№ 3493 МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

ИНСТИТУТ БАЗОВОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра физики

В.А. Степанова
И.Ф. Уварова

ФИЗИКА

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Учебное пособие для практических занятий

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета

МИСиС

Москва 2020

УДК 53
С79

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доцент *Ю.В. Осипов*

Степанова В.А., Уварова И.Ф.
С79 Физика. Механика и молекулярная физика : учеб. пособие для практических занятий / В.А. Степанова, И.Ф. Уварова. – М. : Изд. Дом НИТУ «МИСиС», 2020. – 104 с.
ISBN 978-5-907226-68-5

Учебное пособие содержит теоретический материал по основным темам дисциплины «Физика. Механика и молекулярная физика» для самостоятельной подготовки студентов к выполнению домашних заданий и практическим занятиям. Имеются методические указания к решению задач, приведены примеры решения типичных задач. В приложении содержатся некоторые справочные данные.

Предназначено для студентов-бакалавров ИТАСУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.04, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03.

УДК 53

ISBN 978-5-907226-68-5

Содержание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ

Физика является одной из тех наук, знание которых необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин. При изучении дисциплины «Физика» большое значение имеет практическое применение теоретических знаний при решении задач. Хорошо известно, что единственный способ научиться решать задачи – пытаться решать их самостоятельно, поэтому освоение дисциплины «Физика» невозможно без развития навыков и культуры решения физических задач, умения применять физические законы к анализу реальных процессов и явлений. При этом решение физической задачи всегда предполагает создание модели физического процесса, которая учитывает лишь существенные стороны явления, содержит неизбежные приближения и допущения. Решение практически любой задачи допускает применение различных методов, основанных на одних и тех же физических законах. Результатом решения должно стать выражение требуемых физических величин через величины, известные из условия задачи.

Настоящий сборник содержит теоретический материал по механике и молекулярной физике, примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного выполнения домашних заданий. Весь материал сгруппирован в семь разделов в соответствии с программой дисциплины «Физика. Механика и молекулярная физика» для студентов-бакалавров ИТАСУ. Каждая задача сформулирована в общем виде и дополнена таблицей числовых данных, размещенных в отдельных строках, которые обозначены соответствующими номерами (шифрами). Физическая величина, числовое значение которой необходимо определить в данном шифре, обозначена знаком «?». Величины, обозначенные прочерком «–», для решения данного шифра не требуются, т.е., определять их не нужно.

Единицы измерения, в которых необходимо выразить определяемую величину, указаны в заголовке соответствующей графы таблицы числовых данных (столбца). Во многих случаях используются дольные или кратные от единиц СИ, а также другие единицы, применяемые в науке и технике. Таблицы единиц измерения физических величин, соотношения между различными единицами, приставки для образования кратных и дольных единиц, а также значения основных физических постоянных содержатся в приложении.

Номер задачи и номер шифра (строка числовых данных) студент выбирает в соответствии с маршрутом выполнения домашних заданий по своему номеру в журнале группы. Сроки и порядок сдачи (защиты) домашних заданий определяются графиком учебных занятий.

Задание должно быть оформлено в отдельной тонкой школьной тетради, на обложке которой указываются фамилия и имя студента, номер группы, номер студента по журналу группы, номер домашнего задания, номера вошедших в него задач, шифр к задаче.

При решении каждой задачи необходимо полностью переписать условие, записать его в кратком виде, при необходимости сделать поясняющий рисунок или схему. Образцы решения и оформления задач приведены в данном пособии.

Приступая к решению задачи, внимательно ознакомьтесь с условием, вникните в постановку вопроса. Определите основные физические законы, которые можно использовать при решении задачи. В ходе решения необходимо пояснить и обосновать использование тех или иных законов, соотношений, формул. Ознакомьтесь с таблицами физических констант, которые даны в приложении, используя их при решении, не вводите иных обозначений и числовых значений для этих констант.

Для решения большинства задач требуется выполнить аккуратный подробный чертеж, рисунок или схему (см. примеры решения). На чертеже следует указать все рассматриваемые объекты, обозначения, векторы, систему координат. В комментариях к рисунку нужно разъяснить роль допущений, сделанных в задаче. В ряде случаев это облегчает решение задачи, позволяет представить физический процесс наглядно, а в задачах по механике решение без чертежа или рисунка, как правило, невозможно.

За редким исключением каждая задача должна быть решена в общем виде – так, чтобы искомая величина была выражена через заданные в условии величины. Решение в общем виде позволяет проанализировать результат, получить определенную закономерность, понять, как зависит искомая величина от заданных в условии параметров. Полученное в общем виде решение необходимо проверить с точки зрения размерности в обобщенном (буквенном) виде. Если размерность не соответствует искомой физической величине, нужно искать ошибки в решении. В отдельных случаях возможна подстановка числовых данных в промежуточные выражения, если это существенно облегчает решение, а выражение для искомой величины слишком громоздкое.

Приступая к вычислениям, выразите все числовые данные в одной системе единиц, желательно в СИ. Если в выражение входят отношения однородных физических величин в одинаковой степени, то их можно выражать в любых, но одинаковых единицах. Получив числовой ответ, проанализируйте его на разумность. Так, скорость движения человека не превышает нескольких километров в час, а давление идеального газа – нескольких атмосфер. Косвенной проверкой может служить сравнение полученного значения с данными для этой физической величины в таблице к задаче. Округлите полученный результат, сохранив в нем столько значащих цифр, сколько содержится в других значениях для этой физической величины в таблице. Обычно достаточно двух значащих цифр.

Физика – наука точная, широко использующая математический аппарат. Физические величины могут быть скалярными или векторными. Скалярные величины могут быть положительными и отрицательными, они складываются алгебраически. Векторные величины складываются геометрически. При решении задач используют дифференциальное и интегральное исчисление. Следовательно, без знания основ математики решать задачи по физике невозможно.

Обобщая вышесказанное, сформулируем перечень основных методических рекомендаций по выполнению индивидуального домашнего задания.

1 Внимательно прочитайте условие задачи.

2 Сделайте краткую запись данных величин (выразив их значения в одной системе измерений) и искомых величин.

3 В зависимости от условия задачи (где это возможно) сделайте чертеж, схему или рисунок с обозначением данных задачи.

4 Выяснив, какие физические законы или явления лежат в основе данной задачи, запишите их математические выражения, прокомментируйте применение именно данных законов и соотношений.

5 Решите задачу в общем виде, выразив искомую физическую величину через заданные в задаче величины и физические постоянные величины (в буквенных обозначениях без подстановки числовых значений в промежуточные формулы).

6 Проверьте правильность размерности искомой физической величины.

7 Произведите вычисления, подставив числа в окончательную формулу и укажите единицу измерения искомой физической величины.

8 Запишите ответ в кратком виде.

Если при решении задачи возникают осложнения с пониманием условия задачи и, как следствие, с выбором конкретного способа ее решения, необходимо внимательно ознакомиться с рекомендованной литературой, а именно, с теми разделами курса, которые нашли отражение в условиях. В случае неудачи рекомендуется обратиться за помощью к преподавателю.

1 Кинематика поступательного и вращательного движения

1.1 Теория

Механика – часть физики, в которой изучаются закономерности механического движения и причины, вызывающие это движение.

Механическое движение – изменение положения тел в пространстве относительно других тел или частей тел с течением времени.

Положение материальной точки в пространстве можно задать радиус-вектором

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \tag{1.1}$$

который при движении материальной точки изменяется с течением времени:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,, \tag{1.2}$$

и материальная точка получает перемещение $\Delta\vec{r}$ (рисунок 1.1).

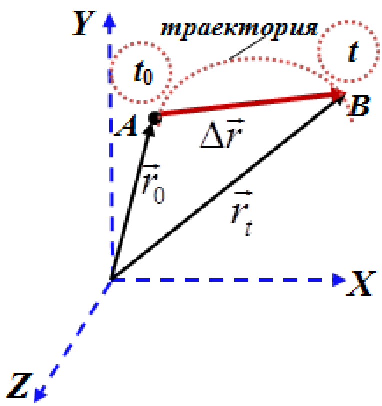

Рисунок 1.1 – Перемещение материальной точки из A (момент времени t_0) в B (момент времени t)

Для характеристики движения вводится векторная величина – скорость, мгновенное значение которой определяется как

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} . \qquad (1.3)$$

Скорость определяет быстроту движения и его направление в данный момент времени. Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения.

Физической величиной, которая определяет изменение скорости, является ***ускорение***:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} . \qquad (1.4)$$

Составляющие ускорения:

- тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения скорости по величине; вектор этого ускорения направлен по касательной к траектории движения тела, в сторону (или противоположно) вектора мгновенной скорости (рисунок 1.2);

- нормальное ускорение $\vec{a}_n$ характеризует быстроту изменения скорости по направлению; вектор этого ускорения направлен перпендикулярно вектору мгновенной скорости, вдоль радиуса R к центру кривизны траектории движения тела (см. рисунок 1.2):

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} ; \; \vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}; \qquad (1.5)$$

- полное ускорение $\vec{a}$ при криволинейном движении – это векторная сумма тангенциальной и нормальной составляющих ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n ; \; a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} . \qquad (1.6)$$

При равнопеременном движении зависимости скорости и перемещения от времени задаются уравнениями:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t ; \; \Delta\vec{r}(t) = \vec{r}_t - \vec{r}_0 = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} . \qquad (1.7)$$

Мерой перемещения тела при вращении за время Δt служит вектор $\Delta\vec{\varphi}$ элементарного поворота тела; вектор $\Delta\vec{\varphi}$ направлен вдоль оси вращения (рисунок 1.3).

