# Лабораторная работа № 1-14

# КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И МОДУЛЬ КРУЧЕНИЯ

## Цель работы

Экспериментальная проверка выполнимости закона Гука при деформации кручения. Определение модуля кручения твердого тела методом крутильных колебаний и момента инерции поперечного сечения исследуемого образца.

## Теоретическое введение

Любое реальное твердое тело под действием приложенных к нему внешних сил деформируется. Если деформация тела обратима, т.е. полностью исчезает после снятия внешней нагрузки, то такая деформация называется упругой и имеет место выполнение закона Гука. В случае, когда форма и размеры тела изменяются необратимо, то принято считать, что произошла пластическая деформация тела. В этом случае закон Гука не выполняется. Пластические деформации имеют существенное значение в технологии обработки металлов. Штамповка, изгиб, ковка изделий из металлов становятся возможными благодаря пластической деформации.

Деформация тела, в общем случае, характеризуется шестью величинами, образующими так называемый тензор деформации. Простейшим видом деформации является одноосное растяжение (или сжатие). В этом случае деформация характеризуется только одной величиной - относительным изменением продольных размеров тела. По относительному изменению длины образца и силе, вызывающей это изменение, можно найти упругие характеристики исследуемого материала.

Деформация тела имеет место всегда, когда на тело действуют силы, вне зависимости от того, покоится тело или находится в состоянии неравномерного движения.

В данной работе изучаются упругие деформации в твердых телах (металлах). Как было сказано выше, простейший вид деформации - растяжение (сжатие). Рассмотрим однородный металлический стержень, к которому приложена нагрузка вдоль его оси (рис.1). Если материал однороден, то все одинаковые элементы стержня ( например, 1 или 2 на рис.1) , которые можно выделить в любом месте стержня, будут деформироваться одинаково при заданной нагрузке (положение 1´ и 2´ на рис.1).

Стержень будет иметь однородную деформацию (растяжения), которая характеризуется относительным удлинением.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad (1)$$

где $\Delta l$ – абсолютное удлинение любого отрезка стержня, имевшего первоначальную длину $l$.

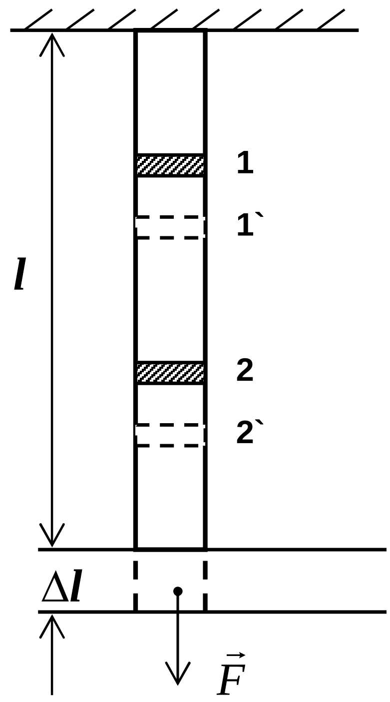



Рис.1. Схематичное изображение возникновения деформации растяжения однородного стержня под действием силы $\vec{F}$ .

Очевидно, что величина $\varepsilon$ будет одинаковой для любого участка длины и зависит только от величины силы $F$. Под действием этой силы и стержне возникает внутренняя сила упругости численно равная приложенной силе $F$. Если материал однороден, то усилия равномерно распределены по поверхности поперечного сечения стержня, причем:

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad (2)$$

где $\sigma$ - нормальное напряжение.

Как показывает опыт, в пределах упругих деформаций величина $\varepsilon$ определяется напряжением $\sigma$:

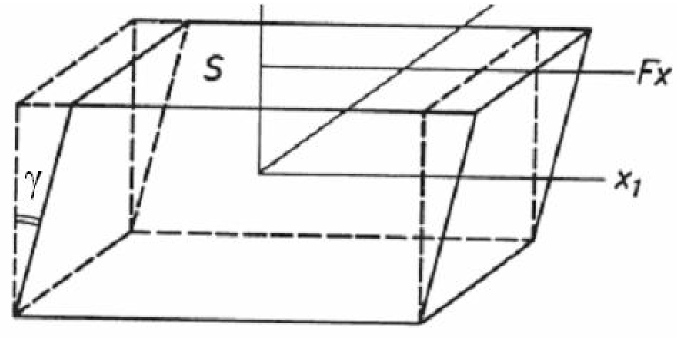
$$\sigma = E\varepsilon \qquad (3)$$

Эта зависимость носит название закона Гука, а коэффициент $E$ называется модулем Юнга, который зависит только от свойств материала:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Fl}{S\Delta l} \qquad (4)$$

Физический смысл модуля Юнга можно определить так: модуль Юнга - это такое нормальное напряжение, при котором величина $\Delta l / l = 1$. Однако, для твердых тел пределах упругих деформаций это условие не может быть достигнуто (отношение $\Delta l / l$ приближается к 1 при больших $\sigma$, т. е. за пределом упругости и раньше, чем $\Delta l / l$ станет равным 1, наступит разрушение твердого тела).

