg} n_{21},$$

где $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ – относительный показатель преломления двух сред, то отраженный луч будет полностью поляризован – он содержит только колебания вектора \vec{E} , перпендикулярные плоскости падения. Преломленный луч остается частично поляризованным. Такой угол падения называется *углом Брюстера*, а соотношение

$$i_1 = \operatorname{arctg} n_{21} = i_{\text{Бр}} \quad (21.76)$$

носит название *закона Брюстера*.

На [рис. 21.24](#) показано, что при падении под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Это можно доказать совместным решением уравнения закона Брюстера (21.76) и уравнения закона преломления света (*закона Снеллиуса*):

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (21.77)$$

21.3.8. Дисперсия и поглощение света

В однородной среде электромагнитная волна распространяется с неизменной скоростью и в неизменном направлении. Скорость волны в вакууме равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В веществе скорость волны, как известно, равна

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

а в прозрачных диэлектриках, где $\mu = 1$, скорость равна

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Отношение скорости света в вакууме к скорости света в веществе носит название *показателя преломления*

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \quad (21.78)$$

Это равенство неплохо выполняется для очень длинных волн. С изменением длины волны (частоты) света показатель преломления меняется. Это явление называется *дисперсией света*. Дисперсия света не объясняется теорией Максвелла, которая не учитывает взаимодействия излучения с веществом.

Распространяясь по веществу, электромагнитная волна приводит в колебательное состояние электрические заряды молекул. Так как электронное облако легко подвижно по сравнению с тяжелыми ядрами, то электрическое колебание состоит в смещении (**величина x в уравнении 21.79**) центра тяжести электронов по отношению к неподвижному центру тяжести положительных зарядов атомных ядер. Обозначая через m и e массу и заряд колеблющихся электронов, можно записать уравнение колебания в форме

$$m\ddot{x} = -kx - eE, \quad (21.79)$$

где E – вектор напряженности электрического поля в электромагнитной волне, изменяющийся по гармоническому закону:

$$E = E_0 \cos \omega t. \quad (21.80)$$

Разделив на m и пользуясь формулой собственной частоты колебания

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t. \quad (21.81)$$

Мы приравняли произведение массы на ускорение двум силам: возвращающей силе ($-kx$) и внешней периодически меняющейся силе $eE_0 \cos \omega t$. Это – уравнение *вынужденных* гармонических колебаний. Оно удовлетворяется, если положить

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (21.82)$$

После подстановки (21.82) в уравнение (21.81) найдем:

$$x_0 = \frac{-\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (21.83)$$

Дипольный момент молекулы будет равен

$$ex_0 = \frac{-\frac{e^2}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (21.84)$$

Вектор поляризации – удельная поляризованность диэлектрика – будет в N раз больше, если N – число молекул в единице объема:

$$|\vec{P}_e| = \frac{N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} E. \quad (21.85)$$

Вспомянув формулу, связывающую вектор поляризации с напряженностью электрического поля,

$$|\vec{P}_e| = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 |\vec{E}|, \quad (21.86)$$

мы видим, что выразили диэлектрическую проницаемость вещества через параметры молекулярного электрического диполя:

$$\varepsilon = 1 + \frac{N \frac{e^2}{m}}{\varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (21.87)$$

Показатель преломления вещества будет равен корню квадратному из этого выражения:

$$n = \sqrt{1 + \frac{N \frac{e^2}{m}}{\varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}}. \quad (21.88)$$

Для всех прозрачных бесцветных веществ в видимой части спектра функция (21.88) показана на **рис. 21.25**. Показатель преломления растет с увеличением частоты во всем интервале частот

$$\frac{dn}{d\omega} > 0$$

(область *нормальной дисперсии*), за исключением области, непосредственно примыкающей к частоте резонансного поглощения ω_0 .

Эта область носит название области *аномальной дисперсии*

$$\frac{dn}{d\omega} < 0.$$

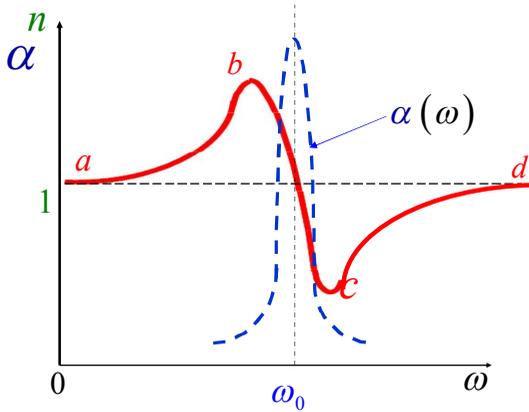


Рис. 21.25. Зависимость показателя преломления вещества от частоты падающего света

У вещества может быть не одна, а несколько резонансных частот, соответствующих разностям его энергетических уровней. Тогда и областей аномальной дисперсии будет несколько.

Зависимость $n = n(\omega)$ приводит к зависимости скорости света в среде u от частоты (длины волны) падающей электромагнитной волны:

$$u = \frac{c}{n(\omega)} = f(\omega).$$

Это свойство света в среде лежит в основе разложения света, прошедшего сквозь призму, в спектр (рис.21.26): показатель преломления *фиолетового* света превосходит показатель преломления *красного* света, поскольку

$$\lambda_{\text{фиол}} < \lambda_{\text{красн}} \text{ (соответственно } \omega_{\text{фиол}} > \omega_{\text{красн}}).$$

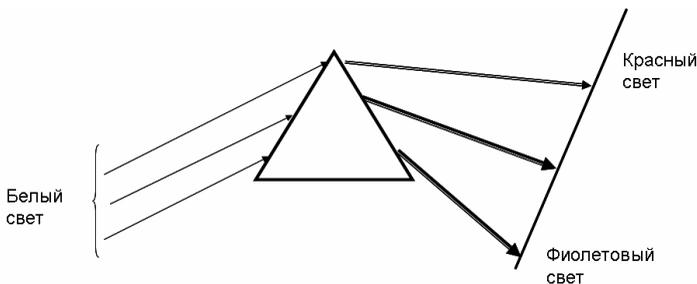


Рис. 21.26. Разложение света в спектр в результате дисперсии при прохождении света через преломляющую призму

Значение показателя преломления $n < 1$ не приводит к нарушению предельности скорости передачи сигнала $\left(u = \frac{c}{n} > c\right)$, т.е. не противоречит специальной теории относительности. Фазовая скорость u не есть скорость передачи сигнала, а является скоростью фронта бесконечной монохроматической синусоидальной волны. Передача сигнала с помощью квазимонохроматической волны, характеризующейся началом и концом передачи (*группа волн*), происходит со скоростью

$$v = \frac{d\omega}{dk} = u \left(1 + \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right), \quad (21.89)$$

где $u = \frac{c}{n}$ и $\omega = ku$. Именно *групповая скорость* v не может превосходить скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В области аномальной дисперсии понятие групповой скорости теряет смысл, так как очень велико поглощение (пунктирная кривая на **рис. 21.25**), и волна быстро затухает.

Итак, скорость распространения волны, т.е. показатель преломления, существенным образом зависит от соотношения частоты волны и собственных частот молекулярных диполей.

Разумеется, от этих же причин зависит степень поглощения электромагнитной волны веществом.

При прохождении света через вещество часть энергии волны затрачивается на возбуждение колебаний электронов. Поэтому интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается – свет по-

глощается в веществе. Вынужденные колебания электронов, а, следовательно, и поглощение света становятся особенно интенсивными при резонансной частоте ω_0 (см. пунктирную кривую на рис. 21.25).

Отношение интенсивности прошедшего излучения I к интенсивности падающего I_0 , если известны коэффициент поглощения α и толщина слоя d , равно

$$\frac{I}{I_0} = \exp(-\alpha d). \quad (21.90)$$

Это закон Ламберта – Бугера (рис. 21.27).

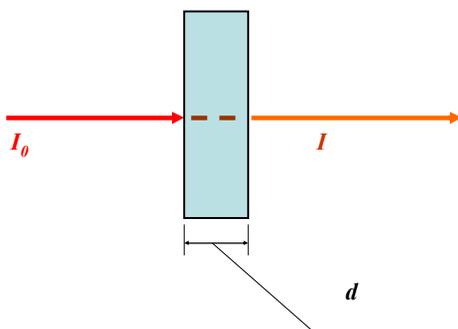


Рис. 21.27. К закону Ламберта – Бугера

Напоминаем, что коэффициент поглощения равен величине, обратной толщине слоя, ослабляющего интенсивность излучения в e раз. Благодаря сложной системе энергетических уровней, свойственной веществу, зависимость коэффициента поглощения от частоты падающей волны может быть причудливой и «скачущей». Коэффициент поглощения зависит только от длины волны (частоты) света, химической природы и состояния вещества. В растворе поглощающего вещества в непоглощающем растворителе коэффициент поглощения пропорционален концентрации c раствора:

$$\alpha = \alpha_1 c. \quad (21.91)$$

Контрольные вопросы

1. От каких величин зависит скорость звука в газе?
2. При каком условии групповая скорость волны совпадает с фазовой?
3. Что такое вектор Умова?
4. Как связаны энергия и импульс электромагнитной волны?
5. Какая дисперсия называется аномальной?
6. Может ли фазовая скорость света превышать скорость света в вакууме?
7. Каков физический смысл коэффициента поглощения света?
8. Что такое вектор Пойнтинга?
9. Чем отличается поляризованный свет от естественного?
10. Почему после прохождения естественного света через поляризатор его интенсивность уменьшается вдвое?
11. Дайте определение угла Брюстера. Может ли угол Брюстера быть равным 45° ?

Примеры решения задач

Пример 21.1. Составьте уравнение плоской продольной волны, распространяющейся в стальном образце. Период колебания частиц в волне $T = 1,2$ с, амплитуда $A = 2$ мкм. Плотность стали $\rho = 7800$ кг/м³. Модуль Юнга для стали $E = 200$ ГПа. Найдите скорость распространения волны v и длину волны λ . Получите уравнения для скорости колебания частиц v_s ; для относительной деформации образца стали, в котором распространяется волна ϵ ; для объемной плотности потенциальной w_p , кинетической w_k и полной w энергий; для модуля вектора плотности потока энергии (вектора Умова) $|\vec{j}|$.

Решение

Уравнение плоской волны, распространяющейся в любой однородной и изотропной среде, при условии, что начальная фаза равна нулю, имеет вид

$$S(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (21.92)$$

где A – амплитуда;

ω – циклическая частота колебания частиц среды;

k – волновое число.

Циклическая частота ω и период колебаний T связаны соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (21.93)$$

Волновое число k можно представить как

$$k = \frac{\omega}{u}, \quad (21.94)$$

где u – скорость распространения продольной волны в стали, которую можно определить по формуле

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (21.95)$$

Подставив (21.95) в (21.94), а затем (21.93) и (21.94) в (21.92), получим

$$S(x, t) = A \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot x \right) \right]. \quad (21.96)$$

Волновое число k можно представить и в виде

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Отсюда с учетом формул (21.93) – (21.95) длина волны

$$\lambda = T \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (21.97)$$

Скорость колебания частиц в волне

$$v_s = \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = -A \frac{2\pi}{T} \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot x \right) \right]. \quad (21.98)$$

Относительная деформация в образце стали:

$$\varepsilon = \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = A \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot x \right) \right]. \quad (21.99)$$

Объемную плотность потенциальной энергии $w_{п}$ найдем по формуле

$$w_{\text{п}} = \frac{\varepsilon^2 E}{2},$$

или, с учетом формулы (21.99),

$$w_{\text{п}} = A^2 \frac{2\pi^2}{T^2} \rho \sin^2 \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot x \right) \right]. \quad (21.100)$$

Объемную плотность кинетической энергии $w_{\text{к}}$ найдем по формуле

$$w_{\text{к}} = \frac{\rho v_s^2}{2},$$

или, с учетом формулы (21.98),

$$w_{\text{к}} = A^2 \frac{2\pi^2}{T^2} \rho \sin^2 \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot x \right) \right]. \quad (21.101)$$

Сравнив формулы (21.100) и (21.101), видим, что $w_{\text{к}} = w_{\text{п}}$.

Объемную плотность полной w энергии находим как сумму

$$w = w_{\text{п}} + w_{\text{к}} = A^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \rho \sin^2 \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot x \right) \right]. \quad (21.102)$$

Модуль вектора Умова $|\vec{j}|$ найдем по формуле

$$|\vec{j}| = |w\vec{u}| = w|\vec{u}|$$

или, с учетом формул (21.95) и (21.102),

$$|\vec{j}| = A^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{E\rho} \cdot \sin^2 \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot x \right) \right]. \quad (21.103)$$

Подставим числовые значения в формулы (21.95) – (21.99), (21.102) и выполним вычисления.

Уравнение волны:

$$S(x,t) = 2 \cdot 10^{-6} \cos \left[\frac{2\pi}{1,2} \left(t - \sqrt{\frac{7800}{2 \cdot 10^{11}}} x \right) \right] =$$

$$= 2 \cdot 10^{-6} \cos \pi (1,67t - 3,29 \cdot 10^{-4} x), \text{ м.}$$

Скорость распространения волны:

$$u = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{7800}} = 5,06 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Длина волны:

$$\lambda = 1,2 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{7800}} = 6,08 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Скорость колебания частиц в волне:

$$v_s = -2 \cdot 10^{-6} \frac{2 \cdot 3,14}{1,2} \sin \left[\frac{2\pi}{1,2} \left(t - \sqrt{\frac{7800}{2 \cdot 10^{11}}} x \right) \right] =$$

$$= -1,05 \cdot 10^{-5} \sin \pi (1,67t - 3,29 \cdot 10^{-4} x) \text{ м/с.}$$

Относительная деформация в образце стали:

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6} \frac{2 \cdot 3,14}{1,2} \sqrt{\frac{7800}{2 \cdot 10^{11}}} \sin \left[\frac{2\pi}{1,2} \left(t - \sqrt{\frac{7800}{2 \cdot 10^{11}}} x \right) \right] =$$

$$= 2,07 \cdot 10^{-9} \sin \pi (1,67t - 3,29 \cdot 10^{-4} x).$$

Объемные плотности потенциальной и кинетической энергий:

$$w_{\text{п}} = w_{\text{к}} = \left(2 \cdot 10^{-6} \right)^2 \frac{2 \cdot 3,14^2}{1,2^2} \cdot 7800 \sin^2 \left[\frac{2\pi}{1,2} \left(t - \sqrt{\frac{7800}{2 \cdot 10^{11}}} x \right) \right] =$$

$$= 4,27 \cdot 10^{-7} \sin^2 \left[\pi (1,67t - 3,29 \cdot 10^{-4} x) \right], \text{ Дж.}$$

Объемная плотность полной энергии:

$$w = 8,54 \cdot 10^{-7} \sin^2 \left[\pi (1,67t - 3,29 \cdot 10^{-4} x) \right], \text{ Дж.}$$

Закон изменения модуля вектора Умова:

$$|\vec{j}| = \left(2 \cdot 10^{-6}\right)^2 \frac{4 \cdot 3,14^2}{1,2^2} \sqrt{2 \cdot 10^{11} \cdot 7800} \cdot \sin^2 \left[\frac{2\pi}{1,2} \left(t - \sqrt{\frac{7800}{2 \cdot 10^{11}}} x \right) \right] =$$

$$= 4,33 \cdot 10^{-3} \sin^2 \left[\pi (1,67t - 3,29 \cdot 10^{-4} x) \right], \text{ Вт/м}^2.$$

Пример 21.2. Скорый поезд приближается к стоящему на путях электровозу со скоростью $v = 72$ км/ч. Электровоз подает звуковой сигнал частотой $\nu_0 = 0,6$ кГц. Определите частоту ν сигнала, воспринимаемого машинистом скорого поезда. Звук распространяется в воздухе при температуре $T = 300$ К. Молярная масса воздуха $\mu = 0,029$ кг/моль.

Решение

По условию задачи приемник (скорый поезд) приближается к неподвижному источнику (электровозу). При этих условиях формула эффекта Доплера:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v \cos \varphi}{u} \right), \quad (21.104)$$

где φ – угол между линией наблюдения и скоростью, который при сближении приемника и источника, $\varphi = \pi$ и $\cos \varphi = -1$.

Рассчитаем скорость звука в воздухе, считая процесс распространения звука адиабатическим, по формуле

$$u = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (21.105)$$

где R – универсальная газовая постоянная;
 γ – коэффициент Пуассона.

Коэффициент Пуассона есть отношение удельной теплоемкости газа при постоянном давлении к удельной теплоемкости газа при постоянном объеме, которое, в свою очередь, может быть найдено по формуле

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}, \quad (21.106)$$

где i – число степеней свободы молекулы газа.

Так как воздух состоит в основном из жестких двухатомных молекул (O_2 , N_2 , H_2), то число степеней свободы $i = 5$. Следовательно, по формуле (21.106) $\gamma = 1,4$.

Подставив (21.105) в (21.104), получим формулу для расчета частоты сигнала, воспринимаемого машинистом скорого поезда

$$v = v_0 \left(1 - \frac{v \cos \varphi}{\sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}} \right). \quad (21.107)$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$v = 600 \left(1 + \frac{20}{\sqrt{1,4 \cdot \frac{8,31 \cdot 300}{0,029}}} \right) = 641 \text{ Гц.}$$

Пример 21.3. В прозрачном диэлектрике распространяется электромагнитная волна. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика на частоте этой волны равна $\epsilon = 2$, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Найдите закон изменения вектора Пойнтинга в точке, где электрический вектор изменяется по закону $\vec{E}_z = 14 \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_z$, В/м. Вектор \vec{B} колеблется вдоль оси X .

Решение

Вектор плотности потока энергии электромагнитного излучения (вектор Пойнтинга) равен

$$\vec{j} = \epsilon_0 c^2 [\vec{E}, \vec{B}]. \quad (21.108)$$

В прозрачном диэлектрике напряженность электрического поля электромагнитной волны связана с индукцией магнитного поля волны соотношением

$$E = uB, \quad (21.109)$$

где $u = c/n$,

здесь n – показатель преломления, $n = \sqrt{\epsilon}$;

ε – диэлектрическая проницаемость вещества.

Поэтому модуль вектора Пойнтинга может быть рассчитан по формуле

$$|\vec{j}| = \varepsilon_0 c^2 E \frac{E}{v} = \varepsilon_0 c^2 \frac{E^2 \sqrt{\varepsilon}}{c} = \varepsilon_0 E^2 c \sqrt{\varepsilon}. \quad (21.110)$$

Напряженность электрического поля в электромагнитной волне:

$$E(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (21.111)$$

Поэтому

$$|\vec{j}| = \varepsilon_0 c \sqrt{\varepsilon} E_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (21.112)$$

В электромагнитной волне векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{j} образуют правую тройку (см. рис. 21.10).

Следовательно, вектор Пойнтинга будет изменяться по закону:

$$|\vec{j}| = \varepsilon_0 c \sqrt{\varepsilon} E_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \vec{e}_y. \quad (21.113)$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{2} \cdot 14^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_y = \\ &= 7,36 \cdot 10^{-1} \cos^2(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Пример 21.4. Какой минимальной скоростью и минимальной кинетической энергией должен обладать электрон, чтобы в среде с показателем преломления $n = 1,6$ возникло излучение Вавилова – Черенкова? Найдите угол раствора конуса излучения Вавилова – Черенкова.

Решение

Излучение Вавилова – Черенкова представляет собой «исключение из правил». Обычно электромагнитное излучение создается электрическим зарядом, движущимся с переменной скоростью. Но если заряд q движется в прозрачном диэлектрике с постоянной скоростью v_q (21.52), то возникает электромагнитное излучение, образующее конус, раскрытый в сторону движения заряда (см. рис. 21.20). При данном значении n минимальная скорость равномерного движения заряда, при которой возникает излучение Вавилова – Черенкова, в соответствии с (21.67), равна:

$$v_q^{\min} = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,6} = 1,88 \cdot 10^8 \text{ м/с.} \quad (21.114)$$

Угол раствора конуса может быть определен по формуле

$$\theta = \arccos\left(\frac{c}{nv_q}\right) = \arccos\left(\frac{3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 1,88 \cdot 10^8}\right) = 4,18^\circ.$$

Минимальная кинетическая энергия электронов, которые могут создать излучение Вавилова – Черенкова, находится по формуле:

$$K^{\min} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right), \quad (21.115)$$

где m_0 – масса покоя электрона, а

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{v_q^{\min}}{c} = \frac{1}{n}. \quad (21.116)$$

Тогда по формуле (21.115) с учетом (21.116)

$$K^{\min} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}} - 1 \right).$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$K = 0,511 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1,6}\right)^2}} - 1 \right) = 0,144 \text{ МэВ.}$$

Пример 21.5. Приемник радиолокатора регистрирует частоту биений $\Delta\nu = 4$ кГц. Определите скорость приближающейся к локатору ракеты, если передатчик локатора работает на частоте $\nu_0 = 600$ МГц.

Решение

Доплеровское смещение частоты (частота биений) есть разность между частотой ν_2 регистрируемого приемником локатора сигнала, отраженного от движущейся ракеты, и частотой сигнала ν_0 , излучаемого источником (передатчиком локатора):

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_0. \quad (21.117)$$

Частота сигнала в системе отсчета, связанной с движущейся ракетой, равна

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \varphi)}, \quad (21.118)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (21.119)$$

Частота сигнала, регистрируемого приемником локатора, равна

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \varphi)}. \quad (21.120)$$

При приближении ракеты к локатору угол φ между вектором \vec{v} и вектором \vec{R} (см. рис. 21.8) равен нулю.