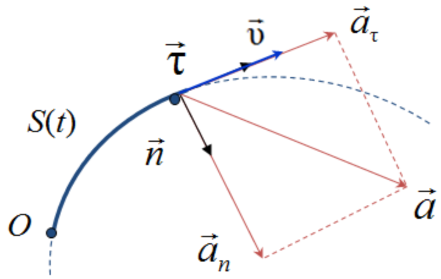

Рисунок 1.2 – Тангенциальное и нормальное ускорения при ускоренном движении: $\vec{n}$ – нормальный орт, $\vec{\tau}$ – тангенциальный орт

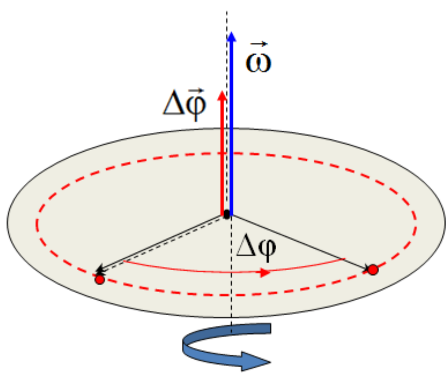

Рисунок 1.3 – Векторы угла поворота $\Delta\vec{\varphi}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ при вращении материальной точки

Угловая скорость $\vec{\omega}$ определяется первой производной угла поворота по времени

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} . \tag{1.8}$$

Линейная и угловая скорости связаны соотношением

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right] . \tag{1.9}$$

Вектор, характеризующий быстроту изменения угловой скорости тела, называется ***угловым ускорением*** $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} . \tag{1.10}$$

1.2 Пример решения и оформления задачи

Тело, брошенное со скоростью υ_0 с высоты h вверх под углом α к горизонту, через промежуток времени t упало на землю на расстоянии ℓ (по горизонтали) от места бросания. В момент падения скорость тела образует с горизонтом угол φ. Определить неизвестную величину.

h, м	υ_0, м/с	t, с	α, град	ℓ , м	φ, град
—	25,0	–	65	66,0	?

Решение

Рассмотрим движение тела, брошенного со скоростью υ_0, вектор которой направлен под углом α к горизонту, в плоскости XOY, расположив тело в момент бросания так, как это изображено на рисунке 1.4.

В отсутствие сил сопротивления движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно рассматривать как частный случай криволинейного движения под действием силы тяжести.

Применяя второй закон Ньютона, получаем

$$m\vec{g} = m\vec{a} , \tag{1.11}$$

откуда

$$\vec{a} = \vec{g} , \tag{1.12}$$

где $\vec{g} = \text{const}$ – ускорение свободного падения, вектор которого всегда направлен вертикально вниз и численно равен 9,8 м/с^2.

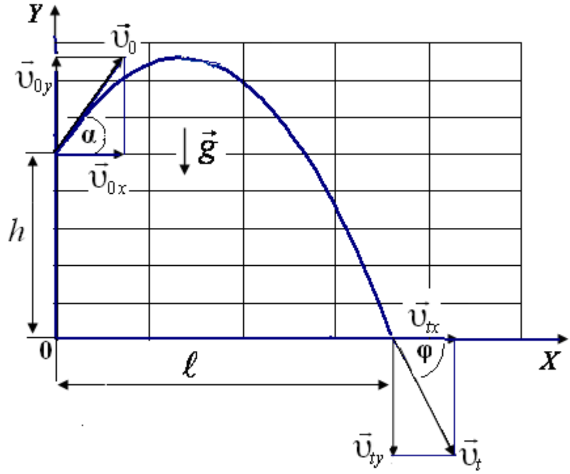

Рисунок 1.4 – Траектория движения тела, брошенного под углом к горизонту

Проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на оси OX и OY равны:

$$\begin{cases} a_x = 0; \\ a_y = -g. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Значения проекций вектора ускорения на оси OX и OY дают основание сделать следующий вывод: тело, брошенное под углом к горизонту, одновременно участвует в двух движениях – равномерном по горизонтали и равнопеременном по вертикали.

Скорость тела в таком случае определяется формулой

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y. \qquad (1.14)$$

Скорости тела в начальный момент времени (в момент бросания тела) и в момент падения на землю вычисляются по формулам:

$$\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon}_{0x} + \vec{\upsilon}_{0y}; \qquad (1.15)$$

$$\vec{\upsilon}_t = \vec{\upsilon}_{tx} + \vec{\upsilon}_{ty}. \qquad (1.16)$$

Проекции вектора начальной скорости на оси OX и OY равны:

$$\begin{cases} \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha; \\ \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha. \end{cases} \tag{1.17}$$

Для равнопеременного движения зависимости скорости и радиус-вектора от времени задаются уравнениями:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t; \tag{1.18}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \tag{1.19}$$

где $\vec{\upsilon}_0$ *и* $\vec{r}_0$ – это скорость и радиус-вектор тела в начальный момент времени.

Проекции векторного уравнения (1.18) на оси OX и OY равны:

$$\begin{cases} \upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + a_x t; \\ \upsilon_y(t) = \upsilon_{0y} + a_y t. \end{cases} \tag{1.20}$$

С учетом равенств (1.13) получаем для момента времени t:

$$\begin{cases} \upsilon_{tx} = \upsilon_{0x} = \text{const}; \\ \upsilon_{ty} = \upsilon_{0y} - gt. \end{cases} \tag{1.21}$$

По условию задачи дано расстояние от места бросания до места падения тела по горизонтали, поэтому рассмотрим проекцию векторного уравнения (1.19) на ось OX:

$$x_t = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{1.22}$$

С учетом равенств (1.13) получаем

$$x_t = x_0 + \upsilon_{0x} t, \tag{1.23}$$

где x_t и x_0 – координаты тела по оси OX в начальный момент времени и в момент времени t, которые по условию равны

$$x_0 = 0 \text{ и } x_t = \ell. \tag{1.24}$$

Подставляя в уравнение (1.23) значения из равенств (1.24), получаем формулу вычисления времени движения тела

$$t = \frac{\ell}{\upsilon_{0x}}, \qquad (1.25)$$

что позволяет получить формулу вычисления вертикальной составляющей скорости тела в момент падения, используя (1.21):

$$\upsilon_{ty} = \upsilon_{0y} - \frac{g\ell}{\upsilon_{0x}}. \qquad (1.26)$$

На рисунке 1.4 видно, что

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\left|\upsilon_{ty}\right|}{\upsilon_{tx}}. \qquad (1.27)$$

Используя уравнения (1.21) и (1.17), получаем

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\left|\upsilon_0 \sin\alpha - \dfrac{g\ell}{\upsilon_0 \cos\alpha}\right|}{\upsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\left|\upsilon_0^2 \sin 2\alpha - 2g\ell\right|}{2\upsilon_0^2 \left(\cos\alpha\right)^2}, \qquad (1.28)$$

откуда угол φ, который в момент падения скорость тела образует с горизонтом, вычисляется по формуле

$$\boxed{\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\left|\upsilon_0^2 \sin 2\alpha - 2g\ell\right|}{2\upsilon_0^2 \left(\cos\alpha\right)^2}}. \qquad (1.29)$$

Все данные в задаче выражены в единицах системы СИ. Проверим размерность и проведем вычисления:

$\upsilon_0 = 25{,}0$ м/с
$\alpha = 65°$
$\ell = 66{,}0$ м

$\varphi = ?$

$$[\varphi] = \mathrm{arctg}\frac{\left(\text{м/с}\right)^2 - \text{м/с}^2 \cdot \text{м}}{\left(\text{м/с}\right)^2} =$$

$$= \mathrm{arctg}\left(\text{безразмерное число}\right) = \text{град};$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\left|\left(25{,}0\right)^2 \sin 130° - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 66{,}0\right|}{2\left(25{,}0\right)^2 \left(\cos 65°\right)^2} = 75°.$$

Ответ: $\varphi = 75°$.

1.3 Домашние задания

Задача 1–01

Материальная точка начинает двигаться по часовой стрелке по окружности радиусом R с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Через промежуток времени t вектор полного ускорения a образует с вектором мгновенной скорости υ угол β. Определить неизвестную величину.

Шифр	R, см	a_τ, см/с^2	t, с	υ, м/с	β, град	a, см/с^2
1	10	0,4	?	–	60	–
2	20	–	5,0	0,02	–	?
3	30	0,5	–	?	45	–
4	–	–	6,5	0,03	?	0,8
5	50	0,5	–	?	–	0,9

Задача 1–02

Небольшой камень бросили со скоростью υ_0 с высоты h вверх под углом α к горизонту, через промежуток времени t он упал на землю на расстоянии ℓ (по горизонтали) от места бросания. Определить неизвестную величину.

Шифр	h, м	υ_0, м/с	t, с	α, град	ℓ, м
1	8,9	45,0	5,2	?	–
2	14,0	18,0	–	45	?
3	?	–	4,0	30	50,0
4	15,0	–	?	45	20,0
5	10,5	?	8,0	40	–

Задача 1–03

Материальная точка движется в плоскости (X,Y) так, что ее радиус-вектор меняется по закону $\vec{r}(t)$. В момент времени t модуль нормального ускорения точки будет a_n, модуль тангенциального ускорения точки – a_τ, радиус кривизны траектории – R, угол между вектором скорости и вектором полного ускорения – α.