При приложении касательных сил к верхнему основанию прямоугольного образца, расстояние между слоями останутся неизменными, но точки соседних, слоев, лежащие первоначально на одной вертикали, сдвинутся относительно друг друга в одном направлении и на одну и ту же величину. Возникает однородная деформация




сдвига (

**Рис.2**).

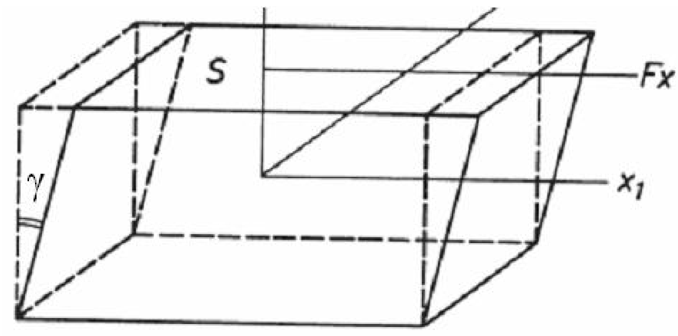



Рис.2. Возникновение деформации сдвига.

Опыт показывает, что (при небольших углах сдвига) относительный сдвиг прямо пропорционален величине касательного напряжения $\tau$, т.е.:

$$\tau = \frac{F}{S} = G\gamma, \qquad (5)$$

где $G$ - модуль сдвига для данного материала; $\gamma$ – угол сдвига.

Если стержень закрепить с одного конца, а другой конец закручивать, прилагая пару сил с моментом $\vec{M}$, то возникает деформация кручением (рис.3).

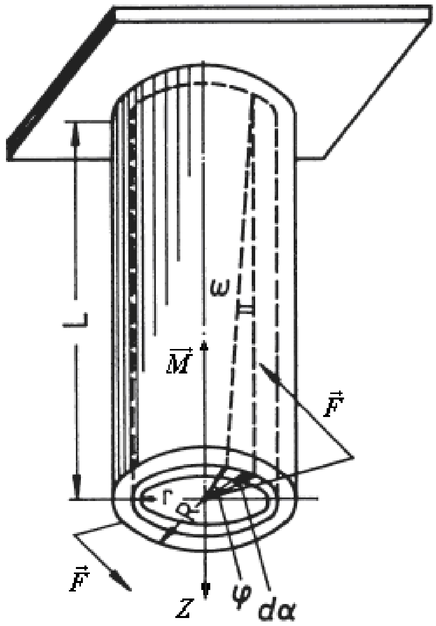



Рис.3. Возникновение деформации кручения.

Угол кручения $\varphi$ по закону Гука оказывается равным $\varphi = CM$, где $C$ – коэффициент, зависящий от свойств материала стержня.

Модуль кручения, определяемый из выражения

$$N = \frac{1}{C} = \frac{M}{\varphi}, \tag{6}$$

показывает, какой момент сил нужно приложить, чтобы закрутить стержень на угол в один радиан.

Опишем более детально процесс, возникающий при деформации кручения стержня. Выделим в теле некоторый объем, положение частей которого можно обозначить первоначальным вектором $\vec{r}_0$, а после смещения под действием приложенной пары сил – вектором $\vec{r}$. Тогда вектор малых перемещений в выделенном объеме тела можно записать как: $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (u_1, u_2, u_3)$. Компоненты тензора малых деформаций определяются выражением:

$$d_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \; i,\kappa = 1,2,3. \qquad (7).$$

Сила $d\vec{F}$, приложенная к элементарному слою выделенного объема тела, действующая на параллельные участки вдоль оси координат, определяет компоненты тензора напряжений $\tau_{ik}$.

При малых деформациях между компонентами тензора деформации $d_{lm}$ и тензора напряжений $\tau_{ik}$ имеет место линейная зависимость, называемая обобщенным законом Гука:

$$\tau_{ik} = \sum_{l,m} c_{ik}^{lm} d_{lm}, \quad l,m = 1,2,3, \qquad (8)$$

где $c_{ik}^{lm}$ - тензор упругих модулей.

Упругие свойства изотропных твердых тел характеризуются только двумя модулями – модулем Юнга $E$ и модулем сдвига $G$.