Тогда с учетом (21.118) и (21.119) формула (21.120) может быть записана в виде:

$$\nu_2 = \nu_0 \frac{1}{\gamma^2(1 - \beta)^2} = \nu_0 \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)^2} = \nu_0 \frac{1 + \beta}{1 - \beta}. \quad (21.121)$$

Таким образом, частота биений (21.117) равна:

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_0 = \nu_0 \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right) = \nu_0 \frac{1 + \beta - 1 + \beta}{1 - \beta} = \nu_0 \frac{2\beta}{1 - \beta},$$

отсюда

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\Delta\nu}{2\nu_0 + \Delta\nu}.$$

Искомая скорость ракеты:

$$v = \frac{c\Delta v}{2m_0 + \Delta v}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$v = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 6 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^3} \approx 1 \text{ км/с.}$$

Пример 21.6. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Показатель преломления стекла $n_2 = 1,50$. Отраженный от пластины пучок света составляет угол $\varphi = 97^\circ$ с падающим пучком. Определите показатель преломления n_1 жидкости, если отраженный свет полностью поляризован.

Решение

Согласно закону Брюстера (21.76) свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения

$$\operatorname{tg}(i_{\text{Бр}}) = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (21.122)$$

где n_{21} – относительный показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

Согласно условию задачи отраженный луч повернут на угол φ относительно падающего луча. Так как угол падения равен углу отражения, то $i_1 = \varphi/2$ и, следовательно, $\operatorname{tg}(\varphi/2) = n_2/n_1$, откуда показатель преломления жидкости будет равен

$$n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} \quad (21.123)$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$n_1 = 1,33.$$

Глава 22. ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

22.1. Интерференция волн

Принцип суперпозиции (принцип независимого наложения волн): если в пространстве одновременно распространяются несколько волн, то колебание в каждой точке оказывается *геометрической суммой колебаний*, которые совершались бы при распространении каждой волны в отдельности.

Когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают *постоянной разностью фаз*, волны называются *когерентными*.

При суперпозиции когерентных волн возникает явление *интерференции*.

Условия интерференции волн:

1. Монохроматические волны: $\omega_1 = \omega_2$ ($\lambda_1 = \lambda_2$).
2. Коллинеарные волны: колебания в них происходят в одной и той же плоскости или вдоль одного и того же направления (одинаково поляризованные волны).

22.1.1. Суперпозиция волн по схеме Юнга

Рассмотрим суперпозицию волн на большом расстоянии от двух точечных источников волн Ψ_1 и Ψ_2 (рис. 22.1): расстояние между источниками d много меньше, чем расстояние ℓ от источников до экрана. При этом фронт любой волны, приходящей в т. P , можно считать плоским.

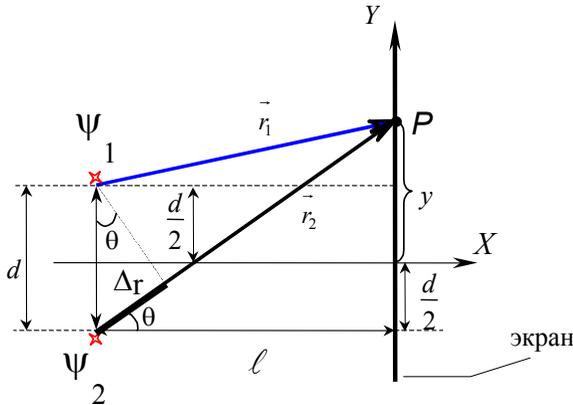


Рис. 22.1. Схема Юнга

Геометрическая разность хода лучей (волн)

$$r_2 - r_1 = \Delta r. \quad (22.1)$$

Из рисунка 22.1 видно, что

$$\sin \theta = \frac{\Delta r}{d} \quad \text{и} \quad \text{tg} \theta = \frac{y}{\ell}, \quad (22.2)$$

где y – ордината точки P , в которой происходит суперпозиция волн.

Так как $l \gg d$, то θ – мал и $\sin \theta \approx \text{tg} \theta$. Следовательно,

$$\frac{y}{\ell} = \frac{\Delta r}{d}. \quad (22.3)$$

Пусть в точку P от источников Ψ_1 и Ψ_2 приходят две плоские волны:

$$\psi_1 = A_1 \cos \Phi_1 = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad (22.4)$$

где $\varphi_1 = kr_1 - \alpha_1$,

и

$$\psi_2 = A_2 \cos \Phi_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2), \quad (22.5)$$

где $\varphi_2 = kr_2 - \alpha_2$.

В результате суперпозиции этих волн в точке P возникает колебание

$$\psi = \psi_1 + \psi_2. \quad (22.6)$$

Для расчета амплитуды и фазы результирующего колебания используем векторную диаграмму (рис. 22.2).

$$\psi = A \cos \Phi = A \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{где} \quad \varphi = kr - \alpha.$$

По теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi. \quad (22.7)$$

Так как интенсивность есть модуль среднего значения вектора Пойнтинга, то есть $I \sim \overline{A^2}$, то интенсивность результирующей волны равна

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \Delta\varphi. \quad (22.8)$$

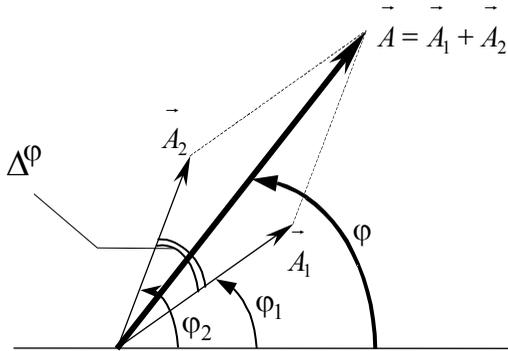


Рис. 22.2. Векторная диаграмма

22.1.1.1. Суперпозиция некогерентных волн

Когда разность фаз зависит от времени $\Delta\varphi = f(t)$ или время усреднения значительно превосходит время когерентности ($\sim 10^{-8}$ с), то $\overline{\cos \Delta\varphi} = 0$ и

$$I = I_1 + I_2. \quad (22.9)$$

22.1.1.2. Суперпозиция когерентных волн (интерференция волн)

Когда разность фаз не зависит от времени $\Delta\varphi \neq f(t)$ или время усреднения значительно меньше времени когерентности $\sim 10^{-8}$, то

$$\Delta\varphi = k\Delta r + \Delta\alpha = \text{const}, \quad (22.10)$$

где Δr – геометрическая разность хода (см. рис. 22.1);

$\Delta\alpha$ – разность начальных фаз.

Предположим, что $\Delta\alpha = 0$. Тогда

$$\Delta\varphi = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r. \quad (22.11)$$

Условие максимума интерференции (происходит взаимное усиление волн – рис. 22.3, а):

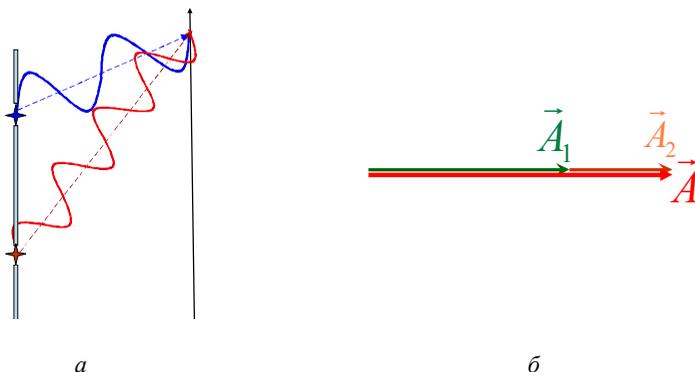


Рис. 22.3. Усиление волн: а – суперпозиция волн; б – векторная диаграмма

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= \pm 2m\pi, \\ \Delta r &= \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (22.12)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Амплитуда и интенсивность результирующей волны в точке P (рис. 22.3, б):

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2, \\ I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}. \end{aligned} \right\} \quad (22.13)$$

Если $A_1 = A_2 = A_0$, то $A = 2A_0$ и $I = 4I_0$.

Условие минимума интерференции (происходит взаимное ослабление волн – рис. 22.4, а):

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= \pm(2m+1)\pi, \\ \Delta r &= \pm(2m+1) \frac{\lambda}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (22.14)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

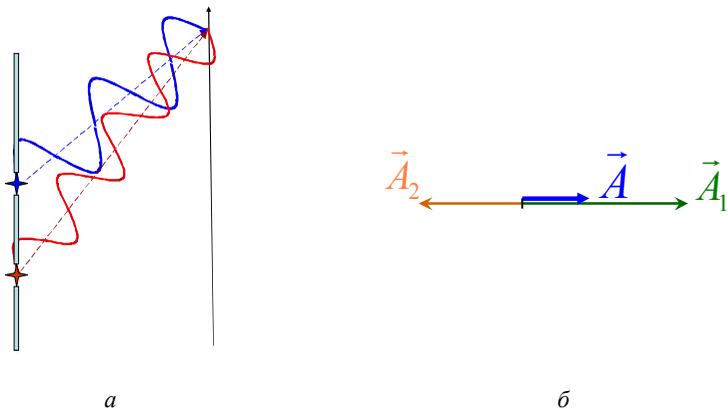


Рис. 22.4. Ослабление волн: *a* – суперпозиция волн; *б* – векторная диаграмма

Амплитуда и интенсивность результирующей волны в точке P (рис. 22.4, *б*):

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2, \\ I &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}. \end{aligned} \right\} \quad (22.15)$$

Если $A_1 = A_2 = A_0$, то $A = 0$ и $I = 0$.

Ординаты максимумов и минимумов на экране в опыте Юнга (рис. 22.5):

$$\left. \begin{aligned} y_m^{\max} &= \left[\pm 2m \frac{\lambda}{2} \right] \frac{\ell}{d}, \\ y_m^{\min} &= \left[\pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \right] \frac{\ell}{d}. \end{aligned} \right\} \quad (22.16)$$

Ширина интерференционного максимума:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_{m+1}^{\min} - y_m^{\min} = \left[\pm (2(m+1) + 1) \frac{\lambda}{2} \right] \frac{\ell}{d} - \\ &- \left[\pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \right] \frac{\ell}{d} = \frac{\lambda \ell}{d}. \end{aligned} \quad (22.17)$$

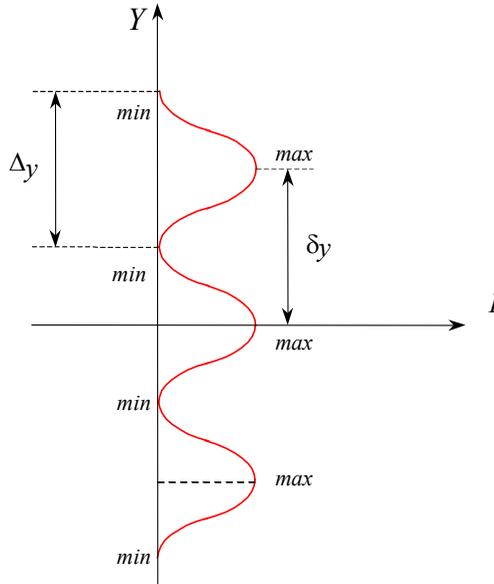


Рис. 22.5. Распределение интенсивности при интерференции волн

Расстояние между интерференционными максимумами (полосами):

$$\delta y = y_{m+1}^{\max} - y_m^{\max} = \left[\pm 2(m+1) \frac{\lambda}{2} \right] \frac{\ell}{d} - \left[\pm 2m \frac{\lambda}{2} \right] \frac{\ell}{d} = \frac{\lambda \ell}{d}. \quad (22.18)$$

Следовательно,
$$\Delta y \equiv \delta y = \frac{\lambda \ell}{d}. \quad (22.19)$$

Заключение. При суперпозиции когерентных волн, т.е. при интерференции, происходит перераспределение энергии (интенсивности). В результате этого в одних точках пространства возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности, т.е. нет нарушения закона сохранения энергии:

$$\underbrace{\left(I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \right)}_{\text{ослабление (min)}} < \underbrace{\left(I_1 + I_2 \right)}_{\text{фон}} < \underbrace{\left(I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \right)}_{\text{усиление (max)}}. \quad (22.20)$$

22.1.2. Интерференция света в тонких пластинках (пленках)

Условие задачи:

- 1) монохроматическая падающая волна (длина волны λ);
- 2) пленка в воздухе (показатели преломления среды над и под пленкой $n_1 = n_3 = 1$).

Волна падает под углом i_1 на тонкую плоско-параллельную пластину (пленку), показатель преломления которой равен n_2 .

В точке O (рис. 22.6) волна разделяется на преломленную (луч OA) и отраженную (луч OM).

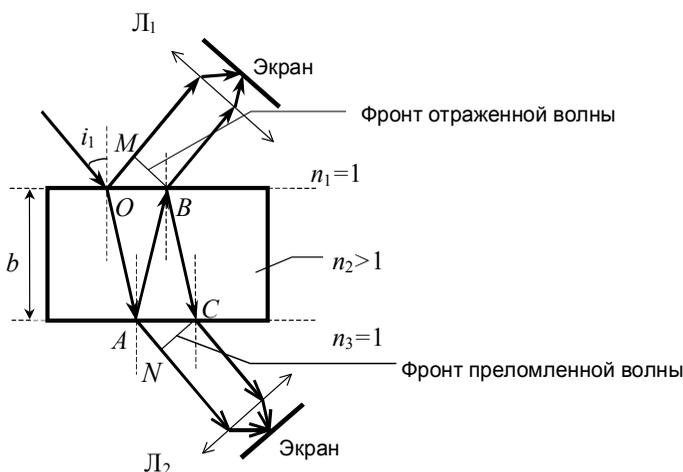


Рис. 22.6. Интерференция света в тонких пластинках (пленках):
 L_1, L_2 – фокусирующие линзы; i_1 – угол падения, b – толщина пленки;
 n_2 – показатель преломления вещества пленки;
 $OM = AN$ и $OA = AB = BC$

После отражений внутри пленки в точках A и B и преломлений на границах раздела «пленка – воздух» в точках A, B и C происходит интерференция как отраженных волн, так и преломленных.

Оптическая разность хода равна:

в отраженном свете

$$\Delta l^{\text{отр}} = n_2(OA + AB) - (OM)n_1 = n_2(OA + AB) - (OM); \quad (22.21)$$

в проходящем свете

$$\Delta \ell^{\text{пр}} = n_2(AB + BC) - (AN)n_3 = n_2(AB + BC) - (AN). \quad (22.22)$$

Можно показать, что

$$\Delta \ell^{\text{отр}} = \Delta \ell^{\text{пр}} = \Delta \ell = 2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1}. \quad (22.23)$$

Полная оптическая разность хода:

$$\Delta L = \Delta \ell \pm \delta \ell. \quad (22.24)$$

В рассматриваемом примере:

в отраженном свете при отражении в точке O –

$$\delta \ell = \pm \frac{\lambda}{2};$$

$$\Delta L = 2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda}{2} = \pm k \frac{\lambda}{2}, \quad (22.25)$$

$$k = \begin{cases} 2m \rightarrow \text{max,} \\ 2m + 1 \rightarrow \text{min;} \end{cases}$$

в проходящем свете при отражении в точке A –

$$\delta \ell = 0,$$

$$\Delta L = 2d\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} = \pm k \frac{\lambda}{2}, \quad (22.26)$$

$$k = \begin{cases} 2m \rightarrow \text{max,} \\ (2m + 1) \rightarrow \text{min.} \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. При отражении от оптически более плотной среды (среды с большим показателем преломления) фаза волны (светового вектора \vec{E}) меняется на $\pm\pi$ (рис. 22.7), что соответствует изменению оптической длины пути на $\delta \ell = \pm \frac{\lambda}{2}$.

Обычно при решении задач принято считать, что в указанных выше случаях половина волны «теряется».

При отражении от оптически менее плотной среды $\delta \ell = 0$.

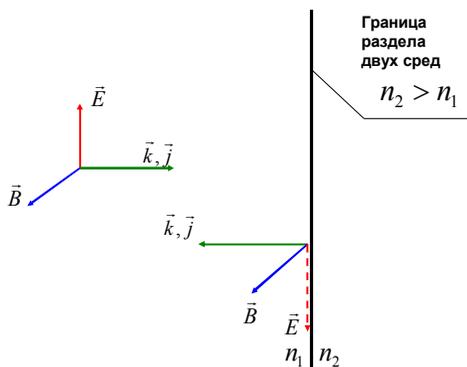


Рис. 22.7. Отражение световой волны от оптически более плотной среды

22.1.3. Интерференционные полосы равной толщины – кольца Ньютона

Кольца Ньютона наблюдаются в опыте, схема которого представлена на рис. 22.8а. Плоско-выпуклая линза обращена выпуклой поверхностью с большим радиусом кривизны R к пластине и соприкасается с ней. При падении света по нормали на плоскую поверхность линзы (луч 1) свет частично отражается от верхней (луч 2) и нижней (луч 3) поверхностей воздушного промежутка (клина) между линзой и пластиной. Для луча света, проходящего через линзу характерна определенная толщина воздушного клина b . Отраженные световые волны (лучи 2 и 3) будут когерентными до тех пор, пока выполняется условие когерентности волн. Так как верхняя и нижняя поверхности клина не параллельны (рис.22.8а), то отраженные от них волны пересекутся вблизи поверхности клина. При наложении этих отраженных когерентных волн образуется интерференционная картина, в центре которой находится темное пятно (кольцо нулевого порядка) и вокруг него система чередующихся светлых и темных колец с радиусами r_m . Ширина и интенсивность этих колец убывает по мере удаления от центрального пятна. При нормальном падении света полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей, при наклонном падении – эллипсов.

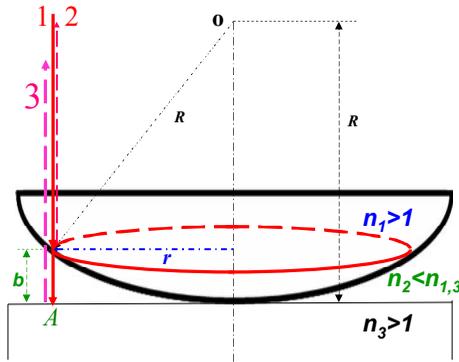


Рис. 22.86. Наблюдение колец Ньютона в отраженном свете: ход лучей [к выводу формулы (22.28)]

Так как каждое из колец Ньютона образуется в результате интерференции волн, отраженных от участков клина одинаковой толщины, эти кольца относятся к **интерференционным полосам равной толщины**. Вследствие большой толщины пластины и линзы (по сравнению с толщиной воздушного клина) интерференционных колец за счет отражений от других поверхностей не наблюдается.

Из рис. 22.86 следует, что *полную оптическую разность хода* лучей, отраженных от верхней и нижней поверхностей воздушного клина на произвольном расстоянии r_m от точки O с достаточной степенью точности можно считать равной

$$2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2} = \pm k \frac{\lambda}{2}$$

$$i_1 = 0$$

$$2bn_2 - \frac{\lambda}{2} = \pm k \frac{\lambda}{2}, \quad (22.27)$$

где $n_2 = n_{\text{воздуха}} = 1$;

b – толщина клина;

слагаемое $(-\lambda/2)$ обусловлено изменением фазы световой волны при отражении в т. A от границы раздела сред: оптически менее плотной (воздух) и оптически более плотной (стекло) – см. (22.24).

Как указывалось выше, при этом между волнами возникает дополнительная разность фаз, равная $\pm\pi$, которую можно учесть добав-

лением к разности хода лучей ΔL (или вычтя из нее) половину длины волны света в вакууме.

Радиусы колец Ньютона определяются следующим образом² (см. рис. 22.8б):

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 + (R - b)^2 \\ R^2 &= r^2 + R^2 - 2Rb + b^2 \\ b^2 &\ll 2Rb; \quad b^2 \ll r^2 \\ 2Rb &= r^2, \end{aligned} \tag{22.28}$$

где R – радиус кривизны линзы;

b – толщина воздушного клина, соответствующего данному номеру кольца.

Ввиду малости b можно пренебречь величиной b^2 по сравнению с $2Rb$. Тогда из (22.27) и (22.28) следует, что

$$\Delta L = \frac{r_m^2}{R} - \frac{\lambda}{2}, \tag{22.29}$$

и для *светлых* колец в отраженном свете будем иметь:

$$r_m^2 = R \frac{\lambda}{2} (2m - 1), \tag{22.30}$$

где r_m – радиус m -го кольца;

$m = (1, 2, \dots)$.

Измерив в эксперименте диаметры колец Ньютона, можно по формуле (22.30) при заданной длине волны падающего на линзу света, определить радиус кривизны линзы:

$$R = \frac{d_m^2}{4(2m - 1) \frac{\lambda}{2}}, \tag{22.31}$$

а зная кривизну линзы и измерив диаметры колец Ньютона, можно определить неизвестную длину волны падающего на линзу света.

² При этом расчете мы предполагаем, что верхняя и нижняя поверхности клина параллельны, т.е. мы считаем кривизну линзы достаточно малой.

Правильная форма колец Ньютона легко искажается при всяких, даже незначительных, дефектах в обработке выпуклой поверхности линзы и верхней поверхности пластины. Наблюдения формы колец Ньютона позволяют осуществлять быстрый и весьма точный контроль качества шлифовки плоских пластин и линз, а также близость поверхностей последних к сферической форме.

22.2. Стоячие волны

Стоячие волны образуются в результате интерференции двух встречных плоских волн (например, падающей и отраженной волн).