Шифр	$\vec{r}(t)$, м	t, с	a_n, м/с^2	a_τ, м/с^2	R, м	α, град
1	$\vec{r}=8t\vec{i}+t^2\vec{j}$	3,0	?	–	–	–
2	$\vec{r}=8\sqrt{t}\vec{i}+t^3\vec{j}$	1,0	–	?	–	–
3	$\vec{r}=\left(2t^2-8\right)\vec{i}+(12-6t)\vec{j}$	2,0	–	–	?	–
4	$\vec{r}=\left(10-5t^2\right)\vec{i}+10t\vec{j}$	1,0	–	–	–	?
5	$\vec{r}=8t\vec{i}+t^2\vec{j}$	?	–	–	–	60

Задача 1–04

В начальный момент времени две материальные точки находятся на некоторой высоте от поверхности земли в одной точке и обладают скоростями, равными υ_{01} и υ_{02} соответственно, направленными горизонтально в противоположные стороны. Через время t после начала одновременного движения векторы скоростей образуют между собой угол α, а расстояние между материальными точками становится равным ℓ. Определить неизвестную величину.

Шифр	υ_{01}, м/с	υ_{02}, м/с	α, град	t, с	ℓ, м
1	?	45,5	45	10	–
2	9,3	?	60	4	–
3	24,0	16,0	?	6	–
4	42,0	68,8	90	?	–
5	12,0	5,0	90	–	?

Задача 1–05

Тело, брошенное со скоростью υ_0 вверх под углом α к горизонту, упало на землю через промежуток времени t на расстоянии ℓ (по горизонтали) от места бросания. Максимальная высота полета равна h, а радиус кривизны траектории в высшей точке подъема равен R. Определить неизвестную величину.

Шифр	υ_0, м/с	α, град	t, с	ℓ , м	h, м	R, м
1	?	–	–	–	3,0	5,0
2	–	–	?	29,9	–	17,2
3	–	?	–	–	6,0	10,0
4	15,0	30	–	?	–	–
5	42,0	–	7	–	?	–

Задача 1–06

С некоторой высоты со скоростью υ_0 горизонтально бросили небольшой камень. Через время t после начала движения радиус кривизны траектории камня равен R, вектор скорости составляет угол φ с горизонтом; a_n и a_τ – значения соответственно нормального и тангенциального ускорений камня в этот момент времени. Определить неизвестную величину.

Шифр	υ_0, м/с	t, с	R, м	φ, град	a_n, м/с^2	a_τ, м/с^2
1	15,0	2	?	–	–	–
2	?	3	–	–	5,5	–
3	10,0	–	30	–	–	?
4	?	2	–	–	–	2,6
5	11,0	?	100	–	–	–

2 Динамика поступательного движения

2.1 Теория

В основе классической динамики лежат три закона Ньютона, которые играют исключительную роль и являются обобщением огромного числа опытных данных.

Первый закон Ньютона: всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее (его) изменить это состояние.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется ***инертностью***. Поэтому первый закон Ньютона называют также **законом инерции**.

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются инерциальными системами отсчета.

Инерциальной системой отсчета является такая система отсчета, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют скорость своего движения, т.е., иными словами, приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы).

Масса тела – физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные и гравитационные свойства.

Масса однородного тела объемом V вычисляется по формуле

$$m = \rho V \,, \tag{2.1}$$

где ρ – плотность.

Плотность тела – физическая величина, которая характеризует механические свойства тел и зависит от структуры вещества, из которого изготовлено тело.

В СИ масса измеряется в килограммах (кг).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость движения, т.е. приобретают ускорения (динамическое проявление сил), либо деформируются, т.е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил). В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения.

Итак, ***сила*** – это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры. В СИ сила измеряется в ньютонах (Н).

Некоторые виды сил в механике (представлены на рисунке 2.1):

- сила тяжести $m\vec{g}$ – сила гравитационного притяжения тела к Земле вблизи ее поверхности, вектор этой силы направлен вертикально вниз к поверхности Земли;

- сила реакции опоры $\vec{N}$ – это мера противодействия опоры при давлении на нее со стороны покоящегося или движущегося при контакте с ней тела, вектор этой силы направлен вверх перпендикулярно поверхности опоры;

- сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ – возникает при движении тел и соприкосновении двух поверхностей, вектор этой силы направлен противоположно скорости или направлению возможного движения;

- сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ – возникает в результате упругой деформации тела и препятствует ей, вектор этой силы направлен в сторону, противоположную деформации.

Сила – величина векторная. Поэтому если на тело действуют несколько сил, то они складываются по правилу сложения векторов:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{2.2}$$

Векторная сумма сил, действующих на тело, называется ***равнодействующей силой***.

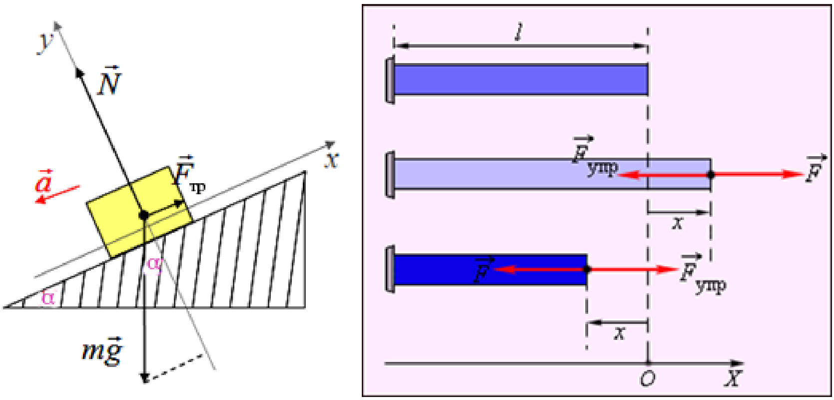

Рисунок 2.1 – Примеры механических сил

Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения – отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней (нему) сил. Если рассмотреть действие различных сил на одно и то же тело, то оказывается, что *ускорение, приобретаемое телом, всегда пропорционально равнодействующей приложенных сил*:

$$\vec{F} = m\vec{a} \text{ или } \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}\,. \tag{2.3}$$

Учитывая, что масса материальной точки (тела) в классической механике есть величина постоянная, в выражении (2.3) ее можно внести под знак производной:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt}\,. \tag{2.4}$$

Векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется ***импульсом*** (***количеством движения***) этой материальной точки:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}\,. \tag{2.5}$$

В СИ импульс измеряется в килограмм-метрах в секунду (кг·м/с).

Подставляя (2.5) в (2.4), получаем

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} . \qquad (2.6)$$

Это выражение – ***более общая формулировка второго закона Ньютона***: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Выражение (2.6) называется также ***уравнением движения материальной точки***.

Если на тело действует несколько сил, то в формуле (2.6) под $\vec{F}$ подразумевается их равнодействующая.

Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется **третьим законом Ньютона** – всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия: силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \qquad (2.7)$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой; эти силы приложены к разным материальным точкам (телам), всегда действуют парами и являются силами одной природы.

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики отдельной материальной точки к динамике системы материальных точек.

Изучая движение небесных тел, Исаак Ньютон на основании законов Иоганна Кеплера и основных законов динамики установил **закон всемирного тяготения** – между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек (m_1 и m_2) и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними (r^2):

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} . \qquad (2.8)$$

Эта сила называется ***гравитационной*** или ***силой всемирного тяготения***. Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела. Коэффициент пропорциональности G называется ***гравитационной постоянной***.

2.2 Пример решения и оформления задачи

На разных склонах наклонной плоскости, образующих с горизонтом углы α и β, находятся грузы массами m_1 и m_2. Невесомая нерастяжимая нить, связывающая грузы, перекинута через легкий блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. Коэффициент трения между телом m_1 и плоскостью равен k_1, между телом m_2 и плоскостью – k_2, ускорение грузов – a. Трением в оси блока пренебречь. Определить неизвестную величину.

m_1, кг	m_2, кг	k_1	k_2	α, град	β, град	a, м/с^2
3,0	5,0	0,2	0,1	60	30	?

Решение

Построим чертеж и рассмотрим силы, действующие на каждое тело (рисунок 2.2).

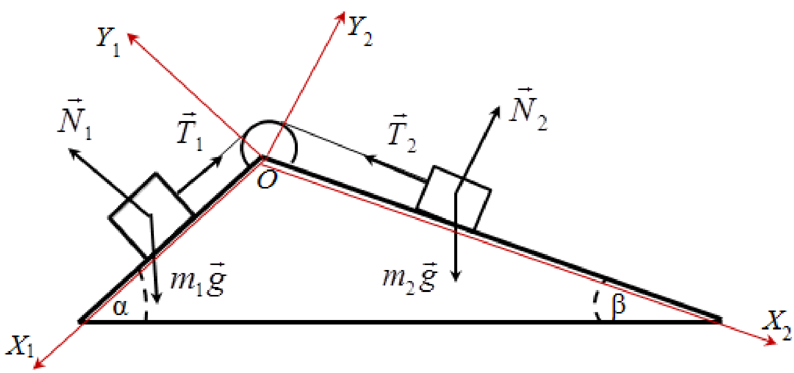

Рисунок 2.2 – Силы, действующие на тела при отсутствии сил трения

На каждое из тел действуют силы тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$, силы реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. Значения и направления всех вышеперечисленных сил не зависят от направления движения тел. На каждое тело действует также сила трения, но мы не можем заранее, исходя из условия задачи, узнать направление этих сил трения, поскольку не знаем возможное направление движения тел. Подобные задачи следует решать в два этапа. На первом этапе нужно рассмотреть движение тел по *гладким* наклонным плоскостям и определить направление движения тел при заданных в задаче числовых значениях параметров. При *наличии трения* тела будут либо двигаться в том же направлении, что и по гладким поверхностям, либо покоиться.

