Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

УТВЕРЖДАЮ

И.о. проректора по образованию

_______________ Ю.И. Ришко

«26» ноября 2024 г.

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа

«Числа и их свойства»

Направленность: техническая
Уровень: вводный
Возраст обучающихся 16 - 18 лет
Срок реализации: 20 часов

Автор-составитель:
Ушаков В.К.,
д.т.н., профессор,
профессор кафедры математики
НИТУ МИСИС

Москва
2024

1. Пояснительная записка

Настоящая образовательная программа посвящена такой важной и сложной теме школьной математики, как «Числа и их свойства». Задачи, основанные на теории чисел, присутствуют в заданиях высокого уровня сложности, как олимпиад, так и профильного ЕГЭ по математике. Систематизированы методы и приемы решения различных типов задач на теорию чисел. Дан обширный массив детально разобранных примеров, сопровожденных заданиями для самостоятельной работы. Образовательная программа предназначена для старшеклассников, а также будет полезна преподавателям математики.

Направленность образовательной программы «Числа и их свойства»– техническая и естественнонаучная.

Уровень освоения – профильный.

Новизна программы заключается в том, что в ней серьезное внимание уделено основным теоретическим понятиям математики, приведены классификации различных типов задач, систематизированы методы решения типовых задач и указаны области их применимости, а также разобраны характерные ошибки, допускаемые учащимися.

Актуальность

На современном этапе реализации концепции преемственности средней и высшей школ особую актуальность приобретает высококачественное довузовское математическое образование. Это обусловлено тем, что экзамен по математике важен абитуриентам весьма широкого спектра популярных и востребованных современным обществом направлений и специальностей (информатика, инжиниринг, экономика, менеджмент и др.). В то же время анализ статистических данных различных вузов, а также многолетняя преподавательская и административная деятельность автора в сфере довузовского образования позволяют сделать вывод о низком уровне математической подготовки весьма значительной части абитуриентов. Проблема повышения качества математической подготовки абитуриентов обусловила необходимость проведения образовательной программы «Числа и их свойства».

Педагогическая целесообразность. Идея курса заключается в формировании образованной, творческой личности, хорошо ориентирующейся в современном разнообразии математических знаний путем изучения структурированного пакета знаний, включающего различные типы задач, а также методы и приемы, применяемые при их решении. Обучающиеся смогут освоить навыки и умения правильной идентификации типа предложенной им задачи и выбора соответствующего метода ее решения.

Программа разработана с опорой на общие педагогические принципы: актуальности, системности, последовательности, преемственности, индивидуальности, конкретности (возраста детей, их интеллектуальных возможностей), направленности (выделение главного, существенного в образовательной работе), доступности, результативности.

Цель программы – расширение знаний у обучающихся в области теоретических методов и приемов решения различных типов задач на теорию чисел, а также навыков их практического применения для решения задач повышенного и высокого уровня сложности, предлагаемых на олимпиадах и на ЕГЭ.

Задачи программы:

Обучающие:

– расширение знаний о различных типах задач на свойства чисел;

– расширение знаний о различных типах задач на числовые наборы;

– расширение знаний о различных типах задач на последовательности и прогрессии;

– расширение знаний о различных типах текстовых задач.

Развивающие:

– развитие творческого и естественнонаучного мышления;

– формирование практических навыков ведения научно-исследовательской идеятельности;

– развитие психофизиологических качеств учеников: памяти, внимания, способности логически мыслить, анализировать, концентрировать внимание на главном.

Воспитательные:

– формирование умения работать в команде, вести дискуссию и аргументировать свое мнение;

– формирование профессионально значимых и личностных качеств: чувства общественного долга, трудолюбия, коллективизма, организованности, дисциплинированности;

– формирование творческого отношение к выполняемой работе.

Отличительными особенностями программы является то, что она позволяет с высокой результативностью проводить обучение в группах с различным начальным уровнем математической подготовки учащихся за счет эффективного сочетания информационных блоков, имеющих различную глубину подачи и педагогической адаптации теоретического материала, с практическими работами, самостоятельной деятельностью учащихся. Она реализуется в короткие сроки за счет простого объяснения методов и приемов решения различных типов заданий высокого уровня сложности: свойства чисел, числовые наборы, последовательности и прогрессии, текстовые задачи. Наглядность изложения, а также адекватность примеров заданиям ЕГЭ и олимпиад вызывает высокий интерес у ребят. Это поддерживает мотивацию учащихся и результативность занятий.

Возраст обучающихся: 16-18 лет

Сроки реализации: 12 часов.

Наполняемость группы: 20-25 человек.

Режим занятий составляет по 2 академических часа в день.

Формы проведения занятий. Занятия будут проходить в форме интерактивных лекций и групповых практических семинаров с использованием мультимедийного оборудования и персональных компьютеров.

Формы организации деятельности: групповые и индивидуально-групповые; самостоятельная работа под контролем преподавателя.

Методы обучения: словесные (устное объяснение материала), наглядные (презентация), практические (решение задач под наблюдением преподавателя).

Ожидаемые результаты.