22.2.1. Общая задача

Рассмотрим волну

$$\Psi_1 = A \cos(\omega t - kx), \quad (22.32)$$

падающую на границу раздела двух сред I и II. При ее отражении от границы образуется встречная (отраженная) волна

$$\Psi_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha). \quad (22.33)$$

Разность фаз $\alpha = 0$, если волна Ψ_1 отразилась от менее плотной среды

- для упругих волн акустическое (волновое) сопротивление $\rho_2 v_2 < \rho_1 v_1$,
- для электромагнитных волн показатель преломления $n_2 < n_1$.

Разность фаз $\alpha = \pi$, если волна Ψ_1 отразилась от более плотной среды

- для упругих волн акустическое (волновое) сопротивление $\rho_2 v_2 > \rho_1 v_1$,
- для электромагнитных волн показатель преломления $n_2 > n_1$.

При интерференции встречных волн Ψ_1 и Ψ_2 образуется результирующая волна:

$$\Psi(x, t) = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (22.34)$$

Если разность фаз $\alpha = 0$, то

$$\Psi(x, t) = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos(kx) \cos(\omega t). \quad (22.35)$$

Если разность фаз $\alpha = \pi$, то

$$\Psi(x, t) = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \sin(kx) \sin(\omega t). \quad (22.36)$$

Рассмотрим результат интерференции бегущей волны Ψ_1 и волны Ψ_2 , отраженной от более плотной среды:

$$\Psi(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t) = B(x) \sin(\omega t). \quad (22.37)$$

Это уравнение можно интерпретировать как колебание, амплитуда которого распределена в пространстве (рис. 22.9) в соответствии с уравнением

$$B(x) = |2A \sin(kx)|. \quad (22.38)$$

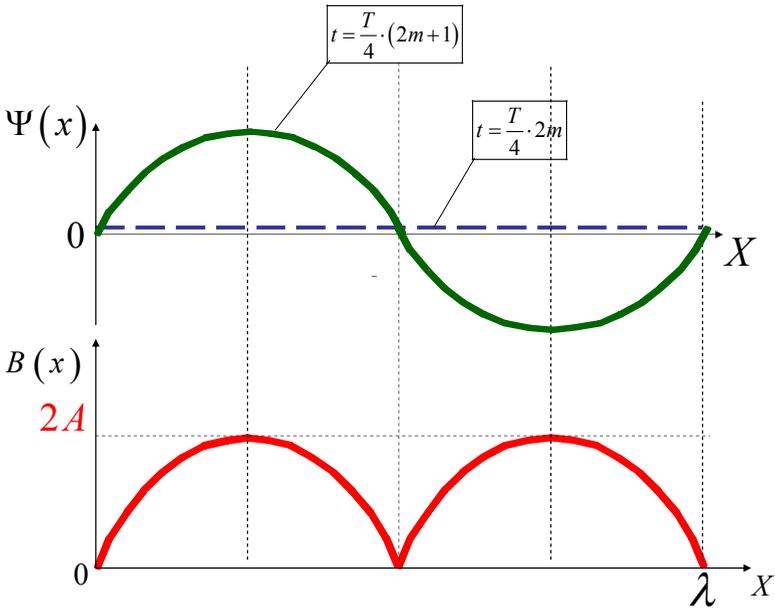


Рис. 22.9. Волновая функция $\Psi(x)$ и амплитуда $B(x)$ стоячей волны

В точках пространства, определяемых условием

$$\sin(kx) = 0 \Rightarrow kx = 2m \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = 2m \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2m \frac{\lambda}{4}, \quad (22.39)$$

располагаются так называемые **узлы** волны, в которых амплитуда B всегда равна нулю и $\Psi = 0$ вне зависимости от времени.

В точках пространства, определяемых условием

$$\begin{aligned} \sin(kx) = 1 &\Rightarrow kx = (2m+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = (2m+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}, \end{aligned} \quad (22.40)$$

располагаются так называемые **пучности** волны, в которых амплитуда B максимальна, т.е. $B = 2A$. В этих точках в моменты времени, определяемые условием

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) = 1 &\Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}(2m+1) \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{2}(2m+1) \Rightarrow, \\ &\Rightarrow t = \frac{T}{4}(2m+1) \end{aligned} \quad (22.41)$$

волновая функция

$$\psi = B \sin(\omega t) = 2A \sin(\omega t) = 2A. \quad (22.42)$$

В этих же точках в иные моменты времени, определяемые условием

$$\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}(2m) \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{2}(2m) \Rightarrow t = \frac{T}{4}(2m), \quad (22.43)$$

волновая функция

$$\psi = B \sin(\omega t) = 2A \sin(\omega t) = 0. \quad (22.44)$$

В остальных точках пространства амплитуда волны может изменяться в пределах

$$0 < B < 2A.$$

Таким образом, образовавшаяся в результате интерференции волна является *стоячей* – через узлы энергия не переносится. Именно это отличает стоячую волну от обычной – *бегущей*, переносящей энергию «сквозь пространство».

22.2.2. Стоячие волны в ограниченных средах

Рассмотрим распространение упругой волны вдоль натянутой струны (стержня) или в трубе (волноводе).

Краевые условия:

– в точках закрепления струны или стержня, а также на заглушках труб, всегда возникают *узлы* стоячей волны (в этих местах волна отражается от более плотной среды);

– на свободных концах стержня и на открытых концах труб всегда возникают *пучности* стоячей волны (в этих местах волна отражается от менее плотной среды).

Пример 1. Труба закрыта с обоих концов (струна или стержень закреплены на обоих концах).

В общем случае на всей длине стержня укладывается целое число полуволен (рис. 22.10), а именно

$$\ell = m \frac{\lambda_m}{2}, \quad (22.45)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Отсюда длины волн

$$\lambda_m = \frac{2\ell}{m}, \quad (22.46)$$

а частоты волн

$$\nu_m = \frac{u}{\lambda_m} = \frac{u}{2\ell} m. \quad (22.47)$$

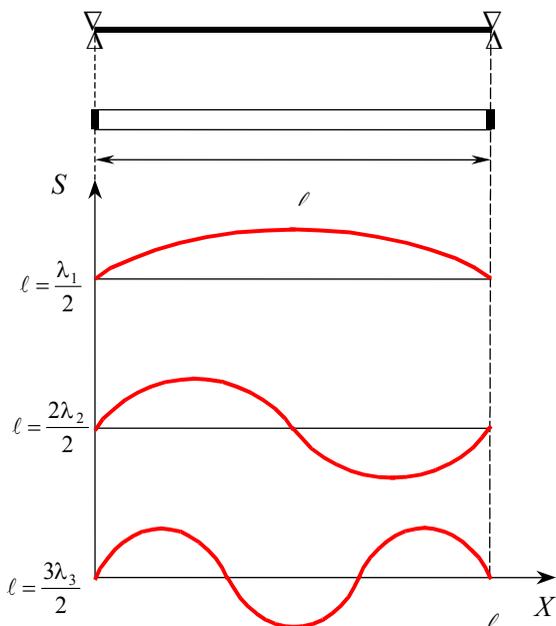


Рис. 22.10. Стоячие волны в трубе, закрытой с обоих концов
(в стержне, закрепленном на обоих концах)

Пример 2. Труба открыта с обоих концов.

В общем случае в трубе укладывается целое число полуволин (рис. 22.11), а именно

$$\ell = m \frac{\lambda_m}{2}, \quad (22.48)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Отсюда длины волн

$$\lambda_m = \frac{2\ell}{m}, \quad (22.49)$$

а частоты волн

$$\nu_m = \frac{u}{\lambda_m} = \frac{u}{2\ell} m. \quad (22.50)$$

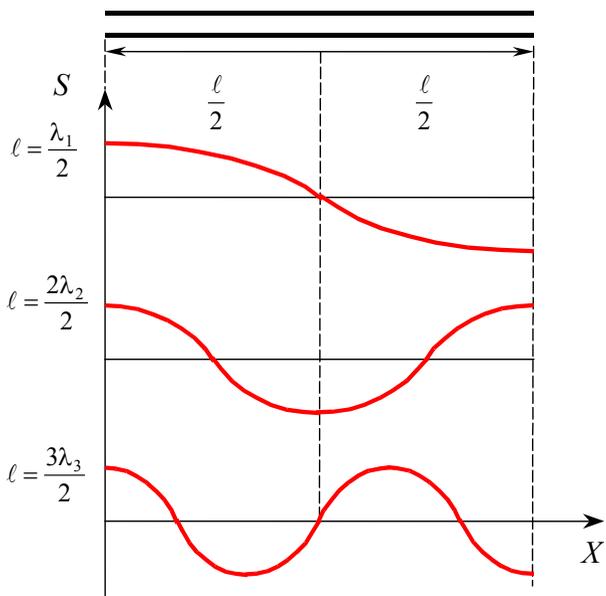


Рис. 22.11. Стоячие волны в трубе, открытой с обоих концов

Пример 3. Стержень закреплен в средней точке – рис. 22.12.

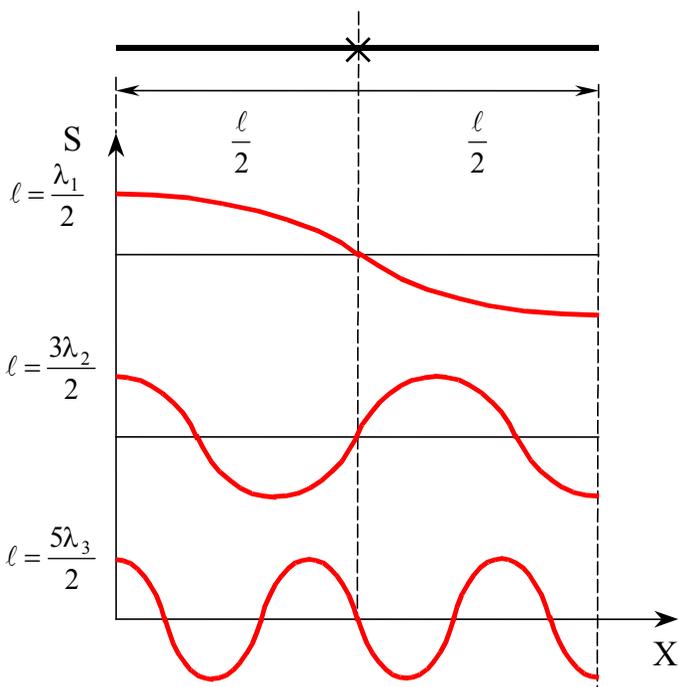


Рис. 22.12. Стоячие волны в стержне, закрепленном в средней точке

В общем случае на длине стержня укладывается нечетное число полуволен, а именно

$$l = (2m - 1) \cdot \frac{\lambda_m}{2},$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Отсюда длины волн

$$\lambda_m = \frac{2l}{(2m - 1)},$$

а частоты волн

$$\nu_m = \frac{x}{\lambda_m} = \frac{x}{2l} \cdot (2m - 1).$$

Пример 4. Стержень закреплен консольно (труба открыта с одного конца) – рис. 22.13.

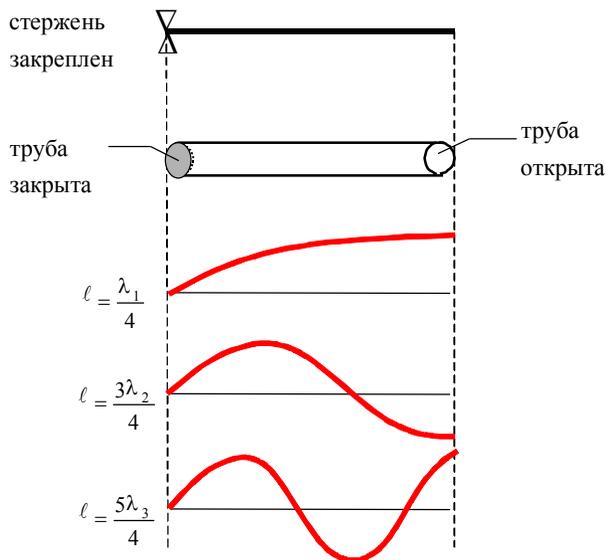


Рис. 22.13. Стоячая волна в консольно закрепленном стержне (или в трубе открытой с одного конца)

В общем случае в трубе (на длине стержня) укладывается нечетное число четвертей волны, а именно

$$\ell = (2m - 1) \cdot \frac{\lambda_m}{4},$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Отсюда длины волн

$$\lambda_m = \frac{4\ell}{(2m - 1)},$$

а частоты волн

$$v_m = \frac{x}{\lambda_m} = \frac{x}{4\ell} \cdot (2m-1).$$

Наименьшие возможные частоты стоячих волн (при $m = 1$) называются *основными*, более высокие частоты называются *обертонами*.

Закключение. В любой колебательной системе с определенными краевыми условиями возможны стоячие волны (и упругие, и электромагнитные, и волны де Бройля и т.д.) только определенных частот, т.е. наблюдается *квантование частот*.

22.3. Дифракция волн

22.3.1. Понятие дифракции

Дифракция волн – отклонение от прямолинейного распространения при движении волн в среде с неоднородностями. Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени.

В пределе при $\lambda \rightarrow 0$ законы волновой оптики переходят в законы геометрической оптики. Следовательно, отклонения от законов геометрической оптики при прочих равных условиях оказываются тем меньше, чем меньше длина волны (**рис. 22.14 а,б,в**).

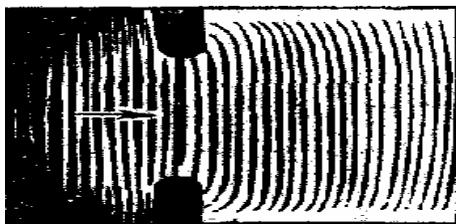


Рис. 22.14а. Картина распространения волн, возникающая при падении плоских волн на щель, если ширина щели велика по сравнению с длиной падающей волны: последняя проходит через щель почти без искажений (вблизи краев заметна дифракция)

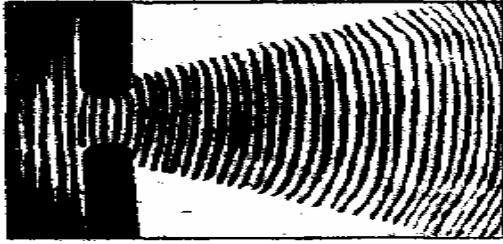


Рис. 22.146. Картина распространения волн, возникающая при падении плоских волн на щель, если ширина щели сравнима с длиной волны: отчетливо наблюдается *дифракция* – волны огибают щель

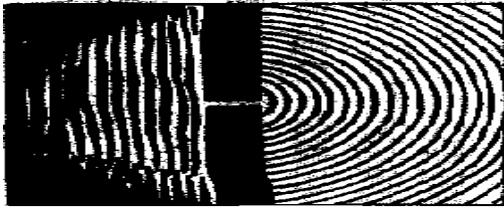


Рис. 22.14в. Картина распространения волн, возникающая при падении плоских волн на щель, если ширина щели меньше длины волны: возникают сферические волны, как бы испущенные точечным источником, расположенным в щели (по Гюйгенсу), и распространяющиеся во все стороны за щелью

В чем различие между интерференционной и дифракционной картинами? Реального физического различия между ними нет. Оба явления заключаются в перераспределении интенсивности светового потока в результате суперпозиции волн. В силу исторических причин распределение амплитуды или интенсивности, появляющееся вследствие суперпозиции вкладов от конечного числа *отдельных* (дискретно расположенных) когерентных источников, обычно называется *интерференционной* картиной. Распределение амплитуды или интенсивности, вызванное суперпозицией вкладов от расположенных «непрерывно» друг за другом когерентных источников, называют *дифракционной* картиной. Поэтому говорят об интерференционной картине от двух узких щелей и о дифракционной картине от одной широкой щели или о комбинированной (интерференционной и дифракционной) картине от двух широких щелей.

22.3.2. Принцип Гюйгенса – Френеля

В геометрической оптике широко пользуются понятием светового луча, т.е. узкого пучка света, распространяющегося прямолинейно. Прямолинейность распространения света в однородной среде настолько привычна, что кажется самоочевидной. Убедительным подтверждением этого закона может служить образование тени позади непрозрачного препятствия, находящегося на пути света, излучаемого точечным источником. Границы тени определяются лучами света, которые проходят мимо препятствия, касаясь его поверхности.

Закон прямолинейного распространения света не является универсальным. Но прямолинейность распространения света вовсе не столь очевидна с позиций волновой теории. Этот закон особенно заметно нарушается при прохождении света сквозь достаточно узкие щели и отверстия, а также при освещении небольших непрозрачных препятствий. В этих случаях на экране, установленном позади отверстий или препятствий, вместо четко разграниченных областей света и тени наблюдается система интерференционных максимумов и минимумов освещенности, т.е. наблюдается *дифракция*.

Проникновение света в область геометрической тени объясняет принцип Гюйгенса.

По *принципу Гюйгенса* каждую точку поля волны можно рассматривать как источник вторичных волн, распространяющихся вперед по всем направлениям, в том числе и в область геометрической тени препятствия.

Огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент. Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис. 22.15). По Гюйгенсу каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит центром вторичных волн, которые в однородной и изотропной среде будут сферическими. Построив огибающую вторичных волн, мы убеждаемся в том, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени (на рисунке границы этой области показаны пунктиром), огибая края преграды.

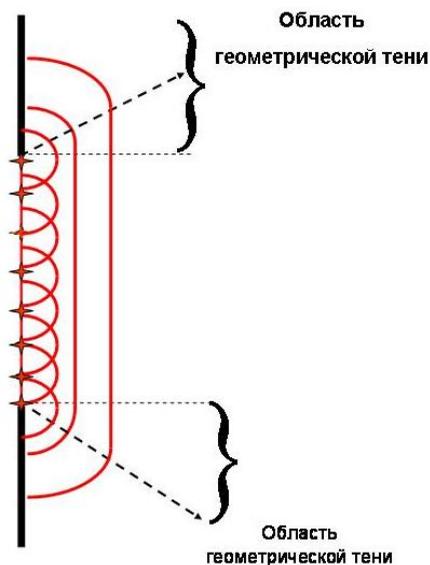


Рис. 22.15. Построение (по Гюйгенсу) фронта волны, прошедшей через отверстие

Принцип Гюйгенса не дает никаких указаний об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Этот недостаток был устранен Френелем.

При рассмотрении дифракции света Френель исходил из нескольких основных утверждений, *принимаемых без доказательства* и составляющих содержание так называемого **принципа Гюйгенса – Френеля**:

1. Реальный источник излучения можно заменить эквивалентной ему системой фиктивных (или виртуальных) вторичных источников и возбуждаемых ими вторичных волн.

2. Вторичные источники, эквивалентные одному и тому же источнику, *когерентны* между собой и колеблются в одной фазе.

3. Мощности вторичного излучения равных по площади участков волновой поверхности одинаковы.

4. Каждый вторичный источник излучает свет преимущественно в направлении внешней нормали \vec{n} к волновой поверхности в этой точке: амплитуда вторичных волн в направлении, составляющем с \vec{n} угол α , тем меньше, чем больше угол α , и равна нулю при $\alpha = \pi/2$.

5. В том случае, когда часть волновой поверхности прикрыта непрозрачными экранами, вторичные волны излучаются только *открытыми* участками этой поверхности.

22.3.3. Дифракция сферических волн на круглом отверстии (дифракция Френеля)

Рассмотрим дифракцию сферической волны на круглом отверстии BC в непрозрачном экране (рис. 22.16).

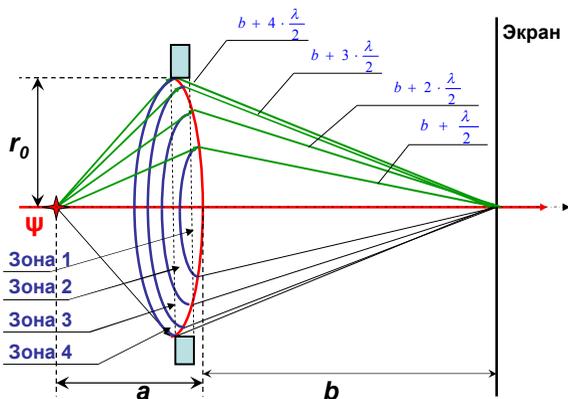


Рис. 22.16. Разбиение сферической волновой поверхности (волнового фронта) на зоны Френеля

Дифракционная картина наблюдается на экране, параллельном плоскости отверстия и находящемся от него на расстоянии $L = a + b$. Вопрос о том, что будет наблюдаться в точке P , лежащей против центра отверстия, легко разрешается путем построения на открытой части BC фронта волны *кольцевых зон*, соответствующих точке P . Эти зоны строятся так, что расстояния от краев каждой зоны до точки P отличаются на $\lambda/2$ (λ – длина волны в той среде, в которой распространяется волна). Обладающие таким свойством кольцевые зоны называются *зонами Френеля*. Внутренняя структура зоны Френеля показана на рис. 22.17.