На первом этапе решаем задачу без учета трения. Выберем для каждого тела свою систему координат, как указано на рисунке 2.2. Запишем для каждого тела второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1; \\ m_2\vec{a}_2 &= m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Теперь запишем проекции уравнений (2.9) на координатные оси. Для тела m_1 получим:

$$\begin{aligned} OX_1:\ & m_1 a_{1x} = m_1 g \sin\alpha - T_1; \\ OY_1:\ & 0 = N_1 - m_1 g \cos\alpha. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Для тела m_2 получим:

$$\begin{aligned} OX_2:\ & m_2 a_{2x} = m_2 g \sin\beta - T_2; \\ OY_2:\ & 0 = N_2 - m_2 g \cos\beta. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) можно сразу найти силы реакции опоры:

$$\begin{aligned} N_1 &= m_1 g \cos\alpha; \\ N_2 &= m_2 g \cos\beta. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Если по условию нить невесома, блок невесом, трением в оси блока можно пренебречь, то силы натяжения во всех частях нити одинаковы:

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T\ . \tag{2.13}$$

Найдем связь между проекциями ускорений тел на координатные оси. Длину нити ℓ можно представить как сумму координат тел: $\ell = x_1 + x_2$. Поскольку нить нерастяжима и ее длина не меняется, то $x_1 + x_2 = \text{const}$. Продифференцируем полученное уравнение дважды и найдем связь между проекциями ускорений:

$$x_1'' + x_2'' = 0 \ \text{или}\ a_{x1} = -a_{x2}\,. \tag{2.14}$$

Тогда из уравнений (2.10) и (2.11) с учетом условий (2.13) и (2.14) получим систему уравнений для нахождения ускорений тел:

$$\begin{aligned} &OX_1:\ m_1 a_{1x} = m_1 g \sin\alpha - T;\\ &OX_2:\ -m_2 a_{1x} = m_2 g \sin\beta - T. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Из системы (2.15) можно найти помимо ускорений и силу натяжения нити T, но поскольку это не требуется в данной задаче, то, вычитая из верхнего уравнения системы (2.15) нижнее, сразу получим уравнение для определения ускорения. В итоге для ускорения получим следующее выражение:

$$a_{1x} = \frac{g\left(m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta\right)}{m_1 + m_2}\,. \tag{2.16}$$

На данном этапе решения задачи нас интересует не значение ускорения, а знак проекции ускорения на ось OX_1. Поэтому рассмотрим выражение в скобках в числителе (2.16). Подставим числовые значения:

$$m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta = 3{,}0 \sin 60^\circ - 5{,}0 \sin 30^\circ \approx 0{,}05\ \text{кг}\,.$$

Таким образом, проекция ускорения тела m_1 на ось OX_1 положительна, и тело m_1 движется вниз по *гладкой* наклонной плоскости. Соответственно тело m_2 поднимается вверх.

Теперь приступим ко второму этапу решения задачи и учтем действие сил трения на тела (рисунок 2.3).

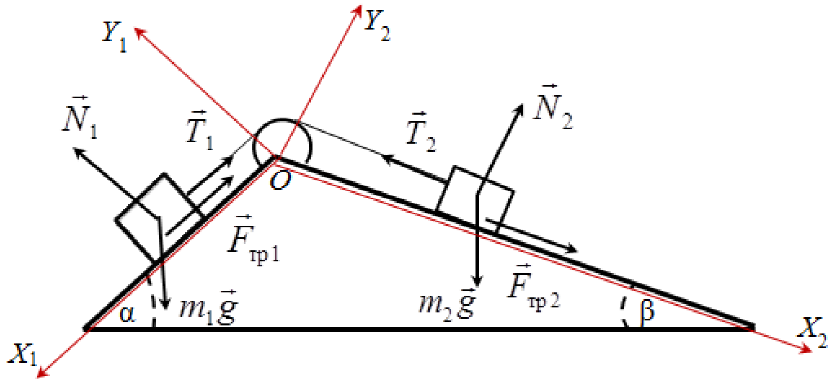

Рисунок 2.3 – Силы, действующие на тела при скольжении с учетом сил трения

В векторной форме второй закон Ньютона для каждого тела теперь имеет вид:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр1};$$
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{тр2}. \quad (2.17)$$

Проекции этих уравнений на координатные оси OY_1 и OY_2 будут такими же, как и при движении по гладким поверхностям, и силы реакции опоры определяются выражениями (2.12). Предположим, что тела скользят по шероховатым поверхностям, тогда силы трения скольжения, действующие на тела, определяются по формулам:

$$F_{тр1} = k_1 N_1; \quad F_{тр2} = k_2 N_2.$$

С учетом условий (2.12), (2.13), (2.14) и (2.17) получим систему уравнений для определения ускорения:

$$\begin{aligned} OX_1 &: \ m_1 a_{1x} = m_1 g \sin\alpha - T - k_1 m_1 g \cos\alpha; \\ OX_2 &: \ -m_2 a_{1x} = m_2 g \sin\beta - T + k_2 m_2 g \cos\beta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Решив систему (2.18), для проекции ускорения получим следующее выражение:

$$\boxed{a_{1x} = \frac{g\left(m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta - m_1 k_1 \cos\alpha - m_2 k_2 \cos\beta\right)}{m_1 + m_2}}. \qquad (2.19)$$

Все данные в задаче выражены в единицах системы СИ. Проверим размерность и проведем вычисления:

$m_1 = 3{,}0$ кг $m_2 = 5{,}0$ кг $k_1 = 0{,}2$ $k_2 = 0{,}1$ $\alpha = 60°$ $\beta = 30°$	$$[a_{1x}] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\text{кг}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$ $$a_{1x} = \frac{9{,}8\left(3{,}0\sin 60° - 5{,}0\sin 30° - 3{,}0\cdot 0{,}2\cos 60° - 5{,}0\cdot 0{,}1\cos 30°\right)}{3{,}0 + 5{,}0} = -0{,}84.$$
$a = ?$	Поскольку проекция ускорения получилась отрицательной, что невозможно, так как сила трения не может изменить направление движения тел, то тела на шероховатой поверхности покоятся и ускорение равно нулю. При выводе выражения (2.19) мы предположили, что тела скользят, поэтому применили для силы трения формулы (2.17). В действительности при отсутствии скольжения на тела действует сила трения покоя, которая всегда меньше силы трения скольжения. Ответ: $a = 0$ м/с^2.

2.3 Домашние задания

Задача 2–01

К железному бруску массой m_1, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложена сила F, вектор которой составляет угол φ с горизонтом. Под действием приложенной силы брусок движется горизонтально с ускорением a_1 при коэффициенте трения бруска о поверхность k. Когда на брусок положили магнит массой m_2, ускорение движения стало равным a_2. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	F, Н	φ, град	a_1, м/с^2	k	m_2, кг	a_2, м/с^2
1	8	100	30	10,5	?	–	–
2	10	115	45	–	0,2	?	0
3	6	–	–	9,0	?	3	5,5
4	9	?	0	12,0	–	2	10
5	–	90	45	6,5	0,3	?	0

Задача 2–02

Две гири массой m каждая соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через невесомый блок, и висят на одной высоте. Если на одну из гирь положить перегрузок массой m_0, то вся система придет в движение и через время t расстояние между гирями станет равным S. Ускорение движения равно a, сила натяжения нити равна T. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, г	m_0, г	t, с	S, м	a, м/с^2	T, Н
1	200	?	2,0	1,5	–	–
2	300	100	?	1,0	–	–
3	–	50	2,0	2,0	–	?
4	?	100	3,0	2,5	–	5,8
5	300	60	–	–	?	–

Задача 2–03

На горизонтальном столе лежат два тела, массы которых равны $m_1 = m_2 = m$. Тела связаны невесомой нерастяжимой нитью. Такая же нить связывает тело m_2 с грузом массой m_3, который висит на нити, не касаясь стола (эта нить переброшена через невесомый блок, укрепленный на краю стола, и тело массой m_3 не касается стола). Коэффициент трения первого тела со столом равен k_1, второго тела – k_2. Ускорение движения равно a, сила натяжения нити, на которой висит груз массой m_3, равна T, сила натяжения нити, соединяющей тела, равна T_{12}. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, кг	m_3, кг	k_1	k_2	a, м/с^2	T, Н	T_{12}, Н
1	1,0	0,5	0,10	0,15	?	–	–
2	1,5	1,0	0,15	0,20	–	?	–
3	2,0	1,5	0,10	0,15	–	–	?
4	1,2	0,6	?	0,10	–	5,1	–
5	?	1,0	0,10	0,15	–	8,4	–

Задача 2–04

На верхнем конце наклонной плоскости укреплен легкий блок, через который перекинута невесомая нерастяжимая нить с грузами массами m_1 и m_2 на концах. Груз массой m_1 скользит по наклонной плоскости, груз массой m_2 висит на другом конце нити, не касаясь плоскости. Угол наклонной плоскости с горизонтом равен α, коэффициент трения между грузом массой m_1 и плоскостью равен k, ускорение грузов равно a. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	α, град	k	a, м/с^2
1	3,8	2,5	30	0,1	?
2	2,7	1,7	45	?	0,32
3	5,5	5,5	?	0,2	0,50
4	1,8	?	25	0,3	2,80
5	?	1,0	10	0,2	2,45