Как видно из рис.3, сила, действующая в направлении перпендикулярном продольной оси стержня (оси $Z$) равна:

$$dF_x = G \cdot \gamma \cdot dS = G \cdot \frac{r\varphi}{L} \cdot rdr \cdot d\alpha. \qquad (9)$$

Тогда компонента тензора сдвиговых напряжений вдоль этого направления будет:

$$\tau_{12} = \frac{dF_x}{dS} = G \cdot d_{12}, \qquad (10)$$

где $d_{12} = \gamma = \dfrac{r\varphi}{L}$ - соответствующая сдвиговая компонента тензора деформации.

Момент пары сил, по выбранному направлению есть:

$$dM_Z = dF \cdot_x r = \frac{Gr^3\varphi}{L} \cdot dr \cdot d\alpha \,. \qquad (11)$$

После интегрирования по $r$ в пределах от $0$ до $R$ и по углу $\alpha$ в пределах от $0$ до $2\pi$ получаем значение полного момента сил:

$$M_Z = \int dM_Z = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \varphi \frac{R^4}{L} \,. \qquad (12)$$

Момент силы $M_Z$, вызывающий кручение вертикальных слоев образца, связан с углом закручивания $\varphi$ и модулем кручения $N$ зависимостью:

$$M_Z = N \cdot \varphi \,. \qquad (13)$$

Следовательно, с учетом (12) получаем значение модуля кручения:

$$N = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{L} \cdot G \,. \qquad (14)$$

Величину модуля кручения можно рассчитать, зная размеры образца и модуль сдвига G, для данного материала.

Один из видов колебаний упругих систем, при которых отдельные элементы системы испытывают деформации кручением, называют крутильными колебаниями.

Применим основной закон динамики вращательного движения для нашего случая. Получаем:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \,, \qquad (15)$$

где $\vec{L}$ - момент импульса, направленный вдоль оси стержня.

При вращательном движении:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}. \tag{16}$$

где $I$ – момент инерции стержня относительно оси вращения.

Тогда момент сил по величине равен:

$$M = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{17}$$

Согласно рис.3,

$$M = -M_Z. \tag{18}$$

Подставляя (18), с учетом (13), в (17), получаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно угла закручивания $\varphi$:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + N\varphi = 0. \tag{19}$$

Введем обозначение $\frac{N}{I} = \omega^2$. Тогда уравнение (19) принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \tag{20}$$

Как известно, циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, получаем выражение для периода собственных крутильных колебаний стержня:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{N}}. \tag{21}$$

С учетом (14), окончательное выражение для периода крутильных[ колебаний будет:

$$T = \frac{2\pi}{R^2}\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{G} \cdot I}. \tag{22}$$

В данной работе модуль сдвига $G$ и модуль кручения $N$ определяются по периоду крутильных колебаний $T$ при известном моменте инерции $I$.

**Описание экспериментальной установки**

Общий вид установки для создания деформации кручения металлического образца показан на рис.4.


Рис.4. Общий вид установки.

Установка представляет собой штатив1,на котором один из концов образца 2 закреплен неподвижно. Другой конец образца крепится цангами (грузами), которые связаны с поперечной линейкой 3. Снизу к цангам и линейке прикреплен диск 4 с нанесенными на него углами для отсчета углов поворота при закручивании образца. В состав установки входят также секундомер 5  для фиксирования времени колебаний, динамометры 6, а также набор исследуемых образцов 7.

Сведения о приборах необходимо занести в таблицу 1.

*Таблица 1.* Технические данные приборов

| Прибор | Предел измерения | Цена деления | Класс точности | Абсолютная погрешность |
|---|---|---|---|---|
| Лимб с угловыми делениям | | | | |
| Динамометр | | | | |
| Секундомер | | | | |

**Порядок выполнения работы.**

При выполнении работы необходимо строго соблюдать общие правила по технике безопасности и охране труда, установленные на рабочем месте студента в лаборатории. Кроме того, во время проведения работы не следует:

- касаться подвижных частей установки;
- останавливать руками колеблющуюся систему;
- менять измеряемые образцы при подвижной системе и включенном секундомере.

1. Измерить длину и диаметр образца, записать материал образца и соответствующее значение модуля сдвига из таблицы 2.

*Таблица 2*. Значения модуля сдвига для различных материалов

| Материал | Модуль сдвига $G$, $10^9 \dfrac{Н}{м^2 \cdot рад}$ |
|---|---|
| Медь | 38 |
| Алюминий | 24 |
| Сталь | 76 |
| Сплав | 32 |

2. Закрепить испытуемый образец в стойке, строго соблюдая его вертикальное положение.