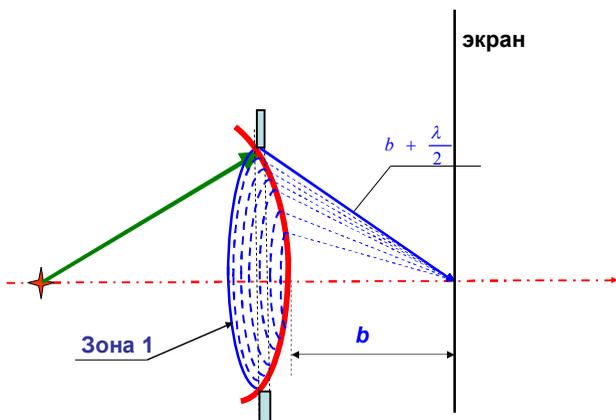


Рис. 22.17. Внутренняя структура зоны Френеля

Границей первой (центральной) зоны служат точки сферической волновой поверхности, находящиеся на расстоянии $(b + \lambda/2)$ от точки P . Точки волновой поверхности, находящиеся на расстояниях $L = [b + m(\lambda/2)]$ от точки P , образуют границы m -х зон Френеля ($m = 1, 2, \dots$). Очевидно, что колебания, возбуждаемые в точке P двумя соседними зонами, противоположны по фазе, так как разность хода от этих зон до точки P равна $\lambda/2$. Поэтому при наложении эти колебания должны взаимно ослаблять друг друга:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots,$$

где A_1, A_2 и т.д. – амплитуды колебаний, возбуждаемых порознь 1-й, 2-й и т.д. зонами, A – амплитуда результирующих колебаний. Величина A зависит от площади m -й зоны и угла φ между внешней нормалью к поверхности зоны в какой-либо ее точке и прямой, направленной из этой точки в точку P (рис. 22.18)

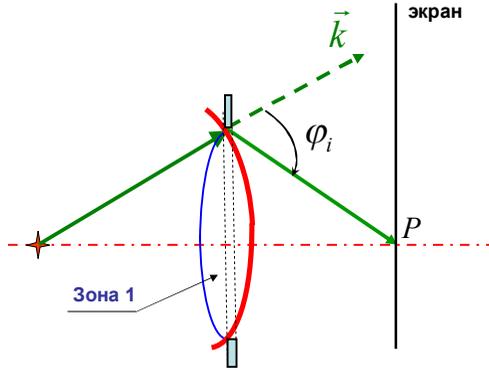


Рис. 22.18. Влияние угла φ на амплитуду колебаний

Можно показать, что зоны Френеля равновелики и следовательно, величина A зависит лишь от угла φ , уменьшаясь с увеличением последнего. Поэтому амплитуда, создаваемая в точке P всем сферическим фронтом, равна половине амплитуды, создаваемой лишь центральной ($m = 1$) зоной:

$$A = \frac{A_1}{2}.$$

В общем случае амплитуда результирующих колебаний в точке будет зависеть от *четности* или *нечетности* номера m зоны Френеля:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - \dots (-1)^{m-1} A_m = \begin{cases} \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2}, & m - \text{нечетное}, \\ \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m, & m - \text{четное}. \end{cases}$$

При нечетном m в точке P будет наблюдаться *максимум*, при четном m – *минимум*. На рис. 22.19, *а-г* показаны результаты дифракции при открытых четных и нечетных зонах Френеля. На рис.22.20, *а-б* показаны результаты дифракции при четном и нечетном числе открытых зон.

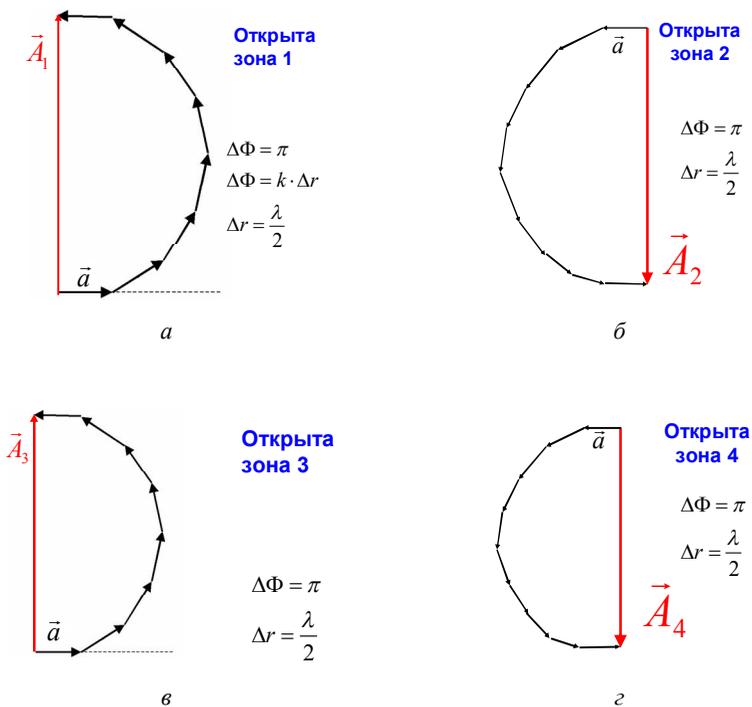
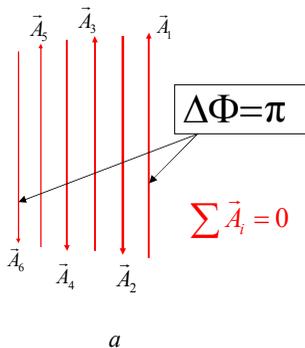


Рис. 22.19. Векторные диаграммы для результатов дифракции при открытых нечетных и четных зонах

Открыто **четное** число зон



Открыто **нечетное** число зон

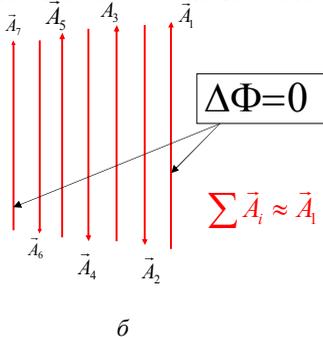


Рис. 22.20. Векторные диаграммы для результатов дифракции при четном и нечетном числе открытых зон

Поскольку колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе, ослабляя друг друга, можно поставить на пути света *пластинку* (рис.22.21а), которая перекрывала бы все четные или все нечетные зоны. Тогда в точке P амплитуда световых волн будет в N раз превосходить амплитуду волны от одной первой зоны (рис.22.21б), а интенсивность света будет больше в N^2 раз. Такая пластинка (*зонная пластинка*) будет действовать подобно собирающей линзе.

Если поместить между источником света и экраном непрозрачный диск рис. 22.22, то при небольшом числе закрытых зон результирующая амплитуда мало отличается от амплитуды центральной зоны A_1 . Поэтому интенсивность в центре экрана будет почти такая же, как и в отсутствие преграды, – в центре картины находится светлое пятно – «пятно Пуассона». Этот эффект огибания преграды является лучшим подтверждением волновой природы света.

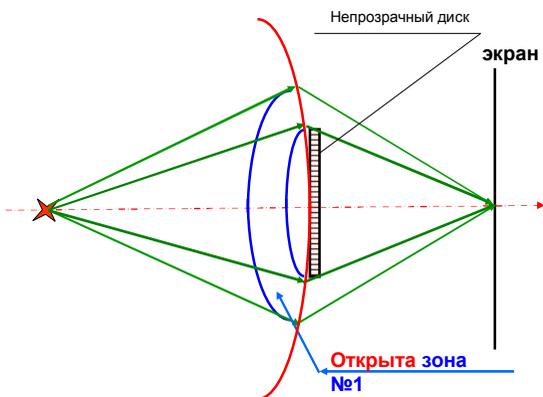


Рис. 22.22. Эффект огибания преграды

22.3.4. Дифракция плоских световых волн (дифракция Фраунгофера) на бесконечно длинной узкой прямоугольной щели

Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической волны на щели. Щелью будем называть прямоугольное отверстие, ширина которого во много раз меньше его длины. Обозначим ширину щели b (рис. 22.23).

Световая волна длиной λ падает нормально к плоскости щели. За щелью установлена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Параллельный пучок лучей, пройдя сквозь щель, дифрагирует под разными углами вправо и влево от первоначального направления. Линза собирает параллельные пучки дифрагированных лучей в соответствующих точках экрана. Тип дифракции, при котором рассматривается дифракционная картина, образованная параллельными лучами, получил название дифракции в параллельных лучах, или *дифракции Фраунгофера*.

Разбиваем открытый участок AB фронта волны на N элементарных зон (рис. 22.23):



Рис. 22.23. Зоны Шустера на открытом участке фронта в щели

Интерференция вторичных волн, испускаемых всеми элементарными зонами Шустера в щели, – это так называемая *многолучевая интерференция*. Для сложения колебаний применим метод векторных диаграмм (см.20.5).

Результирующая амплитуда волн, испускаемых N элементарными зонами,

$$\vec{A}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{a}_{0(i)},$$

где $\vec{a}_{0(i)}$ – амплитуда волны, испускаемой одной элементарной зоной.

Волны, чьи волновые векторы параллельны главной оптической оси собирающей линзы (рис.22.24),

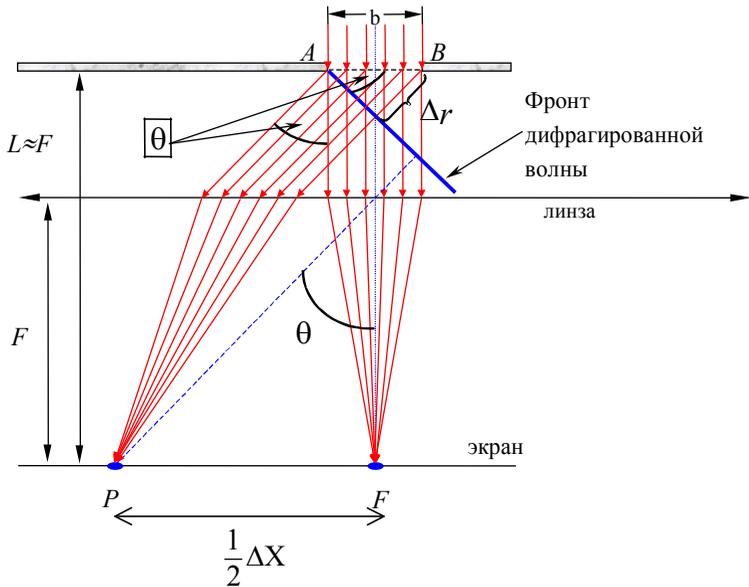


Рис. 22.24. Дифракция Фраунгофера на одной щели

не рассеиваются (не дифрагируют), их разность хода и разность фаз

$$\Delta r = 0 \text{ и } \Delta \varphi = 0$$

(рис.22.24) и после прохождения линзы они соберутся в главном фокусе F - образуется *центральный максимум*, интенсивность которого

$$I_0 \sim A_0^2 = N^2 a_0^2.$$

Здесь $a_0 = |\vec{a}_{0(i)}|$.

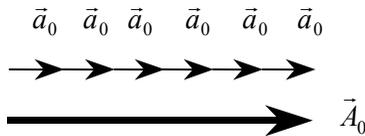


Рис. 22.25. Амплитуда результирующего колебания в главном фокусе (в центральном максимуме) при отсутствии рассеяния

Волны, рассеянные на щели под углом θ , соберутся в побочном фокусе т. P (см. рис. 22.24).

Здесь:

θ – угол дифракции;

$\Delta r = b \sin \theta$ – разность хода, которая образуется при испускании волн всеми вторичными источниками в щели;

$\frac{1}{2} \Delta X$ – половина расстояния между точками на экране, симмет-

ричными относительно центр дифракционной картины;

расстояние L между щелью и экраном на практике приблизительно равно фокусному расстоянию линзы F .

Разность фаз волн, испускаемых соседними элементарными зонами под углом θ (см. рис. 22.24 и 22.26), равна

$$\Delta \Phi_0 = k \Delta r_0.$$

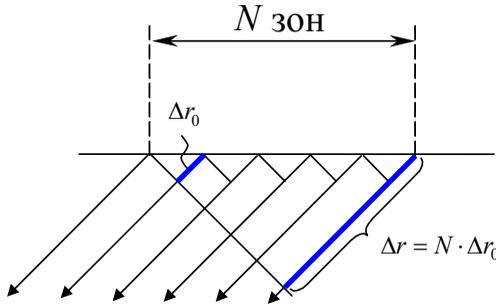


Рис. 22.26. Образование разности хода волн

Если зон N , то полная разность хода $\Delta r = N \Delta r_0$ (рис. 22.26) и полная разность фаз равна

$$\Delta \Phi = k \Delta r = k N \Delta r_0 = N \Delta \Phi_0. \quad (22.51)$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Возникновение дифракционных минимумов.

Если $\Delta \Phi = \pm 2m\pi$, то с учетом того, что $\Delta \Phi = k \Delta r$, а $\Delta r = b \sin \theta$ (см. рис. 22.24), получим условие для дифракционных минимумов:

$$b \sin \theta = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (22.52)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Поскольку при многолучевой интерференции волн, у которых разность фаз кратна четному числу π , результирующая амплитуда $\vec{A} = 0$ (рис. 22.27).

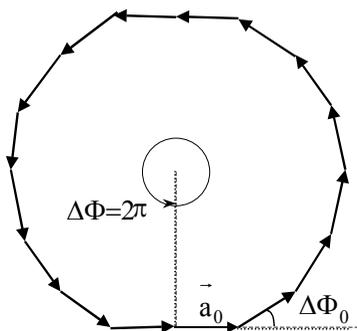


Рис. 22.27. Образование первого дифракционного минимума

Координаты минимумов (рис. 22.28) найдем из соотношения (22.52):

$$\sin \theta^{\min} = \pm 2m \frac{\lambda}{2b}. \quad (22.53)$$

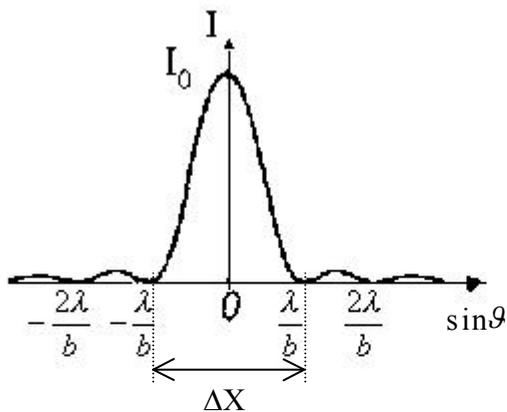


Рис. 22.28. Дифракционные минимумы (ΔX – ширина центрального максимума)

$$I \min (m = 1): \sin \theta_1^{\min} = \pm \frac{\lambda}{b}.$$

$$\text{II min } (m = 2): \sin \theta_2^{\text{min}} = \pm \frac{2\lambda}{b}.$$

$$\text{III min } (m = 3): \sin \theta_3^{\text{min}} = \pm \frac{3\lambda}{b}.$$

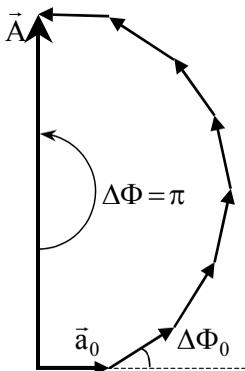
2. Возникновение дифракционных максимумов.

Если $\Delta\Phi = \pm(2m-1)\pi$, то с учетом того, что $\Delta\Phi = k\Delta r$, а $\Delta r = b \sin \theta$ (см. [рис. 22.24](#)), получим условие для дифракционных максимумов

$$b \sin \theta^{\text{max}} = \pm(2m-1)\frac{\lambda}{2}, \quad (22.54)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Поскольку при многолучевой интерференции волн, у которых разность фаз кратна нечетному числу π , результирующая амплитуда $\vec{A} \neq 0$ ([рис. 22.29](#)).



[Рис. 22.29](#). Образование побочных дифракционных максимумов

Координаты побочных максимумов ([рис. 22.30](#)) найдем из соотношения (22.54):

$$\sin \theta^{\text{max}} = \pm(2m-1)\frac{\lambda}{2b}.$$

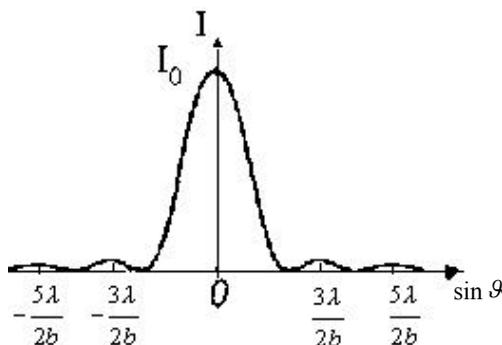


Рис. 22.30. Дифракционные максимумы

Дифракционный максимум, соответствующий условию $\sin \theta^{\max} = \pm \frac{\lambda}{2b}$ ($m = 1$) не наблюдается, так как находится в области центрального максимума.

Поэтому условие для дифракционных максимумов должно быть записано так:

$$\sin \theta^{\max} = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2b}. \quad (22.55)$$

$$\text{I max } (m = 1): \sin \theta_1^{\max} = \pm \frac{3\lambda}{2b};$$

$$\text{II max } (m = 2): \sin \theta_2^{\max} = \pm \frac{5\lambda}{2b};$$

$$\text{III max } (m = 3): \sin \theta_3^{\max} = \pm \frac{7\lambda}{2b}.$$

Интенсивность побочных максимумов

Пусть на щель падает свет с результирующей амплитудой A_0 и интенсивностью I_0 . Рассчитаем амплитуду A и интенсивность I первого и второго побочных максимумов, используя для этого метод векторных диаграмм.

Первый побочный максимум (рис. 22.31):

$$\Delta\Phi = 3\pi \Rightarrow A_0 = \frac{3}{2} \pi A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{2}{3\pi} A_0 \Rightarrow I_1 \approx 0,04 I_0.$$

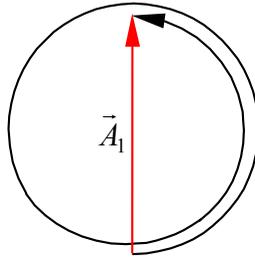


Рис. 22.31. Векторная диаграмма для первого побочного максимума

Второй побочный максимум (рис. 22.32):

$$\Delta\Phi = 5\pi \Rightarrow A_0 = \frac{5}{2}\pi A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{2}{5\pi} A_0 \Rightarrow I_2 \approx 0,016 I_0.$$

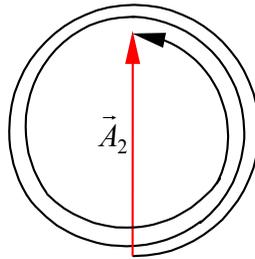


Рис. 22.32. Векторная диаграмма для второго побочного максимума

Аналитический расчет распределения интенсивности света на экране в зависимости от угла дифракции приводит к формуле

$$I_\theta = I_0 \frac{\sin^2 \left[\left(\frac{b\pi}{\lambda} \right) \sin \theta \right]}{\left[\left(\frac{b\pi}{\lambda} \right) \sin \theta \right]^2}, \quad (22.56)$$

где I_0 – интенсивность света, идущего в направлении главной оптической оси собирающей линзы, $I_0 = A_0^2$;

I_θ – есть интенсивность света в точке, определяемой углом дифракции θ .

Из формулы (22.56) следует, что дифракционная картина симметрична относительно центра линзы. При смещении щели параллельно экрану дифракционная картина на экране остается неподвижной.

З а м е ч а н и е. В случае, когда ширина щели очень мала по сравнению с расстоянием от щели до экрана, лучи, идущие в точку P от краев щели, будут практически параллельными и в отсутствие линзы между щелью и экраном. Следовательно, при падении на щель плоской волны будет наблюдаться дифракция Фраунгофера. Все полученные выше формулы будут справедливыми, причем под θ в этих формулах следует понимать угол между направлением от любого края щели к точке P и нормалью к плоскости щели

Влияние ширины щели на дифракционную картину

Как показывает формула (22.53), определяющая угловые координаты минимумов, расстояние минимумов от центра картины возрастает с уменьшением b . Таким образом, с уменьшением ширины щели центральная светлая полоса расширяется, захватывая все большую и большую область экрана. При $b < \lambda$ щель представляет собой точечный (вторичный) источник сферических волн и суперпозиция волн становится невозможной (см. рис. 22.14, *в*).

Если $b = \lambda$, то $\theta = 90^\circ$ и

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{b} = 1$$

т.е. первый минимум сдвинут на бесконечно удаленный край экрана. Освещенность экрана падает от центра к краям постепенно, асимптотически приближаясь к нулю; ширина центральной светлой полосы возрастает беспредельно. Таким образом, с уменьшением b освещенность стремится стать равномерной по всему экрану (см. рис. 22.14, *б*). Наоборот, при увеличении ширины щели положение первых минимумов придвигается все ближе и ближе к центру картины

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{b} \rightarrow 0,$$

так что центральный максимум становится все резче и резче. При этом относительная интенсивность максимума остается неизменной; абсолютная же величина его возрастает, ибо возрастает энергия, проходящая через уширенную щель. При очень широкой щели (по сравнению с λ) мы получаем в центре резкое изображение линейного источника (щели), что соответствует законам геометрической оптики (см. рис. 22.14, *а*).

22.3.5. Дифракция плоских волн на двух щелях

Система двух щелей есть простейший вариант дифракционной решетки с периодом d , равным расстоянию между центрами щелей. Дифракция на двух щелях – это сочетание дифракции волн, испущенных непрерывной системой источников в одной щели, и обычной двухлучевой интерференции волн, испущенных системой дискретных источников, расположенных в соседних щелях.

Рассмотрим опять явление дифракции на щели по схеме, изображенной на рис. 22.33.