В результате освоения программы обучающиеся будут

- знать:

– теоретические методы и приемы решения различных типов задач на свойства чисел;
– теоретические методы и приемы решения различных типов задач на числовые наборы;
– теоретические методы и приемы решения различных типов задач на последовательности и прогрессии;
– теоретические методы и приемы исследования различных типов текстовых задач;
– **- уметь:**
– практически применять методы и приемы для решения задач на свойства чисел, предлагаемых на олимпиадах и в заданиях ЕГЭ высокого уровня сложности;
– практически применять методы и приемы для решения задач на числовые наборы, предлагаемых на олимпиадах и в заданиях ЕГЭ высокого уровня сложности;
– практически применять методы и приемы для решения задач на последовательности и прогрессии, предлагаемых на олимпиадах и в заданиях ЕГЭ высокого уровня сложности;
– практически применять методы и приемы для исследования различных типов текстовых задач, предлагаемых на олимпиадах и в заданиях ЕГЭ высокого уровня сложности;
– аргументировано и корректно отстаивать свою точку зрения;
– работать в команде и принимать решения.

– творчески представлять свои идеи.

Способы определения результативности программы:

– анализ активности обучающихся в проводимых мероприятиях;

– количество реализованных в ходе программы проектов;

– анкетирование обучающихся по окончании курса;

– критический анализ проведенных мероприятий;

– выявление и внедрение лучших практик.

Определение результативности и формы подведения итогов программы.

В образовательном процессе будут использованы следующие методы контроля усвоения учащимися учебного материала:

Текущий контроль. Будет проводиться с целью непрерывного отслеживания уровня усвоения материала и стимулирования учащихся. Для реализации текущего контроля в процессе объяснения теоретического материала педагог обращается к учащимся с вопросами и короткими заданиями.

Тематический контроль. Будет проводиться в виде практических заданий по итогам каждой темы с целью систематизировать, обобщить и закрепить материал.

Итоговый контроль. Будет проводиться в форме контрольной работы по всем темам курса.

В процессе обучения будут применяться различные методы контроля, в том числе с использованием современных технологий.

2. Учебно-тематический план

№ п/п	Раздел / Тема	Количество часов			Трудоёмкость
		Всего ауд. часов	Лекция	Практические занятия	
1	**Числа и их свойства**	**2**	**1**	**1**	**2**
2	**Числовые наборы**	**2**	**1**	**1**	**2**
3	**Последовательности и прогрессии**	**2**	**1**	**1**	**2**
4	**Текстовые задачи**	**14**		**14**	**14**
4.1	Текстовые задачи на целые числа	2		2	
4.2	Текстовые задачи на проценты	2		2	
4.3	Текстовые задачи на оптимальный выбор	4		4	
4.4	Решение заданий ЕГЭ и олимпиад	6		6	
ИТОГО		**20**	**3**	**14**	**20**

3. Содержание образовательной программы

1. Числа и их свойства

Теория. Делимость и ее свойства. Признаки делимости. Остатки. Десятичная запись числа. НОД и НОК. Основная теорема арифметики.

Практика. Решение заданий ЕГЭ и олимпиад.

2. Числовые наборы

Теория. Метод математической индукции. Обыкновенные и десятичные дроби. Обращение бесконечной десятичной дроби в обыкновенную дробь. Сравнение чисел.

Практика. Решение заданий ЕГЭ и олимпиад.

Раздел 3. Последовательности и прогрессии.

Теория. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия. Комбинированные задачи.

Практика. Решение заданий ЕГЭ и олимпиад.

Раздел 4. Текстовые задачи.

Практика. Текстовые задачи на целые числа. Текстовые задачи на проценты. Текстовые задачи на оптимальный выбор. Решение заданий ЕГЭ и олимпиад.

4. Методическое обеспечение программы

Методы обучения, используемые в программе: словесные (устное объяснение материала), наглядные (презентация), аналитические.

С целью стимулирования творческой активности учащихся будут использованы:

– метод погружения;

– исследовательский и проблемный методы;

– анализ справочных и литературных источников;

– поисковый эксперимент;

– анализ и обобщение результатов.

Виды дидактических материалов

Для обеспечения наглядности и доступности изучаемого материала будут использоваться:

–наглядные пособия смешанного типа (плакаты, слайды);

–дидактические пособия (карточки с заданиями, раздаточный материал).

5. Организационно-педагогические ресурсы

Материально-техническое обеспечение программы:

- компьютер/ноутбук – 1 шт.;
- проектор – 1 шт;
- канцелярские принадлежности.