3. Отклонить рейку от положения равновесия на угол $\varphi$, записать значение этого угла, фиксируемого стрелкой по лимбу. Отпустить систему с одновременным включением секундомера. После трех полных колебаний остановить секундомер. Записать время и число колебаний.

4. Зацепить петлей динамометра один из штифтов на рейке, отвести рейку на тот же угол, что был указан в индивидуальном задании, фиксируя по делениям динамометра величину приложенной силы $\vec{F}$.

5. Измерить расстояние от цента рейки до штифта с петлей динамометра $\vec{r}$.

6. Рассчитать момент силы $M_Z = F \cdot r$. Сравнить полученное значение момента силы с его значением, рассчитанным в пункте 1 раздела “Обработка результатов измерений” данной работы.

7. Измерения повторить не менее пяти раз.

8. Изменить угол отклонения, фиксируемого стрелкой, и повторить измерения п.3 настоящего раздела.

9. Провести измерения периода колебаний для образцов разной длины и диаметра (не менее 3-х).

10. Полученные результаты занести в таблицу 3.

*Таблица3*. Результаты измерений

| Материал образца | Диаметр образца $D$, м | Длина образца $L$, м | Угол отклонения $\varphi$ , град | Время $n$ полных колебаний $t$, с | Период колебаний $T$, с | Усилие $F$ (сила), Н | $r$ , м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

## Обработка результатов эксперимента

1. По результатам измерений с учетом индивидуального задания рассчитать величину момента закручивающих сил по формуле:

$$M_Z = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4}{L} \cdot G \cdot \varphi,$$

где $G$ - модуль сдвига, соответствующий материалу образца из таблицы 2; $\varphi$ - угол отклонения, фиксируемый по стрелке; $D$ – диаметр образца; $L$- длина образца.

2. Рассчитать значение модуля кручения по формуле:

$$N = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4}{L} \cdot G.$$

3. Построить график зависимости момента силы $M_Z = f(\varphi)$, откладывая по оси Y значения $M_Z$, а по оси X - значения угла $\varphi$ в радианах.

4. Из графика определить значение модуля кручения $N$ (как тангенс угла наклона графика к оси X) и сравнить его со значением $N$, полученным в п.2 данного раздела.

5. По измеренному времени колебаний $t$ рассчитать период колебаний: $T = \frac{t}{k}$, где $k$ - число полных колебаний.

6. По вычисленным значениям периода колебаний $T$ и найденной величине модуля кручения $N$ определить момент инерции поперечного сечения испытуемого стержня по формуле:

$$I = \frac{N \cdot T^2}{4\pi^2}$$

7. Рассчитать погрешности определяемых величин. Поскольку величина модуля кручения $N$ есть результат косвенного измерения, то его абсолютная погрешность $\Delta N$ рассчитывается методом частных производных $N$ по переменным $D$ и $L$:

$$\Delta N = \left(\frac{\partial N}{\partial D}\right)_{\overline{D},\overline{L}} \cdot \Delta D + \left(\frac{\partial N}{\partial L}\right)_{\overline{D},\overline{L}} \cdot \Delta L \ ,$$

где $\Delta D$ и $\Delta L$ - абсолютные погрешности измерений диаметра и длины образца; $\overline{D}$ и $\overline{L}$ - средние значения $D$ и L для данного образца.

Найти $\Delta N$ можно также через относительную погрешность измерения

$$\delta = \frac{\Delta N}{N}.$$

При определении $\delta$ выражение для $N$ надо сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать:

$$(\ln(N))' = \left(4\ln D + \ln L\right)',$$

$$\delta = \frac{\Delta N}{N} = 4\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L}.$$

Тогда $\Delta\overline{N} = \delta \cdot \overline{N}$.

Величины $D$ и $L$ - прямые измерения. Абсолютная погрешность прямого измерения вычисляется как сумма среднеквадратичной погрешности ($\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum \Delta D_i^2}{n(n-1)}}$ ) и погрешности измерительного прибора (приборной погрешности $\Delta D_{приб}$). Например,

$$\Delta\overline{D} = \sqrt{\frac{\sum \Delta D_i^2}{n(n-1)}} + \Delta D_{приб} ,$$

где $\Delta D_i = \left|D_i - \vec{D}\right|$ - погрешности отдельных измерений $D$; $n$ - общее число измерений.

Аналогично рассчитывается абсолютная погрешность прямого измерения $L$.

*Примечание*. Если значения $D$ и $L$ заданы, то в качестве абсолютной погрешности их измерения берётся половина цены наименьшего деления измерительного прибора ( а не рязряд последней значащей цифры).