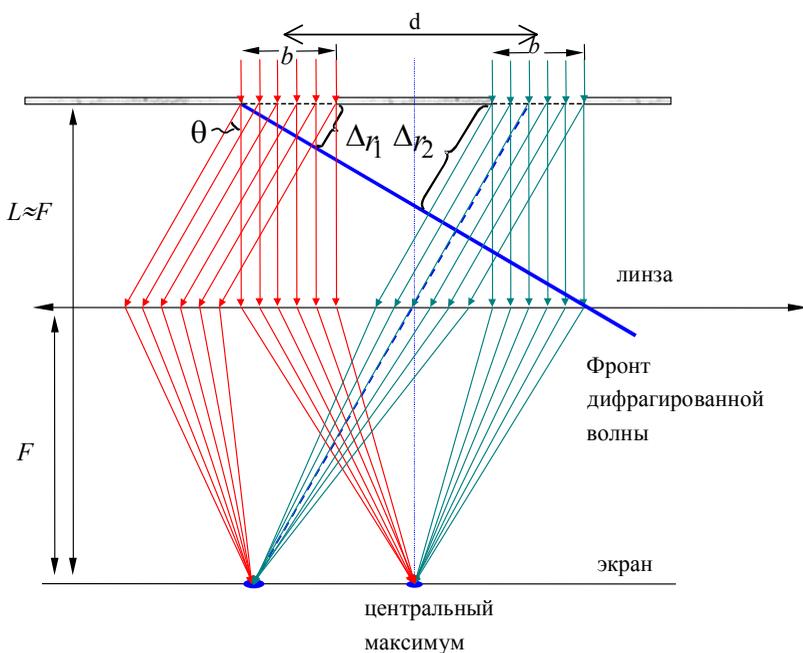


Рис. 22.33. Дифракция Фраунгофера на двух щелях

Здесь:

b – ширина щели;

$\Delta r_1 = b \sin \theta$ разность хода волн от краев щели;

d – расстояние между центрами щелей (период дифракционной решетки);

$\Delta r_2 = d \sin \theta$ – разность хода волн от источников в соседних щелях.

Поскольку при перемещении щели параллельно самой себе никаких изменений дифракционной картины не должно наблюдаться, то положение дифракционных максимумов и минимумов не будет зависеть от положения щели, ибо положение максимумов определяется направлением, по которому идет большая часть испытываемого дифракцию света. Две идентичные параллельные щели дадут одинаковые накладывающиеся друг на друга дифракционные картины, вследствие чего максимумы соответственным образом усилятся. Однако в действительности картина окажется сложнее, ибо надо принять в расчет взаимную интерференцию волн, идущих от первой и второй щелей.

Очевидно, что прежние минимумы, определяемые условиями (22.53), будут на прежних местах, ибо те направления, по которым ни одна из щелей не посылает света, не получают его и при двух щелях. Кроме того, возможны направления, в которых колебания, посылаемые двумя щелями, взаимно уничтожаются – образуются *добавочные минимумы*

$$d \sin \theta = (2m - 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (22.57)$$

Наоборот, в направлениях, определяемых из условий

$$d \sin \theta = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (22.58)$$

действие одной щели усиливает действие другой, так что этим направлениям соответствуют *главные максимумы* (см. рис. 22.25 и 22.26).

На рис. 22.34 представлено сравнение условий образования максимумов и минимумов при дифракции Фраунгофера на одной щели и на двух щелях.

Дифракционная картина дифракции на двух одинаковых щелях $d = 2b$ представлена на рис. 22.35. Видно, что *второй и четвертый* главные максимумы ($m=2$ и 4) **совпадают** с прежними дифракционными минимумами **и исчезают**.

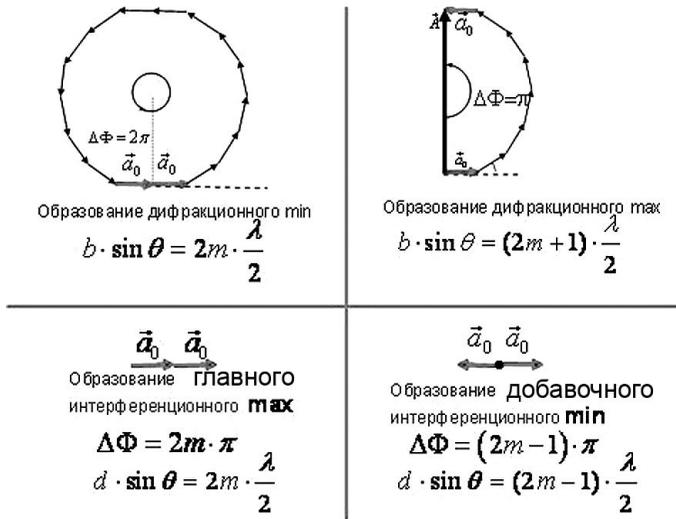


Рис.22.34. Сравнение условий образования максимумов и минимумов при дифракции Фраунгофера на одной щели (две верхние векторные диаграммы) и на двух щелях (две нижние векторные диаграммы).

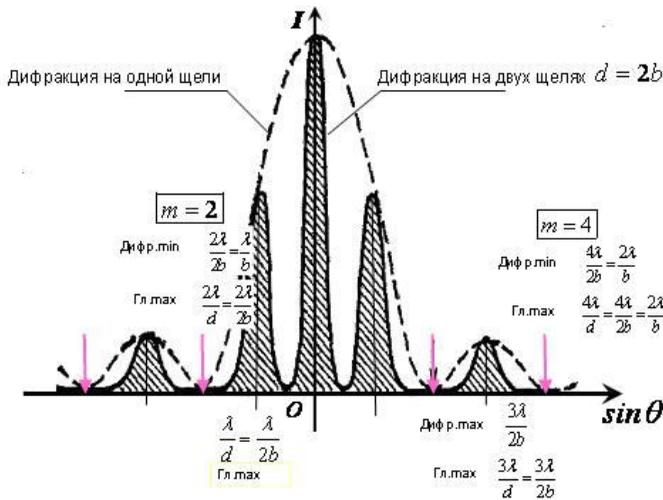


Рис.22.35. Дифракционное распределение интенсивности в случае двух одинаковых щелей ($d = 2b$)

22.3.6. Дифракционная решетка

Дифракционной решеткой называется совокупность большого числа одинаковых, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние щелей. Расстояние d между серединами соседних щелей называется *периодом решетки*.

Расположим параллельно решетке собирающую линзу, в фокальной плоскости которой поставим экран. Выясним характер дифракционной картины, получающейся на экране при падении на решетку плоской световой волны (для простоты будем считать, что волна падает на решетку нормально).

Картины от всех щелей придутся на одно и то же место экрана (независимо от положения щели, центральный максимум лежит против центра линзы). Если бы колебания, приходящие в точку P от различных щелей, были некогерентными, результирующая картина от N щелей отличалась бы от картины, создаваемой одной щелью, лишь тем, что все интенсивности возросли бы в N раз. Однако колебания от различных щелей являются в большей или меньшей степени когерентными; поэтому результирующая интенсивность будет отлична от (NI_0) , где I_0 – интенсивность, создаваемая одной щелью.

В дальнейшем мы будем предполагать, что радиус когерентности падающей волны намного превышает длину решетки, так что колебания от всех щелей можно считать когерентными друг относительно друга. В этом случае результирующее колебание в точке P , положение которой определяется углом θ , представляет собой сумму N колебаний с одинаковой амплитудой A_0 , сдвинутых друг относительно друга по фазе на одну и ту же величину $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r_2 = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$.

Интенсивность при этих условиях равна

$$I_{\text{реш}} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\Phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}. \quad (22.59)$$

В данном случае роль I_0 играет I_0 (см. выше). Тогда интенсивность света в точке на экране, определяемой углом дифракции θ , будет равна

$$I_{\text{реш}} = I_0 \frac{\sin^2\left(\pi b \frac{\sin \theta}{\lambda}\right) \sin^2\left(N \pi d \frac{\sin \theta}{\lambda}\right)}{\left(\pi b \frac{\sin \theta}{\lambda}\right)^2 \sin^2\left(\pi d \frac{\sin \theta}{\lambda}\right)}. \quad (22.60)$$

Повторяя ранее приведенные рассуждения, найдем, что между каждыми двумя главными максимумами ($d \sin \theta = 0; \lambda; 2\lambda; \dots$) при трех щелях располагаются два добавочных минимума ($d \sin \theta = \frac{\lambda}{3}$ и $\frac{2\lambda}{3}$; $\frac{4\lambda}{3}$ и $\frac{5\lambda}{3}$; и т.д., при четырех щелях (рис. 22.36) – три добавочных минимума и т.д.

В общем случае N щелей ширины b с промежутками a (период решетки $d = a + b$) имеем:

$$\text{прежние минимумы} \quad b \sin \vartheta = 2m \frac{\lambda}{2}; \quad (22.61)$$

$$\text{главные максимумы} \quad d \sin \vartheta = 2m \frac{\lambda}{2}; \quad (22.62)$$

$$\text{добавочные минимумы} \quad d \sin \vartheta = \dots; \frac{(N-1)\lambda}{N}; \frac{(N+1)\lambda}{N}; \dots, \quad (22.63)$$

т.е. между двумя главными максимумами располагается $(N-1)$ добавочных минимумов, разделенных вторичными максимумами. Число таких вторичных максимумов, приходящееся на промежутков между соседними главными максимумами, равно $(N-2)$.

Из формул (22.61) и (22.62) вытекает, что главный максимум m -го порядка придется на k -й минимум от одной щели, если будет выполнено равенство

$$\frac{m}{k} = \frac{d}{b}. \quad (22.64)$$

Это возможно, если d/b равно отношению двух целых чисел r и s (практический интерес представляет случай, когда эти числа невелики). Тогда главный максимум r -го порядка наложится на s -й минимум от одной щели, максимум $2r$ -го порядка – на $2s$ -й минимум и т.д.,

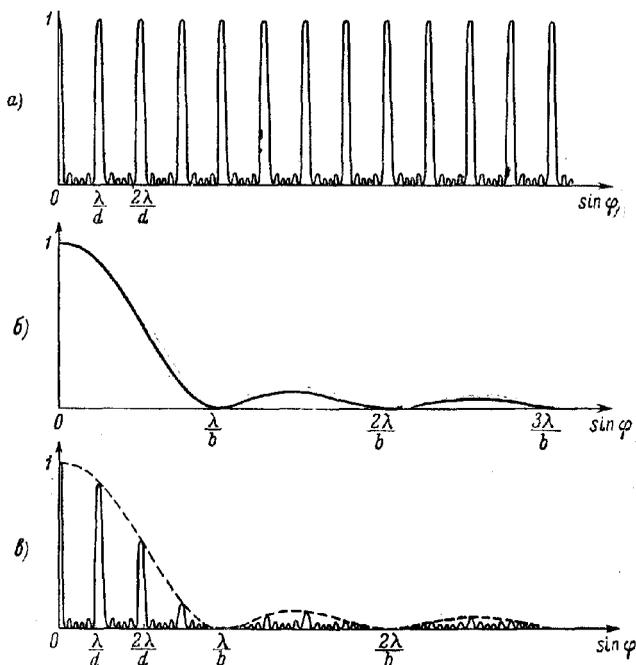


Рис. 22.36. Распределения интенсивностей (I/I_0) при дифракции света на решетке из N щелей ($N=6$; $d/b=4$): *a* – распределение интенсивности, обусловленное интерференцией волн от системы дискретных щелей; *б* – распределение интенсивности, обусловленное дифракцией на каждой щели в отдельности; *в* – итоговое распределение

в результате чего максимумы порядков r , $2r$, $3r$ и т.д. будут отсутствовать. Например, при отношении $d/b = 10/6$ будут отсутствовать максимумы порядков 5, 10, 15 и т.д., а при отношении $d/b = 20/6$ будут отсутствовать максимумы порядков 10, 20 и т.д.

Количество наблюдающихся главных максимумов определяется отношением периода решетки d к длине волны λ . Модуль $\sin \vartheta$ не может превысить единицу. Поэтому из формулы (22.64) вытекает, что

$$m \leq \frac{d}{\lambda}.$$

С увеличением числа щелей растет интенсивность главных максимумов, так как возрастает количество пропускаемого решеткой света. Однако самое существенное изменение, вносимое большим числом щелей, состоит в превращении *расплывчатых* максимумов в

резкие узкие максимумы, практически разделенные темными промежутками, ибо вторичные максимумы очень слабы.

22.3.7. Дифракция на трехмерной (кристаллической) решетке

Отличительная особенность кристаллической решетки – это периодическое распределение вещества. Кристалл – трехмерное образование, и повторяющийся элемент его структуры – трехмерная элементарная ячейка. Таким образом, кристалл – это трехмерная дифракционная решетка, в которой роль «щели», т.е. повторяющейся неоднородности, играет элементарная ячейка кристалла.

Рассмотрим дифракционные явления, наблюдаемые с той стороны кристалла, на которую направляется поток рентгеновских лучей (т.е. мы рассматриваем кристалл в качестве *отражательной* дифракционной решетки). Отдельные структурные элементы кристалла (элементарные ячейки), расположенные внутри кристалла в определенной последовательности, рассматриваются как центры отражения. На **рис. 22.37** показан ход падающих лучей BO' и AO и отраженных лучей $O'A'$ и $O'B'$. Положения фронта падающей волны – OB и отраженной – OC . Показатель преломления кристалла для рентгеновских лучей практически равен единице, поэтому Δ – разность хода лучей, отраженных от первой и второй атомных плоскостей, можно вычислить так:

$$\Delta = (BO' + O'C), \quad (22.65)$$

Если разность хода избранных лучей Δ будет равна целому числу длин волн, то наступает их взаимное усиление.

Из **рис. 22.37** видно, что

$$BO' = O'C = d \cdot \sin \varphi, \quad (22.66)$$

где d – расстояние между последовательными атомными плоскостями кристалла (*межплоскостное расстояние*);

φ – угол скольжения лучей.

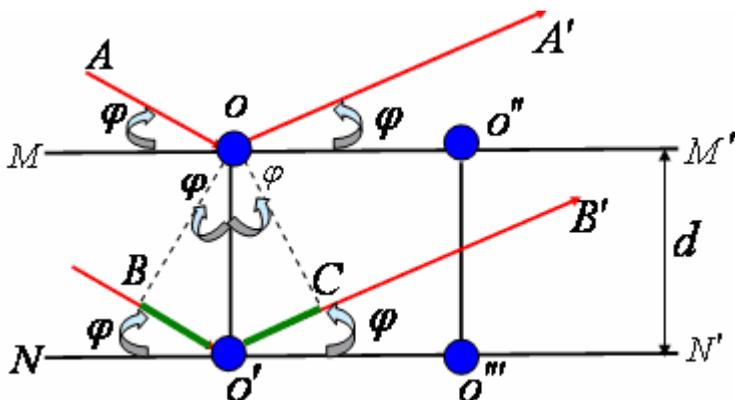


Рис. 22.37. Дифракция на кристаллической решетке

Таким образом, для разности хода рассматриваемых лучей имеем

$$\Delta = 2d \cdot \sin \varphi. \quad (22.67)$$

Условие появления интерференционных максимумов

$$2d \cdot \sin \varphi = \pm m\lambda, \text{ где } m = 1, 2, \dots \quad (22.68)$$

– *формула Вульфа – Брэгга.*

При известных φ и λ формула Вульфа – Брэгга служит для определения межплоскостных расстояний в кристаллах. Выбор для этих целей рентгеновских волн обусловлен необходимостью того, что длина волны применяемого излучения по порядку величины должна соответствовать параметрам кристаллической решетки.

Контрольные вопросы

1. Что такое когерентность?
2. Приведите пример наблюдения интерференционных полос равной толщины.
3. В каких случаях при интерференции света в пленках оптическая разность хода меняется на $\frac{\lambda}{2}$?
4. В каком волновом явлении наблюдается *квантование* физических величин в рамках *классической* физики?
5. Чем дифракция отличается от интерференции света?

6. Что такое зона Френеля? Что будет наблюдаться в центре экрана при наблюдении дифракции Френеля, если открыты только четные зоны? Если открыто четное число зон?
7. Как устроена фазовая зонная пластинка?
8. Чем примечательна картина, получающаяся при дифракции на малом непрозрачном диске?
9. Что будет наблюдаться на экране при дифракции Фраунгофера на одной щели, если длина волны света равна ширине щели?
10. Что будет наблюдаться на экране при дифракции Фраунгофера на одной щели, если длина волны света много меньше ширины щели?
11. Может ли в центре экрана наблюдаться минимум интенсивности при наблюдении дифракции Френеля? дифракции Фраунгофера?
12. Чем принципиально отличается дифракция Фраунгофера на двух щелях от дифракции на одной щели?
13. Наблюдение какого явления может считаться «решающим экспериментом», подтверждающим волновые свойства света?

Примеры решения задач

Пример 22.1. На какие частоты будет резонировать труба длиной $\ell = 1,6$ м, заполненная воздухом при температуре $t = 0$ °С ($T = 273$ К), если труба закрыта с одного конца?

Решение

Уравнение стоячей волны, возникающей в этой трубе,

$$S(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t).$$

В точках $x = 0; \frac{2\lambda}{4}; \frac{4\lambda}{4}; \frac{6\lambda}{4}$ возникают узлы, а в точках $x = \frac{\lambda}{4};$

$\frac{3\lambda}{4}; \frac{5\lambda}{4}$ – пучности. Пучность, т.е. максимум смещения частиц воз-

духа, будет возникать на открытом конце трубы. На закрытом конце будет возникать узел, в котором смещение частиц воздуха равно нулю. Следовательно, на всей длине трубы (см. рис. 22.9) может уложиться нечетное число четвертей длин волн.

При основной частоте ν_1 на всей длине трубы укладывается четверть длины волны:

$$\ell = \frac{\lambda_1}{4} = \frac{v}{4v_1} \Rightarrow v_1 = \frac{v}{4\ell}.$$

При частоте v_2 на всей длине трубы укладываются три четверти длины волны:

$$\ell = \frac{3\lambda_2}{4} = \frac{3v}{4v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{3v}{4\ell}.$$

При частоте v_3 на всей длине трубы укладывается пять четвертей длины волны:

$$\ell = \frac{5\lambda_3}{4} = \frac{5v}{4v_3} \Rightarrow v_3 = \frac{5v}{4\ell}.$$

Таким образом, для любой m -й частоты получим формулу:

$$v_m = \frac{v}{4\ell}(2m-1), \quad (22.70)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Скорость распространения волн в газах в адиабатическом режиме определяется по формуле

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (22.71)$$

где γ – коэффициент Пуассона, для двухатомных молекул воздуха, $\gamma = 1,4$;
 μ – молярная масса воздуха, $\mu = 0,029$ кг/моль.

Подставив (22.71) в (22.70), получим:

$$v_m = \frac{(2m-1)}{4\ell} \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$v_m = (2m-1) \frac{\sqrt{1,4 \cdot \frac{8,31 \cdot 273}{0,029}}}{4 \cdot 1,6} = (2m-1) \cdot 51,7 \text{ Гц.}$$

Пример 22.2. Расстояние между двумя когерентными источниками света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм равно $d = 0,1$ мм = 10^{-4} м. Расстояние между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно $\delta y = 1$ см = $0,01$ м. Определите расстояние ℓ от источников до экрана (см. рис. 22.1).

Решение

Геометрическая разность хода лучей равна $\Delta r = r_2 - r_1$.

$$\left. \begin{aligned} r_2^2 &= \ell^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 = \ell^2 + y^2 + yd + \frac{d^2}{4} \\ r_1^2 &= \ell^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 = \ell^2 + y^2 - yd + \frac{d^2}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_2^2 - r_1^2 = 2yd. \quad (22.72)$$

Так как $(r_2 - r_1) = \Delta r$, а $(r_2 + r_1) \approx 2\ell$ (так как $d \ll \ell$), то

$$r_2^2 - r_1^2 = 2\ell\Delta r. \quad (22.73)$$

Сопоставив (22.72) и (22.73), получаем

$$2\ell\Delta r = 2yd \Rightarrow \Delta r = \frac{yd}{\ell}. \quad (22.74)$$

Чтобы определить расстояние между интерференционными полосами (см. рис. 22.3), необходимо найти координаты максимумов (y^{\max}). Условием интерференционных максимумов является

$$\Delta r = 2m \frac{\lambda}{2}. \quad (22.75)$$

Ординаты максимумов, в соответствии с (22.74) и (22.75), равны

$$y_m^{\max} = m\lambda \frac{\ell}{d}.$$

Тогда расстояние между интерференционными полосами:

$$\delta y = y_{m+1}^{\max} - y_m^{\max} = (m+1) \frac{\lambda\ell}{d} - m \frac{\lambda\ell}{d} = \frac{\lambda\ell}{d}.$$

Следовательно

$$\ell = \frac{\delta y d}{\lambda}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\ell = \frac{0,01 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-7}} = 2 \text{ м.}$$

Пример 22.3. Вычислите наименьшую толщину мыльной пленки с показателем преломления $n_2 = 1,33$, при которой станет видна интерференционная картина. На пленку падает свет с длиной волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, наблюдение ведется в отраженном свете.

Решение

Оптическая разность хода при наблюдении интерференции на пленках равна (см. рис. 22.4)

$$\Delta \ell = 2d\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1}. \quad (22.76)$$

Так как в точке O падающая волна отражается от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$), то разность хода меняется на $\frac{\lambda}{2}$ и *полная* оптическая разность хода, с учетом (22.76), будет равна

$$\Delta L = 2d\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} + \frac{\lambda}{2}. \quad (22.77)$$

Поскольку условием интерференционных максимумов является

$$\Delta L = 2m\frac{\lambda}{2}, \quad (22.78)$$

то из сравнения формул (22.77) и (22.78) следует, что

$$2d\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} = (2m - 1)\frac{\lambda}{2},$$

или

$$d = \frac{(2m - 1)\lambda}{4\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1}}.$$

Толщина пленки минимальна, если $m = 1$ и $i_1 = 0$. Следовательно

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$d_{\min} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 1,33} = 1,13 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 113 \text{ нм}.$$

Пример 22.4. На щель шириной $d = 0,1 \text{ мм} = 10^{-4} \text{ м}$ нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника с длиной волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. Определите ширину Δx центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L = 1 \text{ м}$.