Задача 2–05

На разных склонах наклонной плоскости, образующих с горизонтом углы α_1 и α_2, находятся грузы массами m_1 и m_2. Невесомая нерастяжимая нить, связывающая грузы, перекинута через легкий блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. Груз массой m_1 движется без трения, коэффициент трения между грузом массой m_2 и плоскостью равен k, ускорение грузов равно a (принять величину $a > 0$, если система движется в сторону груза m_2). Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	k	α_1, град	α_2, град	a, м/с^2
1	2,0	4,6	0,1	60	30	?
2	?	8,0	0,2	25	25	+1,3
3	4,3	?	0,3	60	30	–3,5
4	1,5	1,6	?	20	35	+0,2
5	3,2	2,0	0,1	?	45	–0,5

Задача 2–06

Шарик массой m, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной ℓ, имея постоянную скорость υ, описывает при своем движении в горизонтальной плоскости окружность, совершая в единицу времени n оборотов. При этом нить образует с вертикалью угол φ, а сила ее натяжения равна T. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, г	ℓ, м	φ, град	υ, м/с	n, об/мин	T, Н
1	200	1,0	–	–	60	?
2	300	1,2	–	?	–	5,0
3	400	?	–	–	42	8,5
4	?	1,4	–	4,0	–	6,4
5	–	0,8	60	–	?	–

3 Законы сохранения в динамике поступательного движения

3.1 Теория

Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется ***механической системой***.

Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются ***внутренними***.

Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются ***внешними***.

Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется ***замкнутой*** (или ***изолированной***).

Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т.е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

В случае замкнутой системы тел справедлив **закон сохранения импульса**: полный (суммарный) импульс замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени, при любых процессах, происходящих в этой системе:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const} . \qquad (3.1)$$

Для замкнутой системы двух тел закон сохранения импульса в общем виде запишется так:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2 , \qquad (3.2)$$

где $\left(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2\right)$ и $\left(m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2\right)$ – импульс системы тел в разные моменты времени.

Энергия – это универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С различными формами движения связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других – переходит в иную форму (в результате трения механическое движение превращается в тепловое). Важно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно охарактеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие ***«работа силы»***.

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \ . \tag{3.3}$$

Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left|\vec{F}\right| \left|d\vec{r}\right| \cos\alpha = \int_1^2 \left|\vec{F}\right| ds \cos\alpha \ , \tag{3.4}$$

где α – угол между вектором силы и вектором перемещения; $ds = \left|d\vec{r}\right|$ – элементарный путь.

Если, например, тело движется прямолинейно, сила $\vec{F} = \mathrm{const}$ и $\alpha = \mathrm{const}$, то получим

$$A = \int_1^2 F ds \cos\alpha = F \cos\alpha \int_1^2 ds = Fs \cos\alpha \ , \tag{3.5}$$

где s – путь, пройденный телом.

Если постоянная сила действует в направлении перемещения, то работа такой силы

$$A_1 = \left|\vec{F}\right| s \ , \tag{3.6}$$

где s – путь, пройденный телом под действием силы.

Если постоянная сила действует в направлении, противоположном перемещению (например, сила трения $F_{\text{тр}} = kN$ на рисунке 3.1), то работа такой силы вследствие того, что вектор силы противоположен вектору перемещения, вычисляется как

$$A_2 = -\left|\vec{F}_{\text{тр}}\right| s\,. \qquad (3.7)$$

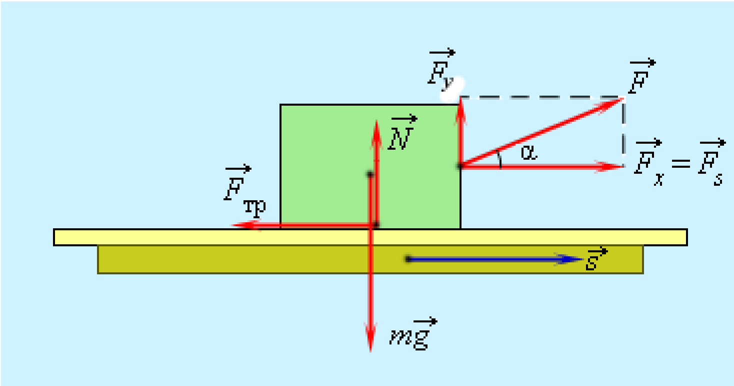

Рисунок 3.1 – Работа постоянной силы

Если на тело действует сила, значение которой зависит от перемещения (например, сила упругости), то работа такой силы

$$A_3 = \int \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^x Fxdx = \frac{kx^2}{2}\,. \qquad (3.8)$$

Единица работы – это джоуль (Дж); 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н при перемещении тела на 1 м в направлении действия силы.

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят мощность. ***Мощность*** – это физическая величина, численно равная работе, совершенной за одну секунду:

$$N = \frac{dA}{dt}\,. \qquad (3.9)$$

За время dt сила $\vec{F}$ совершает работу $\vec{F}d\vec{r}$, и мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}\,, \qquad (3.10)$$

т.е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.

Единица мощности в СИ – ватт (Вт); 1 Вт – это мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж.

Кинетическая энергия $E_к$ – это энергия механического движения тела или системы тел.

Сила $\vec{F}$, которая действует на покоящееся тело и вызывает его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы. Таким образом, работа силы на пути, который тело прошло за время нарастания скорости от 0 до υ, расходуется на увеличение энергии тела, т.е.

$$dA = dE_к \,. \tag{3.11}$$

Используя формулу определения работы (3.3), получаем

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} d\vec{r} = md\vec{\upsilon}\frac{d\vec{r}}{dt} = md\vec{\upsilon}\vec{\upsilon} \,. \tag{3.12}$$

Для силы, действующей в направлении перемещения:

$$dA = m\upsilon d\upsilon = dE_к \,. \tag{3.13}$$

Откуда получаем формулу вычисления кинетической энергии:

$$E_к = \int_0^{\upsilon} m\upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{2} \,. \tag{3.14}$$

Тело массой m, движущееся со скоростью υ, обладает кинетической энергией

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{3.15}$$

Кинетическая энергия механической системы тел равна сумме кинетических энергий тел, входящих в систему:

$$E_к = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} \,, \tag{3.16}$$

где υ_i – скорость i-й материальной точки массой m_i .

Если тело в каждой точке пространства находится под воздействием некоторой силы, то говорят, что тело находится в поле сил. Можно говорить о поле гравитационных сил, упругих сил, электростатических сил и т.д. Если работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений, то такие силы называются ***консервативными*** или ***потенциальными***. Области пространства, в которых действуют консервативные силы, называются ***потенциальными полями***.

Работа консервативной силы по замкнутому пути равна нулю:

$$A = \oint_L \vec{F} d\vec{l} \ . \tag{3.17}$$

Если работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется ***неконсервативной***.

Тела, находясь в потенциальном поле сил, обладают ***потенциальной энергией***.

Потенциальная энергия $E_п$ – это механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между собой.

В случае консервативных сил работа A зависит только от начального (1) и конечного (2) положения тела при перемещении, т.е. работа определяется разностью значений потенциальной энергии в точке 1 и в точке 2, или убылью потенциальной энергии:

$$A_{12} = -\left(E_{п2} - E_{п1}\right) . \tag{3.18}$$

Конкретная формула вычисления потенциальной энергии зависит от характера силового поля. Например:

- потенциальная энергия тела массой m, поднятого на высоту h над поверхностью Земли:

$$E_п = mgh \ ; \tag{3.19}$$

- потенциальная энергия упругодеформированного тела:

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}; \tag{3.20}$$

- потенциальная энергия гравитационного взаимодействия:

$$E_{\text{п}} = G\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{3.21}$$

Полная механическая энергия системы – это энергия механического движения и взаимодействия, т.е. она равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}. \tag{3.22}$$

Механические системы, между телами которых действуют только консервативные силы, называются ***консервативными системами***.

Если механическая энергия системы уменьшается и переходит в другие немеханические виды энергии, то такие системы называются ***диссипативными***, а действующие в них силы – ***диссипативными силами***. Примерами диссипативных сил являются силы трения или сопротивления среды.

Изменение полной механической энергии системы равно работе диссипативных сил:

$$\Delta E = A_{\text{дис}}. \tag{3.23}$$

Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так: в замкнутых консервативных системах полная механическая энергия сохраняется:

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \text{const} \tag{3.24}$$

или так: в замкнутой системе тел суммарная энергия остается величиной, постоянной при любом взаимодействии тел между собой; энергия может переходить их одного вида в другой.

Удар (или ***соударение***) – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Помимо ударов в прямом смысле этого слова (столкновения атомов или бильярдных шаров) к ним можно отнести и такие, например, как удар человека о землю при прыжке с трамвая и т.д.

Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (ударные или мгновенные силы) столь велики, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь. Это позволяет систему тел в процессе их соударения приближенно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Абсолютно упругий удар – столкновение тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию (подчеркнем, что это идеализированный случай, когда в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и они не нагреваются).

Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.

Для абсолютно неупругого удара выполняется закон сохранения импульса и не выполняется закон сохранения механической энергии, так как часть ее переходит во внутреннюю энергию тел.