Для определения абсолютной погрешности момента инерции $\Delta I$ применяется та же методика, принимая за переменные $T$ и $N$.

9. Окончательные результаты записываются в виде:

$$N = \overline{N} \pm \Delta\overline{N} \quad \frac{H \cdot м}{рад} \text{ Н·м/рад;}$$

$$I = \bar{I} \pm \Delta\bar{I} \ \text{ Кг·} м^2 .$$

## Библиографический список


*а*) *основная*

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики: в 5 кн., кн. 1. М.: АСТ: Астрель, 2005. С. 69-73, 125-128, 179-183.
2. *Капуткин Д.Е., Шустиков А.Г.* Физика. Обработка результатов измерений при выполнении лабораторных работ. М.:МИСиС. «Учеба». 2007.

*б ) дополнительная*

1. *Батурин Б.Н.* Правила электробезопасности при выполнении лабораторных работ. Учебное пособие. М.: МИСиС. 1995.-38с.
2. Физика. Раздел: Механика. Лабораторный практикум. М.: МИСиС. 2000.


## Контрольные вопросы.

1. Что такое деформация? При каких условиях она возникает? Каковы основные виды деформаций и каковы причины, вызывающие те или иные деформации?.

2. Как формулируется закон Гука для деформаций растяжения- сжатия, сдвига и кручения?.

3. Каков физический смысл модулей Юнга, сдвига и кручения и от каких параметров, от которых они зависят?

4. Где и как возникают крутильные колебания в деформируемом стержне?

5. Что такое момент инерции, от каких параметров он зависит?

6. При рассмотрении металлического стержня (образца в данной работе), пояснить, в каких слоях (вертикальных или горизонтальных) происходят деформации сдвига и кручения?

7. Задача. Стержень из алюминия имеет диаметр 2мм, длину 0,8м деформируется кручением. Период крутильных колебаний равен 0,5с. Определить момент инерции поперечного сечения образца.

**Индивидуальные задания**

**Задание 1**

1. Провести измерения времени 3-х колебаний согласно пункту 3 раздела "Порядок выполнения работы" не менее трех раз для образца из меди при значениях углов $\varphi =$ $6^0, 8^0, 10^0, 12^0$. Определить период колебаний для каждого угла.

2. Рассчитать значение модуля кручения по формуле: $N = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4}{L} \cdot G$.

Рассчитать величину момента инерции по формуле $I = \frac{N \cdot T^2}{4\pi^2}$ и его погрешность.

3. Сформулировать закон Гука для деформации растяжения-сжатия и деформации сдвига. Пояснить физический смысл модуля Юнга и модуля сдвига.

**Задание 2**

1. Для образца из меди динамометром определить величину прикладываемой силы (измерения провести согласно пункту 4 раздела “Порядок выполнения работы” для углов $\varphi = 6^0, 8^0, 10^0, 12^0$.) и не менее двух значений расстояний от центра до штифта, за который крепится динамометр (крайний на радиусе диска и на 5см ближе к оси). Рассчитать величину момента сил.

2. Сравнить полученное значение момента сил с моментом сил, рассчитанным по уравнению (6) данного описания. Построить график зависимости $M_z = f(\varphi)$. Определить из графика величину N и сравнить её с рассчитанной по формуле $N = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4}{L} \cdot G$. Рассчитать погрешности определения N.

3. Вывести уравнение крутильных колебаний, пояснить физический смысл момента инерции.

**Задание 3**

1. Провести измерения согласно пункту 3 раздела “Порядок выполнения работы” не менее трех раз для образца из сплава при значении углов $\varphi = 6^0, 8^0, 10^0, 12^0$. Рассчитать период крутильных колебаний.

2.Рассчитать величину модуля кручения, момент инерции и его абсолютную и относительную погрешности эксперимента.

3. Пояснить какова зависимость момента сил от угла закручивания.

**Задание 4**

1. Для образца из алюминия динамометром определить величину прикладываемой силы (измерения провести согласно пункту 4 раздела “Порядок выполнения работы” для углов $\varphi = 6^0, 8^0, 10^0, 12^0$.). Измерения провести для не менее двух значений расстояний от центра до штифта, за который крепится динамометр (крайний на радиусе диска и на 5см ближе к оси). Рассчитать величину момента сил.

2.Сравнить полученное значение момента сил с моментом сил, рассчитанным по уравнению (6) данного описания. Построить график зависимости $M_z = f(\varphi)$. Определить из графика величину N и сравнить её с рассчитанной по формуле $N = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4}{L} \cdot G$.

3. Вывести уравнение крутильных колебаний и пояснить причину их возникновения.