Решение

Ширина центрального максимума Δx – это расстояние между первыми минимумами (см. рис. 22.27).

Положение минимумов определяется по формуле

$$d \sin \theta = \pm m \lambda .$$

Для $m = 1$

$$d \sin \theta = \pm \lambda .$$

Отсюда

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{d} . \tag{22.79}$$

Из геометрии опыта (см. рис. 22.22) следует, что

$$\text{tg} \theta = \frac{\Delta x}{2F} .$$

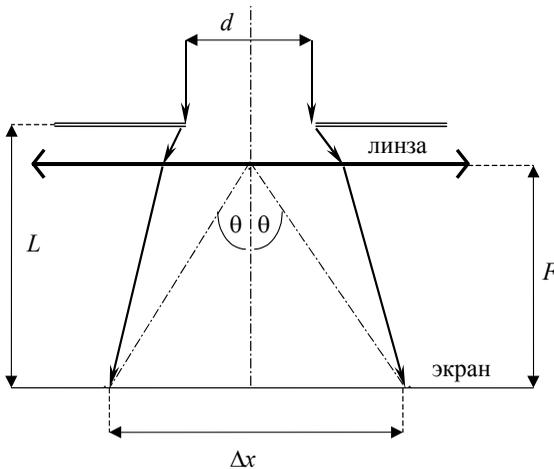


Рис. 22.38

Принято считать, что фокусное расстояние линзы равно расстоянию от щели до экрана $F \approx L$ (рис. 22.38). Тогда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta x}{2L}. \quad (22.80)$$

Для малых углов можно считать, что $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta$. Тогда из (22.79) и (22.80) следует, что

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{\Delta x}{2F} \Rightarrow \Delta x = \frac{2\lambda F}{d}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\Delta x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{10^{-4}} = 0,012 \text{ м} = 12 \text{ мм}.$$

Пример 22.5. На щель шириной $d = 0,1 \text{ мм} = 10^{-4} \text{ м}$ падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран (см. рис. 22.22). Что будет наблюдаться в точке P на экране (максимальной или минимальной интенсивности), если угол дифракции $\theta = 43'$?

Решение

Разность хода лучей, приходящих от краев щели в точку P , будет равна

$$\Delta r = d \sin \theta. \quad (22.81)$$

Условие дифракционных максимумов:

$$\Delta r = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (22.82)$$

Условие дифракционных минимумов:

$$\Delta r = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (22.83)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Формулы (22.82) и (22.83) можно представить в обобщенном виде (с учетом (22.81))

$$d \sin \theta = k \frac{\lambda}{2}. \quad (22.84)$$

Если k – число четное, то в этой точке экрана наблюдается минимум. Если k – число нечетное, то в этой точке экрана наблюдается максимум. Из (22.84) найдем k :

$$k = \frac{2d \sin \theta}{\lambda}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$k = \frac{2 \cdot 10^{-4} \sin 43'}{5 \cdot 10^{-7}} = 5.$$

Нечетное k означает, что под углом $\theta = 43'$ будет наблюдаться дифракционный максимум (см. рис. 22.20). Порядок (номер) максимума определяется из расчета

$$k = 2m + 1 = 5 \Rightarrow m = 2.$$

Пример 22.6. На грань кристалла каменной соли падает параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 147 \text{ пм} = 1,47 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Определите расстояние d между атомными плоскостями кристалла, если дифракционный максимум первого порядка наблюдается, когда угол скольжения излучения $\varphi = 15,2^\circ$.

Решение

При рассеянии рентгеновского излучения на узлах кристаллической решетки возникает дифракция Вульфа – Брэгга (см. рис. 22.37). Условие образования дифракционных максимумов:

$$\Delta r = 2d \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}, \tag{22.85}$$

где Δr – разность хода между падающими и отраженными волнами, равная $(\Delta r_1 + \Delta r_2)$.

Из (22.85) следует

$$d = \frac{m\lambda}{2 \sin \varphi}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$d = \frac{1 \cdot 1,47 \cdot 10^{-10}}{2 \sin 15,2^\circ} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 280 \text{ пм}.$$

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

20. Колебания

Линейный гармонический осциллятор

20.1.1. Определите максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой 3 см и циклической частотой $1,57 \text{ с}^{-1}$.

20.1.2. Точка совершает колебания по закону $x(t) = 0,05 \cos(2t)$ (м). Определите модуль ускорения точки в тот момент времени, когда ее скорость равна 8 см/с.

20.1.3. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки от положения равновесия равно 10 см, максимальная скорость равна 20 см/с. Найдите циклическую частоту колебаний и максимальное ускорение точки.

20.1.4. Максимальная скорость точки, совершающей гармонические колебания, равна 10 см/с, максимальное ускорение равно 100 см/с^2 . Найдите циклическую частоту, период и амплитуду колебаний.

20.1.5. Материальная точка совершает колебания по закону $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Через 0,1 с от начала движения смещение точки от положения равновесия составило 5 см, скорость $v_x = 62 \text{ см/с}$, а ускорение $a_x = -540 \text{ см/с}^2$. Определите амплитуду, циклическую частоту и начальную фазу колебаний.

20.1.6. Точка совершает колебания по закону $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$. Период колебаний равен 2 с, амплитуда равна 50 мм. Найдите скорость точки в тот момент времени, когда смещение точки от положения равновесия равно 25 мм.

20.1.7. Напишите уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки $49,3 \text{ см/с}^2$, период колебаний 2 с, а смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени равно 25 мм.

20.1.8. Система совершает колебания по закону $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$. При смещении точки от положения равновесия на 2,4 см скорость точки равна 3 см/с, а при смещении на 2,8 см скорость равна 2 см/с. Найдите амплитуду и период этого колебания.

Пружинный маятник

20.2.1. Грузик массой 250 г, подвешенный к пружине, совершает гармонические колебания по вертикали с периодом 1 с. Определите жесткость пружины.

20.2.2. К пружине подвесили грузик, в результате чего статическая деформация пружины составила 9 см. Каков будет период гармонических колебаний грузика, если систему вывести из состояния равновесия?

20.2.3. Гиря, подвешенная к пружине, совершает гармонические колебания по вертикали с амплитудой 4 см. Определите полную энергию колебаний гири, если жесткость пружины равна 1 кН/м.

20.2.4. К пружине подвешен груз массой 10 кг. Зная, что пружина под влиянием силы 9,81 Н растягивается на 1,5 см, определите, чему будет равен период гармонических колебаний груза, если систему вывести из положения равновесия?

20.2.5. Шар массой 2 кг подвешен к двум соединенным последовательно пружинам. Жесткости пружин равны: $k_1 = 1000$ Н/м и $k_2 = 3000$ Н/м. Найдите циклическую частоту гармонических колебаний шара.



20.2.6. К пружине подвешена чашка весов с гирями. Период гармонических колебаний такого пружинного маятника равен 0,5 с. После того, как на чашку весов положили добавочные гири, период колебаний стал равен 0,6 с. На сколько при этом изменилось статическое удлинение пружины?

20.2.7. Во сколько раз уменьшится период гармонических колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если последовательное соединение пружин заменить на параллельное их соединение?

20.2.8. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает гармонические колебания. Во сколько раз уменьшится период колебаний, если к той же пружине подвесить вместо медного шарика алюминиевый такого же радиуса? Плотность меди равна 8960 кг/м^3 , плотность алюминия – 2700 кг/м^3 .

Физический маятник

20.3.1. На концах тонкого стержня длиной 30 см укреплены одинаковые грузики по одному на каждом конце. Стержень с грузиками совершает гармонические колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку на стержне, удаленную на 10 см от одного из концов стержня. Определите приведенную длину и период колебаний такого физического маятника. Массой стержня следует пренебречь.

20.3.2. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень массой m с укрепленными на его концах двумя точечными массами m и $2m$. Маятник совершает гармонические колебания около горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. Длина стержня 1 м. Определите частоту колебаний маятника.

20.3.3. Тонкий обруч, повешенный на вбитый в стену гвоздь, совершает гармонические колебания в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча 30 см. Вычислите период колебаний обруча.

20.3.4. Однородный диск радиусом 30 см совершает гармонические колебания около горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период колебаний такого маятника?

20.3.5. Тонкий однородный стержень длиной 1 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через стержень и отстоящей на расстояние 20 см от его середины. Определите период колебаний стержня, считая колебания гармоническими.

20.3.6. Сплошной однородный диск радиусом 10 см совершает гармонические колебания около оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через край диска. Какой длины должен быть математический маятник, колеблющийся синхронно с данным диском?

20.3.7. Определите период гармонических колебаний однородного шара около горизонтальной оси, проходящей сквозь точку, находящуюся от центра шара на расстоянии 1,8 см. Радиус шара равен 6 см.

20.3.8. Маятник состоит из невесомого стержня, на котором закреплены два одинаковых груза: один – на расстоянии 30 см от точки

подвеса, другой – на расстоянии 15 см по другую сторону от точки подвеса. Определите период гармонических колебаний такого маятника.

Электрический колебательный контур

20.4.1. Разность потенциалов на обкладках конденсатора в электрическом колебательном контуре изменяется по закону $u(t) = 50\cos(10^4\pi \cdot t)$ (В). Емкость конденсатора 0,1 мкФ. Найдите период колебаний и индуктивность контура.

20.4.2. Ток в электрическом колебательном контуре изменяется согласно уравнению $i(t) = -0,02\sin(400\pi \cdot t)$ (А). Индуктивность катушки 1 Гн. Найдите максимальную энергию магнитного поля в катушке контура.

20.4.3. Воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин (диаметр каждой 20 см, расстояние между пластинами 1 см) и катушка индуктивностью 1 мкГн образуют электрический колебательный контур. Найдите период гармонических колебаний в этом контуре.

20.4.4. Разность потенциалов на обкладках конденсатора в электрическом колебательном контуре изменяется по закону $u(t) = 50\cos(10^4\pi \cdot t)$ (В). Емкость конденсатора 0,1 мкФ. Найдите период колебаний и выведите закон изменения тока в этом контуре.

20.4.5. Ток в электрическом колебательном контуре изменяется по закону $i(t) = -0,02\sin(400\pi t)$ (А). Индуктивность катушки 1 Гн. Найдите максимальную энергию электрического поля в конденсаторе контура.

20.4.6. Конденсатор емкостью 500 пФ и катушка (длина 40 см, площадь поперечного сечения 5 см^2 , число витков – 1000, сердечник немагнитный) образуют электрический колебательный контур. Найдите период гармонических колебаний в этом контуре.

20.4.7. Ток в электрическом колебательном контуре изменяется по закону $i(t) = -0,02\sin(400\pi t)$ (А). Индуктивность катушки 1 Гн. Найдите максимальный заряд на обкладках конденсатора.

20.4.8. Найдите отношение энергии магнитного поля в катушке электрического колебательного контура к энергии электрического поля в конденсаторе того же колебательного контура для момента времени $t = T/8$. Начальная фаза равна нулю.

20.4.9. Электрический колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,6 мкГ и конденсатора емкостью 40 пФ. Макси-

мальное напряжение на обкладках конденсатора 200 В. Определите максимальный ток в контуре.

20.4.10. Ток в электрическом колебательном контуре изменяется по закону $i(t) = -0,02 \sin(400\pi t)$ (А). Индуктивность катушки 1 Гн. Найдите емкость конденсатора контура.

20.4.11. Напряжение на обкладках конденсатора в электрическом колебательном контуре меняется по закону $u(t) = 30 \cos(10^3 \pi \cdot t)$ (В). Емкость конденсатора 0,3 мкФ. Найдите закон изменения энергии электрического поля в конденсаторе контура.

20.4.12. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 8 пФ и катушки индуктивностью 0,5 мГ. Определите максимальное напряжение на обкладках конденсатора, если максимальный ток в контуре равен 40 мА?

20.4.13. Ток в электрическом колебательном контуре изменяется по закону $i(t) = -0,02 \sin(400\pi t)$ (А). Индуктивность катушки 1 Гн. Найдите максимальную разность потенциалов на обкладках конденсатора.

20.4.14. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 889 пФ и катушки индуктивностью $2 \cdot 10^{-3}$ Гн. На какую длину волны настроен контур, если электромагнитная волна распространяется в воздухе?

20.4.15. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 0,025 мкФ и катушки индуктивностью 1,015 Гн. Максимальный заряд на обкладках конденсатора равен $2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Выведите для данного контура уравнение закона изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора. Начальная фаза равна нулю.

20.4.16. Электрический колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 0,07 Гн и плоского конденсатора, пластины которого площадью $0,45 \text{ м}^2$ разделены парафинированной бумагой толщиной 0,1 мм. Определите циклическую частоту гармонических колебаний в этом контуре. Диэлектрическая проницаемость парафинированной бумаги равна 2.

20.4.17. На какой диапазон электромагнитных волн, распространяющихся в воздухе, можно настроить электрический колебательный контур, если индуктивность его катушки равна $2 \cdot 10^{-3}$ Гн, а емкость конденсатора может меняться от 68,9 до 533 пФ?

20.4.18. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 0,025 мкФ и катушки индуктивностью 1,015 Гн. Максимальный заряд на обкладках конденсатора равен $2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Напишите для данного контура уравнение закона изменения тока. Начальная фаза равна нулю.

20.4.19. Электрический колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 5 мкГ и конденсатора емкостью 13,3 нФ. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора равно 1,2 В. Определите максимальное значение магнитного потока в катушке, если число витков катушки равно 28.

20.4.20. Определите индуктивность катушки, которую нужно включить в электрический колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить электромагнитные колебания частотой 1000 Гц?

20.4.21. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 0,025 мкФ и катушки. Максимальный заряд на обкладках конденсатора равен $2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Найдите значения разности потенциалов на обкладках конденсатора в моменты времени $T/8$, $T/4$ и $T/2$. Начальная фаза равна нулю.

20.4.22. Определите индукцию магнитного поля внутри катушки электрического колебательного контура в момент времени $t = \frac{1}{6} \pi 10^{-4}$ с, если в начальный момент времени заряд на конденсаторе равен 10^{-5} Кл, а ток в контуре отсутствует. Индуктивность катушки равна 10^{-3} Гн, число витков на 1 м длины катушки равно 10^3 . Емкость конденсатора 10^{-5} Ф.

20.4.23. Катушка, индуктивность которой $3 \cdot 10^{-5}$ Гн, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 100 см^2 и расстоянием между ними 0,1 мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего пространство между пластинами, если электрический колебательный контур резонирует на электромагнитную волну в вакууме длиной 750 м.

20.4.24. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 0,025 мкФ и катушки индуктивностью 1,015 Гн. Максимальный заряд на обкладках конденсатора равен $2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Найдите величину тока в цепи в моменты времени $T/8$, $T/4$ и $T/2$. Начальная фаза равна нулю.

Затухающие колебания

20.5.1. Амплитуда колебаний математического маятника длиной 1 м за 10 мин уменьшилась в два раза. Определите логарифмический декремент затухания.

20.5.2. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 7 мкФ, катушки индуктивностью 0,23 Гн и сопротивления 40 Ом. Определите период затухающих колебаний в контуре.

20.5.3. Логарифмический декремент затухания маятника равен 0,003. Сколько колебаний должен совершить маятник, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в два раза?

20.5.4. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 7 мкФ, катушки индуктивностью 0,23 Гн и сопротивления 40 Ом. Определите логарифмический декремент затухания в этом контуре.

20.5.5. Добротность колебательной системы равна 2. Циклическая частота затухающих колебаний равна 100 с^{-1} . Определите собственную частоту колебаний системы.

20.5.6. Электрический колебательный контур настроен на длину волны 380 м (электромагнитная волна распространяется в воздухе). Индуктивность катушки в контуре равна 490 мкГ. Добротность колебательного контура равна 65. Определите величину активного сопротивления, включенного в цепь контура.

20.5.7. Определите период затухающих колебаний, если период собственных колебаний равен 1 с, а логарифмический декремент затухания равен 0,628.

20.5.8. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 7 мкФ, катушки индуктивностью 0,23 Гн и сопротивления 40 Ом. Максимальный заряд на обкладках конденсатора равен $5,6 \cdot 10^{-4}$ Кл. Определите значения разности потенциалов на обкладках конденсатора в конце первой и второй половины первого периода затухающих колебаний. Начальная фаза равна нулю.

20.5.9. Сколько полных колебаний совершает система за время, в течение которого энергия системы уменьшается в 2 раза? Логарифмический декремент затухания равен 0,01.

20.5.10. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 7 мкФ, катушки индуктивностью 0,23 Гн и сопротивления 40 Ом. Максимальный заряд на обкладках конденсатора равен $5,6 \cdot 10^{-4}$ Кл. Выведите закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора. Начальная фаза равна нулю.

20.5.11. За 16,1 с амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшается в 5 раз. Найдите коэффициент затухания. Определите время релаксации колебаний.

20.5.12. Электрический колебательный контур имеет емкость 1,1 нФ и индуктивность $5 \cdot 10^{-3}$ Гн. Логарифмический декремент затухания

равен 0,005. За какой промежуток времени вследствие затухания будет потеряно 99 % энергии контура?

20.5.13. За 1 с амплитуда затухающих колебаний уменьшается в 2 раза. В течение какого промежутка времени амплитуда уменьшится в 10 раз?

20.5.14. Электрический колебательный контур состоит из индуктивности 10^{-2} Гн, емкости 0,405 мкФ и сопротивления 2 Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за время одного периода?

20.5.15. Найдите добротность математического маятника длиной 50 см, если за 5,2 мин его полная механическая энергия уменьшилась в 40 000 раз.

20.5.16. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 0,2 мкФ и катушки индуктивностью $5,07 \cdot 10^{-3}$ Гн. 1) При каком логарифмическом декременте затухания разность потенциалов на обкладках конденсатора за 10^{-3} с уменьшится в три раза? 2) Определите омическое сопротивление контура.

Вынужденные колебания

20.6.1. Пружинный маятник (жесткость пружины 10 Н/м, масса груза 100 г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $2 \cdot 10^{-2}$ кг/с. Определите коэффициент затухания и резонансную амплитуду, если амплитудное значение вынуждающей силы равно 10 мН.

20.6.2. Пружинный маятник совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления 1 г/с. Считая затухание малым, определите амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда равна 0,5 см, а частота собственных колебаний равна 10 Гц.

20.6.3. К пружине жесткостью 10 Н/м подвесили грузик массой 10 г и погрузили всю систему в вязкую среду с коэффициентом сопротивления 0,1 кг/с. Определите собственную ω_0 и резонансную $\omega_{\text{рез}}$ частоты колебаний.

20.6.4. К пружине жесткостью 10 Н/м подвесили грузик массой 10 г и погрузили всю систему в вязкую среду с коэффициентом сопротивления 0,1 кг/с. Определите резонансную амплитуду, если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону и ее амплитуда равна 0,02 Н.

20.6.5. К пружине жесткостью 10 Н/м подвесили грузик массой 10 г и погрузили всю систему в вязкую среду с коэффициентом сопротивле-

ния 0,1 кг/с. На маятник действует внешняя периодическая сила. Определите отношение резонансной амплитуды к статической амплитуде.

20.6.6. Найдите амплитуду вынужденных колебаний при резонансе, если при очень малой частоте (по сравнению с собственной частотой) вынужденных колебаний она равна 0,1 см, а логарифмический декремент затухания равен 0,01.

20.6.7. Пружинный маятник массой 10 г совершает затухающие колебания с начальной амплитудой 7 см и коэффициентом затухания $1,6 \text{ с}^{-1}$. Начальная фаза затухающих колебаний равна нулю. Под действием внешней периодической силы установились вынужденные колебания маятника. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид $x(t) = 0,05 \cos(10\pi t + 0,75\pi)$ (м). Выведите: 1) уравнение затухающих колебаний, 2) уравнение внешней периодической силы.

20.6.8. Резонансная кривая соответствует механической колебательной системе с логарифмическим декрементом затухания 1,6. Найдите для этой кривой отношение максимальной амплитуды смещения к амплитуде смещения при очень малой частоте вынуждающей силы.

21. ВОЛНЫ

Упругие волны

21.1.1. Составьте уравнение плоской волны, распространяющейся в воздухе, частицы в которой колеблются с частотой 2 кГц и амплитудой 1,7 мкм. Скорость распространения звука в воздухе 340 м/с.

21.1.2. Определите скорость звука в азоте при температуре 27 °С (для больших и малых частот). Молярная масса азота 0,028 кг/моль.

21.1.3. Уравнение бегущей плоской звуковой волны имеет вид $S(x, t) = 60 \cos(1800t - 5,3x)$ (мкм). Найдите: а) амплитуду скорости колебаний частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны; б) амплитуду относительной деформации среды.

21.1.4. Найдите скорость звука в воздухе при температурах 17 и 77 °С (для больших и малых частот). Молярная масса воздуха 0,029 кг/моль.

21.1.5. Уравнение бегущей плоской звуковой волны имеет вид $S(x, t) = 60 \cos(1800t - 5,3x)$ (мкм). Найдите отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны.

21.1.6. Скорость звука в некотором газе при давлении $1,01 \cdot 10^5$ Па равна 308 м/с (для больших частот). Плотность газа $1,78 \text{ кг/м}^3$. Определите коэффициент Пуассона γ для данного газа.

21.1.7. При распространении плоской упругой волны в среде частицы колеблются с частотой 1,5 кГц. Длина волны равна 15 см. Максимальные смещения точек среды от положения равновесия в 200 раз меньше длины волны. Составьте уравнение этой волны.