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

3.2 Пример решения и оформления задачи

Два свинцовых шара массами m_1 и m_2 подвешены на нитях длиной ℓ. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем шар массой m_1 отклонили от положения равновесия на угол α и отпустили. Вследствие центрального абсолютно упругого удара шар массой m_2 поднялся на высоту h от положения равновесия. Определить неизвестную величину.

m_1, кг	m_2, кг	h, см	α, град	ℓ , см
0,6	0,2	?	30	70,0

Решение

Будем считать, что силы сопротивления отсутствуют, т.е. система является замкнутой. Для замкнутой системы тел выполняются законы сохранения механической энергии и импульса.

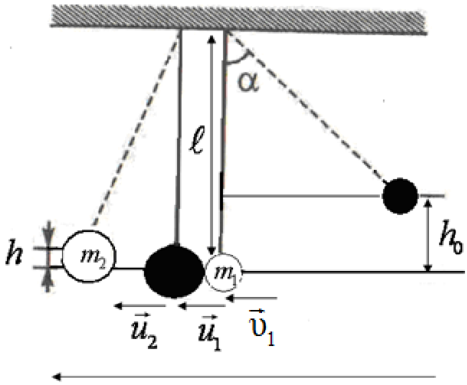

Рисунок 3.2 – Скорости шаров:
$\vec{\upsilon}_1$ – скорость шара массой m_1 до удара; $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – скорости соответственно шара массой m_1 и шара массой m_2 после удара

Если за нулевой уровень потенциальной энергии принять уровень центра масс шариков в положении равновесия, то потенциальная энергия тела массой m, поднятого на высоту h относительно этого уровня, определяется формулой

$$E_п = mgh . \quad (3.25)$$

Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью υ, определяется формулой

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} . \quad (3.26)$$

Для замкнутой системы тел при любом изменении состояния системы полная механическая энергия системы остается величиной постоянной:

$$E_п + E_к = \text{const} . \quad (3.27)$$

Суммарный импульс замкнутой системы тел при любом их взаимодействии между собой остается величиной постоянной:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const}\,. \tag{3.28}$$

Рассмотрим шар массой m_1. Применяя для него закон сохранения механической энергии

$$m_1 g h_0 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} \tag{3.29}$$

и выражая h_0 через длину нити l и угол α

$$h_0 = \ell\left(1 - \cos\alpha\right), \tag{3.30}$$

получаем формулу вычисления скорости шара массой m_1 до удара:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g\ell\left(1 - \cos\alpha\right)}\,. \tag{3.31}$$

Рассмотрим центральный абсолютно упругий удар шара массой m_1 с шаром массой m_2. Запишем для двух шаров закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2\,. \tag{3.32}$$

Учитывая, что шар массой m_2 до удара покоился ($\upsilon_2 = 0$), и предполагая, что после удара шары движутся в одном направлении, получаем закон сохранения импульса в скалярном виде:

$$m_1 \upsilon_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2\,. \tag{3.33}$$

Так как удар абсолютно упругий, то выполняется закон сохранения суммарной кинетической энергии:

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}\,. \tag{3.34}$$

Решая совместно уравнения (3.33) и (3.34), получаем выражение скорости u_2 через скорость υ_1:

$$u_2 = \frac{2 m_1 \upsilon_1}{\left(m_2 + m_1\right)}\,. \tag{3.35}$$

Рассмотрим шар массой m_2. Применяя для него закон сохранения механической энергии

$$\frac{m_2 u_2^2}{2} = m_2 g h\,, \tag{3.36}$$

получаем выражение для высоты подъема h от положения равновесия шара массой m_2:

$$h = \frac{u_2^2}{2g}\,. \tag{3.37}$$

С учетом равенств (3.35) и (3.31) получаем формулу вычисления высоты h, на которую шар массой m_2 поднялся от положения равновесия после центрального абсолютно упругого удара с шаром массой m_1:

$$\boxed{h = \frac{4m_1^2 \ell (1-\cos\alpha)}{(m_2+m_1)^2}}\,. \tag{3.38}$$

Выразим данные задачи в единицах системы СИ, проверим размерность и проведем вычисления.

$m_1 = 0{,}6$ кг
$m_2 = 0{,}2$ кг
$\alpha = 30°$
$\ell = 0{,}7$ м

$h = ?$

$$[h] = \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{м}}{\text{кг}^2} = \text{м};$$

$$h = \frac{4\cdot(0{,}6)^2\cdot 0{,}7\cdot(1-\cos 30°)}{(0{,}6+0{,}2)^2} = 0{,}211\,.$$

Ответ: $h = 21$ см.

3.3 Домашние задания

Задача 3–01

Два шара массами m_1 и m_2 подвешены на нитях длиной ℓ. Первоначально шары висят вертикально, соприкасаясь между собой. Затем шар массы m_1 отклонили на угол α и отпустили. Вследствие абсолютно упругого удара второй шар приобретает скорость U_2, первый шар поднимается на высоту h_1, а второй шар поднимается на высоту h_2. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, г	m_2, г	ℓ, м	α, град	U_2, м/с	h_1, см	h_2, см
1	400	300	1,4	80	–	?	–
2	300	200	1,0	60	?	–	–
3	500	300	1,2	?	–	5,0	–
4	300	200	?	45	–	–	30
5	–	–	1,0	30	–	10	?

Задача 3–02

Тележка массой m_1 с находящимся на ней человеком массой m_2 движется по горизонтальной поверхности со скоростью υ. С тележки соскакивает человек со скоростью υ_2 (относительно земли) под углом α к горизонту в направлении, противоположном направлению движения тележки. Проехав расстояние S через время t после соскакивания человека, тележка остановилась. Коэффициент трения тележки о поверхность равен k. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	υ, м/с	υ_2, м/с	t, с	k	α, град	S, м
1	90	60	10,0	?	20,0	0,1	20	–
2	100	70	12,5	2,1	–	0,3	30	?
3	95	55	15,0	2,6	?	0,1	30	–
4	85	50	?	2,7	–	0,2	35	82,5
5	80	?	11,5	2,0	20,5	0,1	45	–

Задача 3–03

Брусок, первоначально покоившийся на наклонной плоскости на высоте h, скользит вниз по наклонной плоскости и движется далее по горизонтальному участку. Путь, пройденный телом по горизонтальному участку до полной остановки, равен S. Коэффициент трения на наклонном и горизонтальном пути одинаков и равен k. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α. Скорость бруска при переходе на горизонтальный участок пути равна υ. Определить неизвестную величину.

Шифр	h, м	S, м	α, град	k	υ, м/с
1	2,4	4,5	45	?	–
2	3,6	7,5	?	–	6,5
3	1,5	3,0	35	–	?
4	?	4,5	60	–	5,2
5	4,8	?	30	0,2	–

Задача 3–04

Брусок массой m_1 соскальзывает из состояния покоя с вершины наклонной плоскости длиной ℓ, образующей с горизонтом угол α, и попадает в неподвижную тележку с песком, которая при этом начинает двигаться без трения в горизонтальном направлении со скоростью υ. Масса тележки с песком равна m_2. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен k. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	υ, м/с	ℓ, м	k	α, град
1	6	?	2,0	11,0	0,4	53
2	5	15	?	8,5	0,2	45
3	?	11	4,2	12,8	0,1	35
4	4	12	2,3	12,3	?	40
5	7	28	1,6	?	0,5	30

Задача 3–05

Небольшое тело массой m брошено под углом к горизонту и поднялось на максимальную высоту h, где скорость его стала равной υ. На бросание тела была затрачена работа A_1, сила сопротивления воздуха совершила над телом на пути от точки бросания до наивысшей точки подъема работу A_2. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, кг	h, м	υ, м/с	A_1, Дж	A_2, Дж
1	6	2	7	320	?
2	?	4	10	420	–66
3	7	3	?	560	–92
4	4	?	12	500	–86
5	8	5	9	?	–98

Задача 3–06

Брусок массой m толкнули, и он скользит вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Начальная скорость бруска у основания плоскости равна υ, коэффициент трения между бруском и плоскостью равен k, работа силы трения равна A. Наибольшая высота, на которую поднялся брусок, равна h. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, кг	α, град	υ, м/с	k	A, Дж	h, м
1	5,5	25	–	0,3	?	2,5
2	–	35	4,5	0,2	–	?
3	8,4	–	?	–	–1,5	3,2
4	?	45	6,0	0,1	–1,2	–
5	–	20	9,0	?	–	2,2

4 Динамика вращательного движения

4.1 Теория

Из динамики вращательного движения рассмотрим вращение твердых тел относительно жестко закрепленной оси. Разбив тело на элементарные массы m_i, можно представить его как систему материальных точек, взаимное расположение которых остается неизменным.

При изучении вращения твердых тел пользуются понятием момента инерции. ***Момент инерции тела*** – мера инертных свойств тела в динамике вращательного движения; это аналог массы в динамике поступательного движения.