Кадровое обеспечение программы:

Ушаков Владимир Кимович – д.т.н., профессор, профессор кафедры «Математика» НИТУ МИСИС

7. Список литературы

1. Кравцев С.В. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. – М.: «Экзамен», 2005. – 544с.
2. Козко А.И., Панферов В.С., Сергеев И.Н., Чирский В.Г. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 2016. – 2322 с.
3. Мамонтова Г.Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ. - М.: Новое знание, 2007. - 686с.
4. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ. – М.: Интеллект-Центр, 2010. – 80 с.
5. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. ЕГЭ. Задачи на целые числа. – Ростов-на-Дону: Легион, 2016. – 272 с.
6. Ушаков В.К. Довузовская математика: Ч.1. Арифметические и алгебраические выражения. Рациональные уравнения и неравенства./Учебное пособие. - М.: Экон-Информ, 2007.-236с.
7. Ушаков В.К. Довузовская математика: Ч.3. Прогрессии. Текстовые задачи. /Учебное пособие. - М.: Издательство «Дело» АНХ, 2010.-228 с.
8. Ушаков В.К. Довузовская математика. Алгебра: учебное пособие. - М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2014.-448 с.
9. Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2016 году. Профильный уровень. Методические указания. М.: МЦНМО, 2016. – 204 с.

Приложение

Типовые задания с решениями.

Тема «ЕГЭ. Задание №19».

1. Задание 19

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41 - 7 - 9 - 11 = 14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.

2. Задание 19

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №1 средний балл равнялся 42.

Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 вырос на 25%, средний балл в школе №2 также вырос на 25%.

а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?

б) В школе №1 все писавшие тест набрали разное количество баллов. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся этой школы?

в) Известно, что изначально в школе №2 писали тест более 10 учащихся. Какое наименьшее количество учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?

Решение.

а) Пусть в школе №1 писали тест n учащихся. Тогда суммарный балл всех учащихся этой школы равнялся $42n$, а после перехода одного учащегося в школу №2 суммарный балл стал равняться $52,5(n-1)$. Таким образом, суммарный балл уменьшился на $10,5(5-n)$. Это число должно быть натуральным, поскольку равняется количеству баллов перешедшего в школу №2 учащегося. Значит, этот учащийся набрал 21 балл и $n = 3$.

б) В школе №1 тест писали 3 учащихся, один из которых набрал 21 баллов. При этом суммарно они набрали 126 баллов. Значит, наибольшее количество баллов у учащегося с лучшим результатом могло быть тогда, когда сумма

баллов остальных двух учащихся была наименьшей, то есть когда они набрали 1 и 21 баллов. В этом случае наибольший балл равен 104.

в) Пусть в школе №2 писали тест m учащихся, а средний балл равнялся B. Тогда получаем:

$$1,25(m+1)B-mB=21 \Leftrightarrow (m+5)B=84.$$

Таким образом, число 84 должно делиться на $m + 5$. При этом $m + 5 > 15$, поскольку $m > 10$. Число 84 имеет 4 делителя, больших 15: 21, 28, 42 и 84. Значит, $m + 5 \geq 21$, откуда $m \geq 16$.

Покажем, что число m может равняться 16. Этот случай реализуется, например, если в школе №1 писали тест 3 учащихся, один учащийся набрал 21 балл, один учащийся набрал 63 балла и один учащийся набрал 42 баллов, в школе №2 писали тест 16 учащихся и каждый набрал по 4 балла, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося 21 балл.

Ответ: а) 3; б) 104; в) 16.

3. Задание 19

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков МОГЛО быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

а) Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 7 мальчиков, посетивших только кино, и 11 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 10 или больше. Тогда девочек было 10 или меньше. Театр посетило не более 2 мальчиков, поскольку если бы их было 3 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{3}{3+10}=\frac{3}{13}$, что больше $\frac{2}{11}$. Аналогично, кино посетило не более 7 мальчиков, поскольку $\frac{8}{8+10}=\frac{8}{18}>\frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 9.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию

$$\frac{m_1}{m_1+d}\leq\frac{2}{11},\frac{m_2}{m_2+d}\leq\frac{2}{5},$$

значит, $\frac{m_1}{d}\leq\frac{2}{9},\frac{m_2}{d}\leq\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\leq\frac{8}{9}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\geq\frac{1}{\frac{8}{9}+1}=\frac{9}{17}.$$

Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{17}$.

Ответ: а) да: б) 9; в) $\frac{9}{17}$.

4. Задание 19

а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Решение.

Без ограничения общности можно считать прогрессию возрастающей. Обозначим a — первый член прогрессии, n — количество членов, а d — её разность. Числа a, n, и d — натуральные.

а) Сумма первого и пятого членов этой прогрессии равна $2a + 4d$ и является чётным числом. Поскольку число 99 нечётное, сумма наибольшего и наименьшего членов конечной арифметической прогрессии из 5 натуральных чисел не может быть равной 99.

б) Сумма первого и шестого членов этой прогрессии равна $2a + 5d = 9$. Поскольку d — натуральное число, получаем d — натуральное число, получаем $d = 1$. Тогда $a = 2$. Искомые числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

в) Среднее арифметическое прогрессии равно полусумме её крайних членов, поэтому получаем $2a + (n-1)d = 13$. Значит, $(n-1)d \leq 11;\ n-1 \leq 11;\ n \leq 12$. Натуральны числа от 1 до 12 составляют прогрессию, среднее арифметическое членов которой равно 6,5, а количество членов равно 12. Поэтому наибольшее возможное количество чисел — это 12.

Ответ: а) нет; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7; в)12.