21.1.8. Найдите отношение скоростей звука в водороде и углекислом газе при одинаковой температуре газов (для больших и малых частот). Молярные массы водорода и углекислого газа равны, соответственно 0,002 и 0,044 кг/моль.

21.1.9. Плоская бегущая волна представлена уравнением $S(x, t) = 0,05 \sin(1980t - 5,97x)$ (см). Определите разность фаз колебаний между точками, находящимися на расстоянии 35 см друг от друга.

21.1.10. В жидком гелии, обладающем при температуре 4,2 К плотностью $0,15 \text{ г/см}^3$, скорость звука равна 220 м/с. Найдите коэффициент всестороннего сжатия жидкого гелия.

21.1.11. Плоская звуковая волна может быть представлена следующим уравнением $S(x, t) = 0,05 \cos(1980t - 6x)$ (см). Найдите: 1) частоту колебаний; 2) скорость распространения волны; 3) длину волны, 4) амплитуду скорости колебаний каждой частицы.

21.1.12. Звуковая волна переходит из воздуха в стекло. Найдите отношение скорости звука в воздухе к скорости звука в стекле. Модуль Юнга для стекла равен $6,9 \cdot 10^{10}$ Па, плотность стекла $2,6 \text{ г/см}^3$, температура воздуха равна 20°C . Процесс распространения звука в воздухе считайте адиабатическим.

21.1.13. В однородной среде распространяется плоская упругая волна, описываемая уравнением $S(x, t) = Ae^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$. Длина волны равна 1 м, а коэффициент поглощения $\gamma = 0,1 \text{ м}^{-1}$. Найдите разность фаз колебаний в точках, для которых отношение амплитуд смещения частиц среды равно 1,01.

21.1.14. При помощи эхолота измеряется глубина моря. Промежуток времени между возникновением звука и его приемом равен 2,5 с. Коэффициент всестороннего сжатия воды равен $4,6 \cdot 10^{10} \text{ Па}^{-1}$, плотность морской воды равна 1030 кг/м^3 . Определите глубину моря.

21.1.15. Исследование некоторой физической величины, описываемой функцией $f(x, t)$, показало, что она удовлетворяет уравне-

нию $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ где α – постоянная величина, числовое значение которой в СИ равно $6,94 \cdot 10^{-9}$. Найдите: 1) Какой физический процесс описывается этим уравнением? 2) Какой физический смысл имеет величина α ?

21.1.16. Скорость распространения звука в керосине 1330 м/с. Найдите коэффициент всестороннего сжатия керосина. Плотность керосина 800 кг/м^3 .

Эффект Доплера в акустике

21.2.1. Летучая мышь летит по нормали к стене со скоростью 6 м/с, издавая ультразвуковой сигнал частотой $4,5 \cdot 10^4$ Гц. Звук каких двух частот слышит летучая мышь? Скорость ультразвука равна 340 м/с.

21.2.2. Поезд проходит мимо станции со скоростью 40 м/с. Высота тона (частота) гудка электровоза в системе отсчета «электровоз» равна 300 Гц. Определите высоту тона гудка в системе отсчета «человек, стоящий на платформе» в случае, когда поезд удаляется. Скорость звука в воздухе равна 340 м/с.

21.2.3. Мимо неподвижного электровоза, гудок которого дает сигнал высотой тона (частотой) 300 Гц, проезжает поезд со скоростью 40 м/с. Какова высота тона гудка для пассажира поезда, когда поезд приближается к электровозу? Скорость звука в воздухе равна 340 м/с.

21.2.4. Два поезда идут навстречу друг другу со скоростями 72 и 54 км/ч. Первый поезд дает свисток с частотой 600 Гц. Найдите частоту колебаний звука, который слышит пассажир второго поезда: 1) перед встречей поездов; 2) после встречи поездов. Скорость звука равна 340 м/с.

21.2.5. Скорый поезд приближается к стоящему на путях электропоезду со скоростью 72 км/ч. Электропоезд подает звуковой сигнал частотой 0,6 кГц. Определите частоту сигнала, воспринимаемого машинистом скорого поезда. Скорость звука в воздухе равна 340 м/с.

21.2.6. Ружейная пуля летит со скоростью 200 м/с. Найдите, во сколько раз изменится высота тона свиста пули для неподвижного наблюдателя, мимо которого пролетает пуля, по сравнению с частотой свиста в системе отсчета «пуля». Скорость звука равна 333 м/с.

21.2.7. Неподвижный источник испускает монохроматический звук. К нему приближается стенка со скоростью 33 см/с. Скорость

распространения звука в среде 330 м/с. Как и на сколько процентов изменяется длина волны звука при отражении от стенки?

21.2.8. На одной и той же нормали к стенке находятся источник звуковых колебаний, частота которых равна 1700 Гц, и приемник. Источник и приемник неподвижны, а стенка удаляется от источника и приемника со скоростью 6 см/с. Найдите частоту биений, которую будет регистрировать приемник. Скорость звука 340 м/с.

Электромагнитные волны

21.3.1. В однородной и изотропной среде с $\epsilon = 3$ и $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда вектора напряженности электрического поля волны 10 В/м. Найдите амплитуду вектора магнитной индукции.

21.3.2. В некоторой среде распространяется электромагнитная волна. Диэлектрическая проницаемость среды при этой частоте $\epsilon = 2$, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Вектор Пойнтинга в некоторой точке пространства изменяется по закону $\vec{j} = 0,37 \cos^2(\omega t + \varphi) \cdot \vec{e}_y$ (Вт/м²). Напишите закон изменения вектора напряженности электрического поля волны вдоль оси Z . (Вектор магнитной индукции колеблется вдоль оси X).

21.3.3. Плоская электромагнитная волна, вектор напряженности электрического поля которой изменяется по закону $E_z = 200 \cos(6,28 \cdot 10^8 t + 4,55x)$ (В/м), распространяется в некоторой среде. Определите диэлектрическую проницаемость этой среды (магнитная проницаемость среды равна 1).

21.3.4. Плоская синусоидальная электромагнитная волна распространяется в направлении оси Y . Определите, какая наибольшая энергия будет перенесена ею через площадку 10 см², расположенную перпендикулярно оси Y , за 5 минут. Амплитуда напряженности электрического поля равна $5 \cdot 10^{-5}$ В/м, амплитуда индукции магнитного поля равна 251 пТл. Следует считать, что период колебаний много меньше времени наблюдения.

21.3.5. В однородной и изотропной среде с $\epsilon = 3$ и $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда вектора магнитной индукции равна $5,57 \cdot 10^{-8}$ Тл. Найдите амплитуду вектора напряженности электрического поля волны.

21.3.6. Определите скорость распространения электромагнитных колебаний в стекле ($\epsilon = 7$, $\mu = 1$).

21.3.7. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрического поля волны 50 мВ/м. Найдите среднюю за период колебания плотность потока энергии.

21.3.8. Электромагнитная волна с частотой 3 МГц переходит из воздуха в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью 4. Показатель преломления воздуха равен 1,00029. Найдите изменение длины волны.

Эффект Доплера в оптике

21.4.1. Космический корабль удаляется от Земли со скоростью 10 км/с. Частота электромагнитных волн, излучаемых антенной корабля, равна 30 МГц. Определите доплеровское смещение частоты волны, воспринимаемой приемником на Земле.

21.4.2. При изучении спектра излучения некоторой туманности линия излучения водорода 656,3 нм оказалась смещенной на 2,5 нм (красное смещение). Найдите скорость движения туманности относительно Земли и укажите, удаляется она от Земли или приближается к ней.

21.4.3. Плоское зеркало удаляется от наблюдателя со скоростью 0,2 с вдоль нормали к плоскости зеркала. На зеркало посылается пучок света с длиной волны 500 нм. Определите длину волны света, отраженного от зеркала.

21.4.4. Самолет летит по направлению к радиолокатору, работающему на волне длиной 20 см. Чему равна скорость самолета, если регистрируемая локатором частота биений между сигналом, посылаемым локатором, и сигналом, отраженным от самолета, равна 2778 Гц?

21.4.5. Коротковолновая граница видимого излучения атома водорода соответствует длине волны 410 нм. С какой скоростью должно удаляться от нас скопление атомов водорода, чтобы их излучение, вследствие эффекта Доплера, оказалось за пределами видимой части спектра ($\lambda \geq 760$ нм)?

21.4.6. Радиолокатор работает на волне длиной 50 см. Определите скорость приближающегося к локатору самолета, если частота биений между сигналом локатора и сигналом, отраженным от самолета, равна 1 кГц.

21.4.7. Одна из спектральных линий атомарного водорода имеет длину волны 656,3 нм. Найдите доплеровское смещение этой линии,

если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией 1 МэВ.

21.4.8. С какой скоростью приближается к нам некоторая туманность, если известная линия водорода 434 нм в ее спектре смещена в коротковолновую область на 130 нм?

Эффект Вавилова – Черенкова

21.5.1. При наблюдении эффекта Вавилова – Черенкова для бензола угол между направлением движения электрона и направлением свечения равен $38^{\circ}30'$. Определите скорость электрона и скорость света в бензоле. Показатель преломления бензола равен 1,50.

21.5.2. При какой скорости электронов (в долях скорости света) излучение Вавилова – Черенкова происходит в среде с показателем преломления 1,80 под углом 20° к направлению их движения?

21.5.3. Найдите наименьшую ускоряющую разность потенциалов, которую должен пройти релятивистский электрон, чтобы в среде с показателем преломления 1,5 возникло излучение Вавилова – Черенкова.

21.5.4. Найдите минимальную кинетическую энергию релятивистских электронов, которые могут вызвать эффект Вавилова – Черенкова в воздухе. Показатель преломления воздуха равен 1,00029.

21.5.5. Электрон с кинетической энергией 0,511 МэВ движется в воде. Показатель преломления воды равен 1,33. Определите угол, составляемый излучением Вавилова – Черенкова с направлением движения электрона.

21.5.6. Определите кинетическую энергию релятивистских электронов, которые в среде с показателем преломления 1,5 излучают свет (эффект Вавилова – Черенкова) под углом 30° к направлению своего движения.

21.5.7. Найдите наименьшее значение кинетической энергии релятивистского протона, при которой возникает излучение Вавилова – Черенкова в среде с показателем преломления 1,6.

21.5.8. При какой наименьшей кинетической энергии релятивистского электрона может иметь место эффект Вавилова – Черенкова в тяжелом стекле? Показатель преломления тяжелого стекла равен 1,8.

Закон Малюса

21.6.1. Каков угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если световой поток, выходящий из анализатора, составляет 50 % от светового потока, прошедшего через поляризатор?

21.6.2. Определите, на сколько процентов уменьшится яркость светового пучка после прохождения через поляризатор, если на него падает естественный свет. Потери энергии, связанные с поглощением и отражением света в поляризаторе, составляют 12 %.

21.6.3. Главные плоскости поляризатора и анализатора составляют угол 30° . Как изменится яркость света, проходящего через поляризатор и анализатор, если поставить главные плоскости под углом 60° ?

21.6.4. Яркость светового пучка уменьшилась в 9 раз в результате пропускания естественного света через поляризатор и анализатор. Определите угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора. Потери энергии, связанные с поглощением и отражением света, в каждом поляризаторе, составляют 10 %.

21.6.5. Яркость светового пучка после прохождения естественного света через поляризатор и анализатор уменьшилась в 5,4 раза. Определите процент потерь светового потока в связи с поглощением и отражением в каждом поляризаторе, если угол между их главными сечениями составляет 45° .

21.6.6. Степень поляризации частично-поляризованного света равна 0,5. Во сколько раз отличается максимальная интенсивность света, пропускаемого через анализатор, от минимальной?

21.6.7. Чему равен угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, уменьшается в четыре раза? Поглощением света пренебречь.

21.6.8. В частично-поляризованном свете амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в 2 раза больше амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности. Определите степень поляризации света.

Закон Брюстера

21.7.1. На стеклянную пластинку с показателем преломления 1,54 падает естественный луч света. Определите угол между падающим и отраженным лучами, если отраженный луч максимально поляризован.

21.7.2. Угол преломления луча в жидкости равен 36° . Определите показатель преломления этой жидкости, если отраженный от поверхности луч при этом угле падения максимально поляризован.

21.7.3. Угол полной поляризации при отражении света от поверхности некоторого вещества равен $56^\circ 20'$. Определите скорость распространения света в этом веществе. Вещество изотропно.

21.7.4. Под каким углом надо отразить луч от корунда, чтобы получить полную поляризацию отраженного луча? Показатель преломления корунда принять равным 1,77.

21.7.5. Луч света, идущий в стеклянном сосуде, наполненном серной кислотой, отражается от поверхности стекла. При каком угле падения отраженный свет максимально поляризован? Показатель преломления кислоты 1,43, показатель преломления стекла 1,52.

21.7.6. Луч света падает на поверхность воды, показатель преломления которой равен 1,33. На какой угловой высоте над горизонтом должно находиться Солнце, чтобы поляризация солнечного света, отраженного от поверхности воды, была максимальной?

21.7.7. На стеклянную пластинку с показателем преломления 1,70 падает луч под углом полной поляризации. На сколько надо изменить угол падения, чтобы получить полную поляризацию отраженного луча, если пластинку поместить в сосуд с водой ($n = 1,33$).

21.7.8. Чему равен показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления 30° ?

22. Волновые явления

Стоячие волны

22.1.1. Латунный цилиндрический стержень длиной 1 м закреплен посередине. При трении возникают звуковые продольные колебания, основная частота которых равна 1740 Гц. Определите скорость звука в латуни.

22.1.2. В стоячей волне расстояние между первой и седьмой пучностями равно 15 см. Определите длину бегущей волны.

22.1.3. В стоячей волне расстояние между первым и четвертым узлом равно 15 см. Определите длину бегущей волны.

22.1.4. На какие частоты будет резонировать труба длиной 1,6 м, заполненная воздухом при температуре 0°C , если труба открыта с обоих концов? Процесс распространения звука в трубе считайте адиабатическим.

22.1.5. Определите частоту основного тона открытой с одной стороны трубы длиной 1 м, которая заполнена воздухом при температуре 17°C . Процесс распространения волны считайте адиабатическим.

22.1.6. Стержень с закрепленными концами имеет длину 1 м. При трении стержень издает звук, основная частота которого 700 Гц. Определите скорость звука в стержне.

22.1.7. Определите три наименьшие частоты, при которых в медном стержне длиной 90 см, закрепленном посередине, получатся стоячие продольные волны. Плотность меди равна 8960 кг/м^3 . Модуль Юнга для меди равен 110 ГПа.

22.1.8. Чему равна частота основного тона закрытой с одного конца трубы длиной 1,5 м, если она заполнена водой? Скорость распространения звука в воде равна 1,5 км/с.

Интерференция света. Опыт Юнга

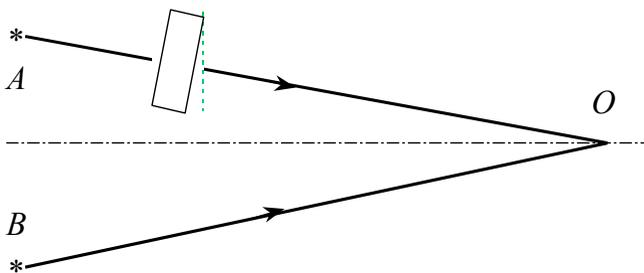
22.2.1. Найдите все длины волн видимого света, которые будут максимально усилены при оптической разности хода интерферирующих волн 1,8 мкм.

22.2.2. Найдите все длины волн видимого света, которые будут максимально ослаблены при оптической разности хода интерферирующих волн 1,8 мкм.

22.2.3. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние от щелей до экрана равно 3 м. Определите длину волны, испускаемой источниками монохроматического света, если ширина полос интерференции на экране равна 1,5 мм.

22.2.4. В опыте Юнга расстояние между щелями равно 0,8 мм. На каком расстоянии от щелей следует расположить экран, чтобы ширина интерференционной полосы оказалась равной 2 мм? Длина волны падающего света 0,64 мкм.

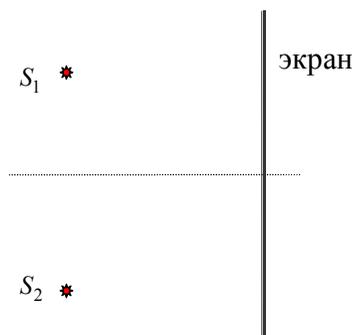
22.2.5. В точках A и B находятся когерентные источники световых волн с длиной волны 600 нм. На сколько изменится разность хода и разность фаз колебаний, приходящих в точку O , если на пути луча AO поместить мыльную пленку толщиной 1 мкм? Показатель преломления мыльной пленки равен 1,33.



22.2.6. Два точечных когерентных источника света находятся в спирте ($n = 1,36$) на расстоянии 1 см друг от друга. Определите оптическую разность хода волн для точки, лежащей на расстоянии 20 см от одного из источников по направлению нормали к прямой, соединяющей источники.

22.2.7. На сколько изменится оптическая разность хода волн, если два точечных когерентных источника света, находящиеся на расстоянии 1,5 см друг от друга в воздухе, поместить в сероуглерод ($n = 1,63$)? Задачу решите для точки, лежащей на расстоянии 30 см от одного из источников по направлению нормали к прямой, соединяющей источники.

22.2.8. Определите расстояние между соседними интерференционными полосами на экране, если два когерентных источника света в виде щелей S_1 и S_2 находятся на расстоянии 3 м от экрана. Расстояние $S_1S_2 = 1,8$ мм. Длина волны равна $6 \cdot 10^{-5}$ см.



Интерференция света в пленках

22.3.1. На мыльный пузырь с толщиной стенок 0,1 мкм параллельным пучком падает свет от лампы накаливания. Определите, в какие цвета будут окрашены те части пузыря, на которые падает свет

под углом 0° . Показатель преломления мыльной пленки равен 1,33. Толщину стенок пузыря считайте всюду одинаковой.

22.3.2. На мыльный пузырь с толщиной стенок 0,1 мкм параллельным пучком падает свет от лампы накаливания. Определите, в какие цвета будут окрашены те части пузыря, на которые падает свет под углом 30° . Показатель преломления мыльной пленки равен 1,33. Толщину стенок пузыря считайте всюду одинаковой.

22.3.3. На мыльный пузырь с толщиной стенок 0,1 мкм параллельным пучком падает свет от лампы накаливания. Определите, в какие цвета будут окрашены те части пузыря, на которые падает свет под углом 45° . Показатель преломления мыльной пленки равен 1,33. Толщину стенок пузыря считайте всюду одинаковой.

22.3.4. На мыльный пузырь с толщиной стенок 0,1 мкм параллельным пучком падает свет от лампы накаливания. Определите, в какие цвета будут окрашены те части пузыря, на которые падает свет под углом 60° . Показатель преломления мыльной пленки равен 1,34. Толщину стенок пузыря считайте всюду одинаковой.

22.3.5. На стеклянную пластинку ($n_3 = 1,5$) нанесена прозрачная пленка ($n_2 = 1,4$). На пленку нормально к поверхности падает монохроматический свет с длиной волны 600 нм. Найдите наименьшую толщину пленки, если в результате интерференции отраженные лучи максимально ослаблены?

22.3.6. Излучение, длины волн которого лежат в диапазоне 0,35...4,00 мкм, падает на мыльную пленку под углом 30° . Какие волны будут усилены в результате интерференции, если рассматривать пленку в отраженном свете? Толщина пленки 0,8 мкм. Показатель преломления мыльной пленки равен 1,33.

22.3.7. Определите наименьшую толщину мыльной пленки, при которой могут стать заметными интерференционные цвета. Пленка рассматривается в отраженном свете под углом 45° . Показатель преломления мыльной пленки равен 1,34. Считайте, что минимальная длина волны видимого света равна 400 нм.

22.3.8. На поверхности воды находится тонкая пленка метилового спирта. При рассматривании в отраженном свете под углом 45° к пленке она кажется черной. Оцените наименьшую возможную толщину пленки, если она освещается излучением паров натрия с длиной волны 589 нм. Для этой длины волны показатель преломления воды равен 1,333; показатель преломления метилового спирта 1,330.

Кольца Ньютона

22.4.1. Интерференционная картина наблюдается в отраженном свете с помощью стеклянной плоско-выпуклой линзы, лежащей на стеклянной пластинке. Фокусное расстояние линзы равно 76 см. Радиус пятого темного кольца Ньютона равен 0,90 мм. Определите длину световой волны, если показатель преломления стекла равен 1,50.

22.4.2. Найдите радиус кривизны линзы, применяемой для наблюдения колец Ньютона, если расстояние между вторым и третьим светлыми кольцами равно 0,50 мм. Освещение производится монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 5500 \text{ \AA}$. Наблюдение ведется в отраженном свете.

22.4.3. Определите расстояние между десятым и одиннадцатым светлыми кольцами Ньютона, наблюдаемыми в отраженном свете, если расстояние между вторым и третьим равно 0,30 мм.

22.4.4. Найдите показатель преломления жидкости, заполняющей пространство между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плоско-выпуклой линзой, если при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 0,6 \text{ мкм}$) радиус десятого темного кольца Ньютона оказался равным 2,1 мм. Радиус кривизны линзы 1 м.

22.4.5. Оптическая сила плоско-выпуклой линзы ($n = 1,5$) равна 0,5 диоптрии. Линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Определите радиус седьмого темного кольца Ньютона в проходящем свете ($\lambda = 0,5 \text{ мкм}$).