Моментом инерции тела относительно данной оси называется физическая величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 . \qquad (4.1)$$

Если тело абсолютно твердое, то его момент инерции можно считать суммой моментов инерции бесконечно малых его частей. Сумма бесконечно малых – это интеграл, тогда для абсолютно твердого тела, плотность материала которого ρ, момент инерции определяют по формуле

$$I = \int_V \rho r^2 dV . \qquad (4.2)$$

Рассмотрим для примера вычисление момента инерции однородного сплошного диска массой m высотой h и радиусом R относительно оси, проходящей через центр диска (рисунок 4.1). Отметим, что в однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести, а для однородного тела правильной геометрической формы центр масс совпадает с геометрическим центром этого тела. Следовательно, диск вращается вокруг оси, проходящей через центр масс. Поскольку диск однороден, плотность ρ его во всех точках одинакова, тогда, применяя формулу (4.2), получаем для вычисления момента инерции диска следующую формулу:

$$I = \int_V \rho r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 h \cdot 2\pi r dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}. \qquad (4.3)$$

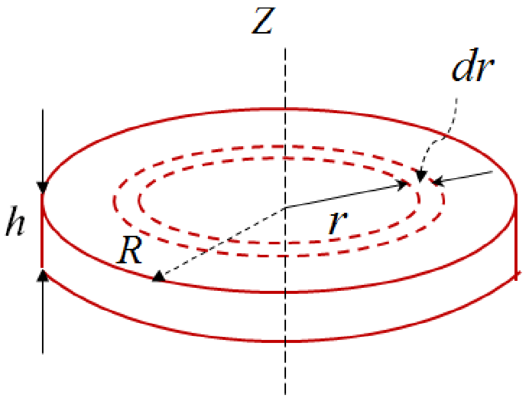

Рисунок 4.1 – Вычисление момента инерции однородного сплошного диска высотой h, радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр диска

Обозначим момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, как I_c. Тогда момент инерции однородного сплошного диска радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр масс, вычисляют по формуле

$$I_c = \frac{mR^2}{2}. \qquad (4.4)$$

Момент инерции материальной точки массой m, находящейся на расстоянии r от оси вращения, вычисляют по формуле

$$I = mr^2. \qquad (4.5)$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется ***теоремой Штейнера***: момент инерции тела I относительно произвольной оси равен моменту его инерции I_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела, на квадрат расстояния b между осями:

$$I = I_c + mb^2 \ . \tag{4.6}$$

Например, для обруча массой m и радиусом R получаем момент инерции относительно оси, проходящей через обод (рисунок 4.2), в виде

$$I = mr^2 + mr^2 = 2mr^2 \ . \tag{4.7}$$

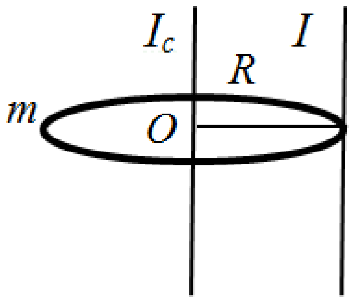

Рисунок 4.2 – Вычисление момента инерции обруча радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через обод

На рисунке 4.3 представлены моменты инерции некоторых симметричных тел.

В динамике вращательного движения большое значение имеет точка приложения силы.

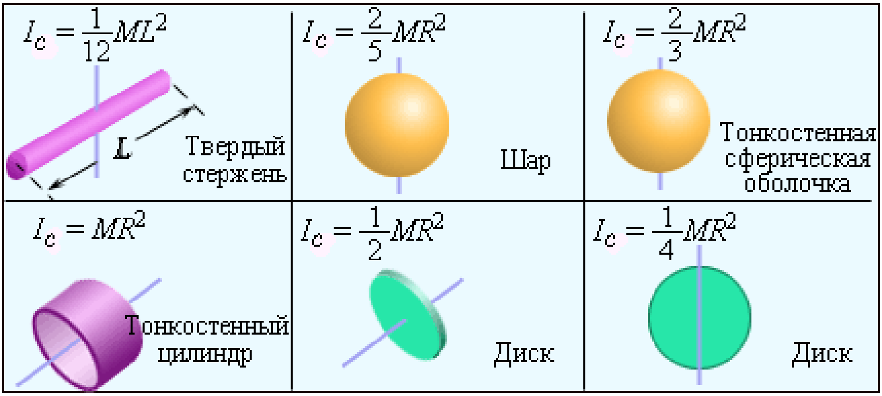

Рисунок 4.3 – Моменты инерции некоторых тел относительно осей симметрии

Моментом силы относительно точки O (рисунок 4.4) называется физическая величина $\vec{M}$, определяемая векторным произведением радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right], \qquad (4.8)$$

где вектор $\vec{M}$ – направлен перпендикулярно и вектору $\vec{r}$, и вектору $\vec{F}$.

В скалярном виде момент силы записывается следующим образом:

$$M = Fr\sin\alpha, \qquad (4.9)$$

где α – угол между вектором силы и радиус-вектором $\vec{r}$.

Плечо силы ℓ_F – это кратчайшее расстояние от линии действия силы до точки O (или оси вращения, проходящей через эту точку), вычисляется по формуле

$$r\sin\alpha = \ell_F. \qquad (4.10)$$

Величина момента силы равна произведению силы на плечо этой силы. Так, момент силы F

$$M_F = F\ell_F. \qquad (4.11)$$

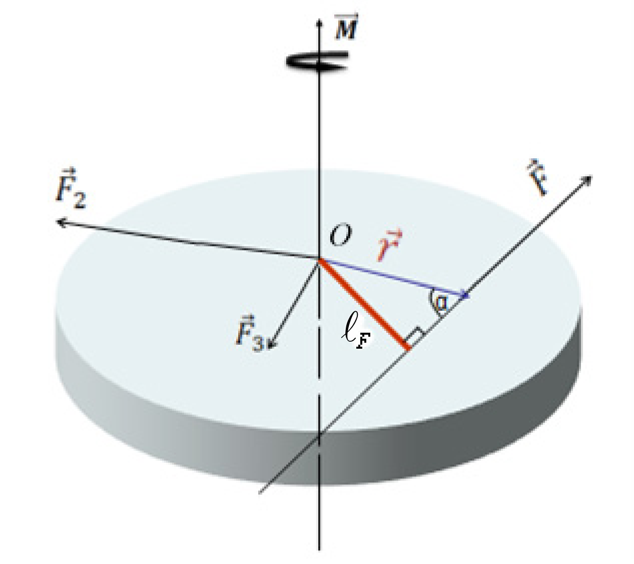

Рисунок 4.4 – Вращение твердого тела вокруг вертикальной оси: момент силы $\vec{F}$ относительно точки O (вектор $\vec{M}$) направлен вверх, моменты сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ равны нулю

Если сила или линия действия силы проходит через ось вращения, то плечо такой силы равно нулю. Например, плечи сил F_2 и F_3 (см. рисунок 4.4) равны нулю.

Работа силы при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота:

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}, \tag{4.12}$$

где M – момент силы относительно оси вращения.

Работа при вращении тела расходуется на увеличение кинетической энергии тела, так как смещения тела в этом случае нет:

$$dA = dE_{к}. \tag{4.13}$$

Поскольку аналогом массы в динамике вращательного движения является момент инерции, а быстроту вращения характеризует угловая скорость, то ***кинетическая энергия вращательного движения*** определяется формулой

$$E_{к} = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (4.14)$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}\,, \qquad (4.15)$$

где ε – угловое ускорение вращения тела.

Если на тело действуют несколько внешних сил, тогда

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon}\,. \qquad (4.16)$$

Равенства (4.15) и (4.16) – это запись **основного закона динамики вращательного движения**: результирующий момент всех сил, действующих на тело, равен произведению момента инерции тела на ускорение его вращения.

При сравнении поступательного и вращательного движения одного и того же тела просматривается аналогия между ними: вместо массы – момент инерции, вместо силы – момент силы, вместо импульса – момент импульса.

Моментом импульса материальной точки относительно точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O к материальной точке m, на вектор импульса материальной точки $\vec{P}$:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}\vec{P}\right] = \left[\vec{r}\left(m\vec{\upsilon}\right)\right]. \qquad (4.17)$$

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси каждая отдельная точка движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью υ_i. Скорость $\vec{\upsilon}_i$ и импульс $m\vec{\upsilon}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус r_i является плечом вектора $m\vec{\upsilon}_i$. Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы равен

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \cdot \left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)\right] \qquad (4.18)$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта (рисунок 4.5).

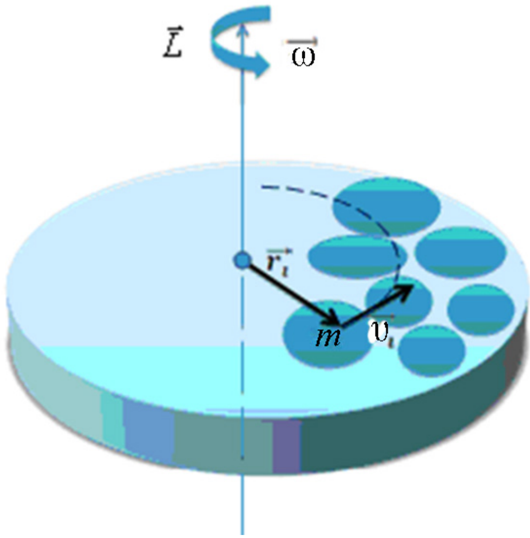

Рисунок 4.5 – Определение направления вектора момента импульса при вращении твердого тела вокруг вертикальной оси

Момент импульса системы тел равен сумме моментов импульса отдельных частей этой системы:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i \, . \tag{4.19}$$

Момент импульса твердого тела (относительно неподвижной оси) – физическая величина, численно равная произведению момента инерции тела на вектор угловой скорости этого тела:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \, . \tag{4.20}$$

Продифференцировав равенство (4.20) по времени

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \, , \tag{4.21}$$

получим еще одну форму ***уравнения динамики вращательного движения***: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \,. \qquad (4.22)$$

В замкнутой системе момент внешних сил равен нулю:

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \,. \qquad (4.23)$$

Откуда следует

$$\vec{L} = \mathrm{const} \,. \qquad (4.24)$$

Выражение (4.24) представляет собой **закон сохранения момента импульса**: момент импульса замкнутой системы тел остается величиной, неизменной при любом взаимодействии тел между собой.