22.4.6. Плоская пластинка и плосковыпуклая линза применяются для наблюдения колец Ньютона. Определите толщину воздушного промежутка между линзой и пластинкой в том месте, где наблюдается пятое темное кольцо. Картина колец наблюдается в отраженном свете. Длина световой волны 6560 \AA .

22.4.7. Расстояние между десятым и пятнадцатым темными кольцами Ньютона при наблюдении в отраженном свете равно 2,34 мм. Вычислите радиус кривизны линзы, лежащей на плоской пластинке, если длина волны падающего света 5460 \AA .

22.4.8. Линза из кронгласа (показатель преломления 1,51) лежит на плоскопараллельной пластинке из флинтгласа (показатель преломления 1,80). Пространство между ними заполнено бензолом (показатель преломления 1,60). При наблюдении в отраженном монохроматическом свете ($\lambda = 5900 \text{ \AA}$) радиус шестого светлого кольца оказался равным 5 мм. Определите радиус кривизны линзы.

Дифракция Френеля

22.5.1. Свет от монохроматического источника ($\lambda = 600$ нм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием. Диаметр отверстия 6 мм. За диафрагмой на расстоянии 3 м от нее находится экран. 1. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы? 2. Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым?

22.5.2. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии ℓ от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 600$ нм). На расстоянии $0,5\ell$ от источника помещена круглая непрозрачная преграда диаметром 1 см. Чему равно расстояние ℓ , если преграда закрывает только центральную зону Френеля?

22.5.3. На диафрагму с круглым отверстием падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 600$ нм). На экране наблюдается дифракционная картина. При каком наибольшем расстоянии между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно? Диаметр отверстия 1,96 мм.

22.5.4. Вычислите радиус шестой зоны Френеля для плоской монохроматической волны ($\lambda = 5460 \text{ \AA}$), если точка наблюдения находится на расстоянии $b = 4,4$ м от фронта волны. При решении можно пренебречь членами, содержащими λ^2 , так как λ мало по сравнению с b .

22.5.5. Вычислите радиус центральной зоны Френеля на фронте волны, отстоящем на расстоянии $a = 1$ м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 5500 \text{ \AA}$), если точка наблюдения находится на расстоянии $b = 5$ м от фронта волны. При решении можно пренебречь слагаемыми, содержащими λ^2 , так как λ мало по сравнению с a и b .

22.5.6. Расстояние между точечным источником A и точкой наблюдения B равно 2 м. В какой точке на луче AB надо поместить диафрагму D с отверстием, диаметр которого 1,8 мм, чтобы при рассмотрении из точки B в отверстии укладывалось три зоны Френеля? Длина волны излучаемого света 6000 \AA .

22.5.7. В точке A находится источник монохроматического света ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$). Диафрагма D с отверстием, радиусом 1 мм, перемещается из точки, отстоящей от A на 1 м, в точку, отстоящую от A на 1,75 м. Сколько раз будет наблюдаться затемнение в точке B , если $AB = 2$ м?

22.5.8. В точке A находится точечный источник монохроматического света ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$). Диафрагма D с отверстием, радиусом 1 мм, перемещается из точки, отстоящей от A на 50 см, сначала в точку, отстоящую от A на 100 см, а затем – в точку, отстоящую на 150 см. Сколько раз будет наблюдаться затемнение в точке B , если $AB = 2$ м?

Дифракция Фраунгофера

22.6.1. На щель шириной 0,05 мм нормально падает параллельный пучок света с длиной волны 0,6 мкм. Определите угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертый дифракционный минимум.

22.6.2. На плоскую дифракционную решетку нормально падает параллельный пучок света с длиной волны 400 нм. Определите углы, под которыми наблюдаются максимумы первого и второго порядков. Решетка имеет 500 щелей на 1 мм.

22.6.3. На щель шириной 20 мкм нормально падает параллельный пучок света с длиной волны 500 нм. Найдите ширину изображения щели на экране, удаленном от щели на 1 м. Шириной изображения считайте расстояние между первыми дифракционными минимумами.

22.6.4. На плоскую дифракционную решетку с постоянной, равной $5 \cdot 10^{-3}$ мм, нормально падает параллельный пучок монохроматического света. Угол между направлениями лучей, дающих максимумы первого порядка, равен $13^\circ 48'$. Определите длину волны падающего света.

22.6.5. На узкую щель нормально падает параллельный пучок монохроматического света. Угол отклонения лучей света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, равен 1° . Скольким длинам волн падающего света равна ширина щели?

22.6.6. Вычислите наибольший угол, на который может отклониться параллельный пучок света дифракционной решеткой, имеющей 10000 щелей при длине решетки 4 см. Длина волны падающего света 546 нм. Лучи падают нормально к плоскости решетки.

22.6.7. На щель шириной 0,1 мм нормально падает параллельный пучок света с длиной волны 0,5 мкм. За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Что будет наблюдаться (максимум или минимум интенсивности) в точке на экране, которой соответствует угол дифракции $17'$?

22.6.8. Постоянная решетки, установленной в спектрометре, равна $2 \cdot 10^{-4}$ см. Под какими углами следует устанавливать зрительную трубу для наблюдения дифракционных максимумов, соответствующих длине волны 0,41 мкм?

22.6.9. На щель нормально падает параллельный пучок света с длиной волны 0,589 мкм. Ширина центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой на экран с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, равна 10 см. Фокусное расстояние линзы равно 1,5 м. Определите ширину щели.

22.6.10. На дифракционную решетку нормально падает параллельный пучок света от газоразрядной трубки. Чему должна быть равна постоянная решетки, чтобы в направлении угла 41° совпадали максимумы двух линий соответствующих длинам волн 656,3 и 410,2 нм?

22.6.11. Нормально к плоскости щели падает параллельный пучок света с длиной волны 546 нм. Вычислите ширину щели, если первый дифракционный максимум наблюдается под углом 2° к первоначальному направлению лучей.

22.6.12. Чему равна постоянная дифракционной решетки, если, для того чтобы увидеть красную линию (700 нм) в спектре второго порядка, зрительную трубу пришлось установить под углом 30° к главной оптической оси линзы? Свет падает на решетку нормально.

22.6.13. Какой должна быть ширина щели, чтобы первый дифракционный минимум наблюдался под углом 90° при освещении: 1) красным светом с длиной волны 760 нм; 2) синим светом с длиной волны 440 нм.

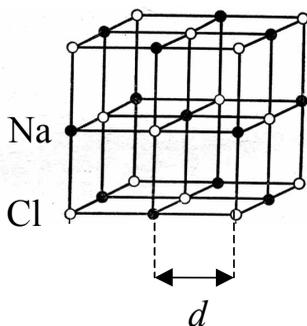
22.6.14. Сколько щелей на длине 1 мм имеет дифракционная решетка, если зеленая линия ртути с длиной волны 546,1 нм в спектре первого порядка наблюдается под углом $19^\circ 8'$?

22.6.15. На щель нормально падает параллельный пучок монохроматического света. Расположенная за щелью линза с фокусным расстоянием 2 м проецирует на экран дифракционную картину в виде чередующихся светлых и темных полос. Ширина центрального дифракционного максимума 5 см. Во сколько раз нужно изменить ширину щели, чтобы центральный максимум занимал весь экран?

22.6.16. Найдите наибольший порядок спектра для желтой линии натрия 589 нм, если постоянная дифракционной решетки равна 2 мкм.

Формула Вульфа – Брэгга

22.7.1. Вычислите длину волны рентгеновских лучей, которые отражаются во втором порядке от системы плоскостей $\langle 100 \rangle$ кристалла NaCl под углом скольжения 25° . Найдите также угол, под которым эти лучи отражаются в максимальном порядке от данной системы плоскостей. Межплоскостное расстояние примите равным 281,5 пм.



22.7.2. Параллельный пучок рентгеновского монохроматического излучения падает на грань кристалла под углом скольжения 65° . Наблюдается дифракционный максимум первого порядка. Расстояние между атомными плоскостями кристалла 280 пм. Определите длину волны рентгеновского излучения.

22.7.3. Какова длина волны монохроматического рентгеновского излучения, падающего на кристалл кальцита, если дифракционный максимум первого порядка наблюдается, когда угол между направлением падающего излучения и гранью кристалла равен 3° ? Расстояние между атомными плоскостями кристалла считайте равным 0,3 нм.

22.7.4. На грань кристалла каменной соли падает параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны 147 пм. Определите расстояние между атомными плоскостями кристалла, если дифракционный максимум второго порядка наблюдается, когда угол скольжения равен $31,5^\circ$.

22.7.5. Параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны 506 пм падает на грань кристалла. Наблюдается дифракционный максимум второго порядка. Расстояние между атомными плоскостями кристалла 560 пм. Определите угол падения рентгеновского излучения на грань кристалла.

22.7.6. При исследовании дифракции рентгеновского монохроматического излучения, испускаемого ванадиевым антикатодом (длина волны, соответствующая K_α – ванадия, равна 503 пм), на кристаллической решетке AgBr дифракционный максимум наблюдался при угле скольжения $25,9^\circ$. Найдите межплоскостное расстояние для AgBr.

22.7.7. При исследовании дифракции рентгеновского монохроматического излучения, испускаемого палладиевым антикатодом (K_α – палладия), на кристаллической решетке каменной соли (межплоско-

стное расстояние равно 281 пм) максимумы интенсивности были получены при углах скольжения $5^{\circ}59'$, $12^{\circ}3'$ и $18^{\circ}14'$. Найдите длину волны этого излучения.

22.7.8. На кристалл, расстояние между атомными плоскостями в котором равно 304 пм, падают рентгеновские лучи с длиной волны 0,154 нм. При каком угле скольжения будет наблюдаться дифракционный максимум первого порядка?

ОТВЕТЫ

- 20.1.1. 4,71 см/с и 7,39 см/с².
20.1.2. 12 см/с².
20.1.3. 2 с⁻¹ и 40 см/с².
20.1.4. 10 с⁻¹; 0,628 с и 1 см.
20.1.5. 7,78 см; 10,4 с⁻¹; -0,167 рад.
20.1.6. 13,6 см/с.
20.1.7. $x = 5\cos(\pi t + \pi/3)$ см.
20.1.8. 3,08 см; 4,05 с.
20.2.1. 9,86 Н/м.
20.2.2. 0,6 с.
20.2.3. 0,8 Дж.
20.2.4. 0,777 с.
20.2.5. 19,4 с⁻¹.
20.2.6. 2,73 см.
20.2.7. В 2 раза.
20.2.8. В 1,82 раза.
20.3.1. 50 см и 1,42 с.
20.3.2. 0,386 Гц.
20.3.3. 1,55 с.
20.3.4. 1,35 с.
20.3.5. 1,57 с.
20.3.6. 15 см.
20.3.7. 0,628 с.
20.3.8. 1,74 с.
20.4.1. 0,2 мс и 10,1 мГ.
20.4.2. 0,2 мДж.
20.4.3. 33,1 нс.
20.4.4. 0,2 мс; $i(t) = -157\sin(10^4\pi t)$ мА.
20.4.5. 0,2 мДж.
20.4.6. 5,56 мкс.
20.4.7. 15,9 мкКл.
20.4.8. 1.
20.4.9. 1 А.
20.4.10. 633 нФ.
20.4.11. $W_{\Sigma}(t) = 135\cos^2(10^3\pi t)$, мкДж
20.4.12. 316 В.
20.4.13. 25,1 В.
20.4.14. 2,51 км.
20.4.15. $u(t) = 100\cos(2\pi \cdot 10^3 t)$ В.
20.4.16. $1,34 \cdot 10^4$ с⁻¹.
20.4.17. (700...1950) м.
20.4.18. $i(t) = -15,7\sin(2\pi \cdot 10^3 t)$ мА.
20.4.19. 11,1 нВб.
20.4.20. 12,7 мГн.
20.4.21. 70,7; 0 и -100 В.
20.4.22. 62,8 мкТл.

- 20.4.23. 5,96.
 20.4.24. $-11,1; -15,7$ и 0 мА.
 20.5.1. $2,32 \cdot 10^{-3}$.
 20.5.2. $8,02$ мс.
 20.5.3. 231.
 20.5.4. $0,697$.
 20.5.5. $16,4$ Гц.
 20.5.6. $37,4$ Ом.
 20.5.7. $1,01$ с.
 20.5.8. $-56,4$ и $39,8$ В.
 20.5.9. 34.
 20.5.10. $u(t) = 80 \exp(-87t) \cos(249\pi t)$ В.
 20.5.11. $0,1$ с $^{-1}$; 10 с.
 20.5.12. $6,79$ мс.
 20.5.13. $3,32$ с.
 20.5.14. В $1,04$ раза.
 20.5.15. 130.
 20.5.16. $0,22; 11,1$ Ом.
 20.6.1. $0,1$ с $^{-1}$ и 5 см.
 20.6.2. 314 мкН.
 20.6.3. $31,6$ и $30,8$ с $^{-1}$.
 20.6.4. $6,41$ мм.
 20.6.5. $3,20$.
 20.6.6. $31,4$ см.
 20.6.7. 1) $x = 7 \exp(-1,6t) \cos(10,5\pi t)$ см.
 2) $F = 71,1 \cos(10\pi t)$ мН.
 20.6.8. $2,09$.
 21.1.1. $S(x, t) = 1,7 \cos[\pi(4 \cdot 10^3 t - 11,8x)]$ мкм.
 21.1.2. 353 и 298 м/с.
 21.1.3. $10,8$ см/с; $3,18 \cdot 10^{-4}$; $3,18 \cdot 10^{-4}$.
 21.1.4. 341 и 288 м/с (17 К); 375 и 317 м/с (77 К).
 21.1.5. $5,06 \cdot 10^{-5}$.
 21.1.6. $1,67$.
 21.1.7. $S(x, t) = 750 \cos(3000t - 6,667x)$ мкм
 21.1.8. $4,78$ и $4,69$.
 21.1.9. $\frac{2}{3} \pi$.
 21.1.10. $1,38 \cdot 10^{-7}$ Па $^{-1}$.
 21.1.11. 315 Гц; 330 м/с; $1,05$ м; $0,99$ м/с.
 21.1.12. $0,0666$.
 21.1.13. $0,625$ рад.
 21.1.14. 1820 м.
 21.1.15. а) распространение плоской волны;
 б) величина, обратная квадрату скорости волны.
 21.1.16. $7,07 \cdot 10^{-10}$ Па $^{-1}$.
 21.2.1. 45 и $46,6$ кГц.

- 21.2.2. 268 Гц.
 21.2.3. 335 Гц.
 21.2.4. 669 и 544 Гц.
 21.2.5. 635 Гц.
 21.2.6. В 4,01 раза.
 21.2.7. Уменьшается на 0,2 %.
 21.2.8. 0,6 Гц.
 21.3.1. 57,7 нТл.
 21.3.2. $\vec{E}_z = 9,93 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_z$ В/м.
 21.3.3. 4,72.
 21.3.4. 1,5 нДж.
 21.3.5. 9,65 В/м.
 21.3.6. 113 Мм/с.
 21.3.7. 3,32 мкВт/м².
 21.3.8. –50 м.
 21.4.1. 1,00 кГц.
 21.4.2. 1,14 Мм/с.
 21.4.3. 750 нм.
 21.4.4. 278 м/с.
 21.4.5. 165 Мм/с.
 21.4.6. 250 м/с.
 21.4.7. 699 пм.
 21.4.8. 103 Мм/с.
 21.5.1. 256 и 200 Мм/с.
 21.5.2. 0,591.
 21.5.3. 175 кВ.
 21.5.4. 20,7 МэВ.
 21.5.5. 29°45'.
 21.5.6. 0,29 МэВ.
 21.5.7. 264 МэВ.
 21.5.8. 104 кэВ.
 21.6.1. 45°.
 21.6.2. 56 %.
 21.6.3. В три раза.
 21.6.4. 58°24'.
 21.6.5. 14 %.
 21.6.6. В три раза.
 21.6.7. 45°.
 21.6.8. 0,33.
 21.7.1. 114°.
 21.7.2. 1,38.
 21.7.3. $2,0 \cdot 10^8$ м/с.
 21.7.4. 60°30'.
 21.7.5. 46°40'.
 21.7.6. 37°.
 21.7.7. 7°30'.
 21.7.8. 1,73.

- 22.1.1. 3,48 км/с.
- 22.1.2. 5 см.
- 22.1.3. 10 см.
- 22.1.4. $m103$, Гц.
- 22.1.5. 85,3 Гц.
- 22.1.6. 1400 м/с.
- 22.1.7. 1,95; 5,84 и 9,73 кГц.
- 22.1.8. 250 Гц.
- 22.2.1. 0,6 и 0,45 мкм.
- 22.2.2. 0,72; 0,514 и 0,4 мкм.
- 22.2.3. 0,5 мкм.
- 22.2.4. 2,5 м.
- 22.2.5. 330 нм; 1,10 μ .
- 22.2.6. 340 мкм.
- 22.2.7. 236 мкм.
- 22.2.8. 1 мм.
- 22.3.1. 532 нм.
- 22.3.2. 493 нм.
- 22.3.3. 451 нм.
- 22.3.4. 409 нм.
- 22.3.5. 107 нм.
- 22.3.6. 3,94; 1,31; 0,789; 0,563; 0,438 и 0,359 мкм.
- 22.3.7. 87,9 нм.
- 22.3.8. 131 нм.
- 22.4.1. 4260 Å.
- 22.4.2. 3,58 м.
- 22.4.3. 0,133 м.
- 22.4.4. 1,36.
- 22.4.5. 0,187 см.
- 22.4.6. 1,64 мкм.
- 22.4.7. 19,85 м.
- 22.4.8. 11,3 м.
- 22.5.1. 5 зон, светлым.
- 22.5.2. 167 м.
- 22.5.3. При 0,8 м.
- 22.5.4. 3,8 мм.
- 22.5.5. 0,68 мм.
- 22.5.6. 1,33 и 0,67 м от т. А.
- 22.5.7. Три раза.
- 22.5.8. Один раз.
- 22.6.1. 2°45'.
- 22.6.2. 11°32'; 23°35'.
- 22.6.3. 5 см.
- 22.6.4. 601 нм.
- 22.6.5. 143.
- 22.6.6. 72°51'.
- 22.6.7. I дифр. минимум.
- 22.6.8. 11°50'; 24°12'; 37°57'; 55°05'.
- 22.6.9. 17,7 мкм.

- 22.6.10. 5 мкм.
- 22.6.11. 23,5 мкм.
- 22.6.12. 2,8 мкм.
- 22.6.13. 760 и 440 нм.
- 22.6.14. 600.
- 22.6.15. Уменьшить в 80 раз.
- 22.6.16. 3.
- 22.7.1. 119 пм; $57^{\circ}43'$.
- 22.7.2. 508 пм.
- 22.7.3. 31,4 пм.
- 22.7.4. 281 пм.
- 22.7.5. $25^{\circ}22'$.
- 22.7.6. 576 пм.
- 22.7.7. 58,6 пм
- 22.7.8. $14^{\circ}40'$.

Приложение

Таблица физических величин

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с	Расстояние от центра Солнца до центра Земли $1,49 \cdot 10^{11}$ м
Радиус Земли $R_3 = 6,37 \cdot 10^6$ м	Масса Земли $M_3 = 5,98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца $R_C = 6,95 \cdot 10^8$ м	Масса Солнца $M_C = 1,98 \cdot 10^{30}$ кг
Ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с ²	Гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м ² /кг ²
Элементарный заряд $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл	Масса покоя электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг	Масса покоя нейтрона $m_n = 1,68 \cdot 10^{-27}$ кг
Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м	Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Электрическая постоянная в законе Кулона $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9$ Н·м ² /Кл ²	
Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с	
Постоянная Вина $b = 2,90 \cdot 10^{-3}$ м·К $b^* = 3,69 \cdot 10^{11}$ с ⁻¹ ·К ⁻¹	
Постоянная Стефана – Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)	Магнетон Бора $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Атомная единица массы (а.е.м.)	$1,66 \cdot 10^{-27}$ кг 931,4МэВ
Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж / (К·моль)
Число $\pi = 3,14$	

**Множители и приставки для образования
десятичных кратных и дольных единиц
и их наименований**

Кратные			Дольные		
Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение
10^{18}	экса	Э	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санتي	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	милли	м
10^9	гига	Г	10^{-6}	микро	мк
10^6	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^3	кило	к	10^{-12}	пико	п
10^2	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10^1	дека	да	10^{-18}	атто	а

Библиографический список

- Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. – СПб.: Спец. лит., 1997. – 327 с
- Крауфорд У.* Волны. – М.: Наука, 1973. – 527 с.
- Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1969. – 399 с.
- Ландсберг Г.С.* Оптика. – М.: Наука, 1976. – 926 с.
- Рахитадт Ю.А., Четкина Н.В.* Физика. Колебания и волны: Учеб. пособие. – М.: МИСиС, 2005. – 143 с.
- Савельев И.В.* Курс физики, Т. 2. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
- Савельев И.В.* Курс физики, Т. 3. – М.: Наука, 1989. – 304 с.
- Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. – М.: Высш. шк., 1988. – 527 с.

РАХШТАДТ Юрий Александрович

ФИЗИКА

Колебания и волны

Учебное пособие

Часть 4

Редактор *О.В. Андреева*

Компьютерная верстка *М.А. Шамариной*

Подписано в печать 15.04.09	Бумага офсетная	
Формат 60 × 90 ¹ / ₁₆	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 11,25
Рег. № 011	Тираж 150 экз.	Заказ 2180

Государственный технологический университет
«Московский институт стали и сплавов»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 2
Тел.: 647-23-09, 954-19-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС,
117419, Москва, ул. Орджоникидзе, 8/9
Тел.: 954-73-94, 954-19-22