4.2 Пример решения и оформления задачи

Брусок массой m_1, соединенный с грузом массой m_2 перекинутой через блок невесомой нерастяжимой нитью, скользит по горизонтальной поверхности стола. Блок в виде полого тонкостенного цилиндра массой m укреплен на краю стола. Силы натяжения нити по обе стороны блока равны T_1 и T_2. Коэффициент трения бруска о поверхность равен k, трением в подшипниках пренебречь. Ускорение движения равно a. Определить неизвестную величину.

m_1, кг	m_2, кг	m, кг	k	a, м/с^2	T_1, Н	T_2, Н
0,25	0,20	0,15	0,2	?	–	–

Решение

Система состоит из трех тел: бруска и груза, движущихся поступательно, и блока, который вращается. На рисунке 4.6 указаны направления движения тел, входящих в систему, и силы, действующие на каждое тело.

Брусок скользит по горизонтальной поверхности стола вследствие опускания груза, таким образом они совместно поступательно движутся. Так как брусок и груз соединены невесомой нерастяжимой нитью, то ускорения поступательного движения бруска и груза равны по величине.

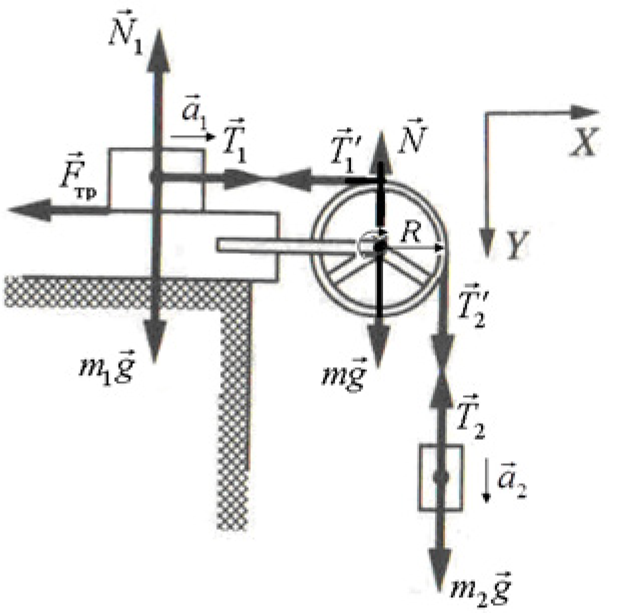

Рисунок 4.6 – Силы, действующие на тела задачи

Запишем для бруска и груза основной закон динамики поступательного движения (второй закон Ньютона):

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}\,; \tag{4.25}$$

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр} = m_1\vec{a}\,; \tag{4.26}$$

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}\,. \tag{4.27}$$

Запишем уравнения (4.26) и (4.27) в проекциях на оси, выбранные по направлениям поступательного движения:

$$T_1 - F_{тр} = m_1 a\,; \tag{4.28}$$

$$m_1 g - N_1 = 0\ ; \qquad (4.29)$$

$$T_1 - F_{\text{тр}} = m_1 a\ . \qquad (4.30)$$

Сила трения скольжения и сила нормального давления связаны равенством

$$F_{\text{тр}} = kN_1\ . \qquad (4.31)$$

С учетом этого из уравнений (4.28) – (4.30), получаем:

$$T_1 - km_1 g = m_1 a\ ; \qquad (4.32)$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a\ . \qquad (4.33)$$

Основной закон вращательного движения

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon} \qquad (4.34)$$

для блока имеет вид

$$\vec{M}_{mg} + \vec{M}_N + \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2} = I\vec{\varepsilon}\ . \qquad (4.35)$$

Момент силы вычисляют по формуле

$$M_F = F\ell_F\ , \qquad (4.36)$$

где ℓ_F – плечо силы F.

С учетом того, что $\ell_{mg} = 0$ и $\ell_N = 0$, а $\ell_{T_1} = \ell_{T_2} = R$, где R – радиус блока, получаем

$$(T_2 - T_1)R = I\varepsilon\ . \qquad (4.37)$$

Момент инерции блока в виде полого тонкостенного цилиндра массой m относительно оси, проходящей через центр масс блока, определяется формулой

$$I = mR^2\ . \qquad (4.38)$$

Угловое ускорение блока относительно оси вращения связано с линейным ускорением бруска и груза равенством

$$\varepsilon = \frac{a}{R}\ . \qquad (4.39)$$

Подставляя значения I и ε из (4.38) и (4.39) в (4.37), получаем

$$(T_2 - T_1) = ma . \qquad (4.40)$$

Решая совместно уравнения (4.32), (4.33) и (4.40), получаем формулу вычисления ускорения движения:

$$\boxed{a = \frac{g(m_2 - km_1)}{m_1 + m_2 + m}}. \qquad (4.41)$$

Данные задачи выражены в единицах системы СИ. Проверим размерность и проведем вычисления.

Дано	
$m_1 = 0{,}25$ кг $m_2 = 0{,}20$ кг $m = 0{,}15$ кг $k = 0{,}2$	$$[a] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{кг}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$ $$a = \frac{9{,}8\cdot(0{,}2 - 0{,}2\cdot 0{,}25)}{0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}15} = 2{,}45 .$$
$a = ?$	Ответ: $a = 2{,}45$ м/с^2.

4.3 Домашние задания

Задача 4–01

Брусок массой m_1 и груз массой m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, укрепленный на краю горизонтальной поверхности. Брусок скользит по горизонтальной поверхности под действием груза, подвешенного к концу нити. Силы натяжения нити по обе стороны от блока равны T_1 и T_2. Коэффициент трения бруска о поверхность равен k. Ускорение движения равно a. Блок считать однородным диском радиусом R и массой m_3. Трением в блоке пренебречь. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	k	a, м/с^2	T_1, Н	T_2, Н
1	1,4	2,5	1,2	0,1	?	–	–
2	2,5	3,0	1,6	?	2,4	–	–
3	1.6	2,0	0,9	0,2	–	?	–
4	?	1,8	0,8	0,2	–	–	8,4
5	2,0	3,4	1,0	0,3	–	–	?

Задача 4–02

Однородный диск радиусом R и массой m вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. В результате действия момента сил трения M, действующих на диск относительно той же оси, через время t угловая скорость диска стала равной ω_2. Величина работы сил трения равна A. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, кг	R, см	M, Н·м	ω_1, рад/с	ω_2, рад/с	t, с	A, Дж
1	7,5	50	?	11,0	8,5	5,0	–
2	6,0	80	0,96	?	–	1,2	10,8
3	3,5	35	0,82	–	0	?	8,6
4	4,0	45	–	9,0	5.0	–	?
5	?	30	0,06	8,6	3,8	6,4	–

Задача 4–03

Маятник Максвелла представляет собой однородный диск радиусом R и массой m, в своем центре туго насаженный на ось радиусом r, которая подвешивается на двух намотанных на нее нитях. Когда маятник отпускают, он совершает возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости с высоты h при одновременном вращении диска вокруг оси. Время полного разматывания нитей равно t. Нити имеют одинаковую силу натяжения, равную T. Силы сопротивления и момент инерции оси не учитывать. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, кг	R, см	r, см	a, м/с^2	T, Н	h, м	t, с
1	–	6,0	0,5	?	–	–	–
2	0,3	8,0	0,6	–	?	–	–
3	–	7,0	0,6	–	–	?	3,0
4	?	–	–	–	1,4	1,2	4,0
5	0,4	8,0	?	0,2	2,0	–	–

Задача 4–04

Шарик, радиус которого равен R, без начальной скорости скатывается без проскальзывания с высоты h по одной наклонной плоскости (угол наклона плоскости с горизонтом равен α_1), поднимается на другую (угол наклона плоскости с горизонтом равен α_2) и останавливается. Скорость шарика в нижней точке его движения равна ω, время полного движения шарика до наивысшей точки его подъема равно t. Определить неизвестную величину.

Шифр	h, см	α_1, град	α_2, град	ω, рад/с	t, с	R, см
1	–	18	26	?	5,0	18,5
2	–	35	?	21,0	2,5	10,0
3	80	45	30	–	?	–
4	?	22	17	–	3,2	–
5	50	–	–	25,6	–	?

Задача 4–05

Горизонтально расположенный однородный стержень длиной ℓ и массой m_1 может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Пуля массой m_2, летящая перпендикулярно к оси и стержню со скоростью υ, попадает в конец неподвижного стержня и застревает в нем. После попадания пули стержень начинает вращаться со скоростью ω и через время t под действием момента сил трения $M_{тр}$ останавливается. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, г	ℓ, см	υ, м/с	ω, рад/с	$M_{тр}$, Н·м	t, с
1	?	20	120	30,2	2,4	–	–
2	3,3	60	95	–	3,0	?	3,0
3	–	30	?	60,4	–	0,6	2,4
4	1,5	25	–	50,0	2,5	0,3	?
5	4,0	35	90	45,6	?	–	–

Задача 4–06

Вертикально расположенный однородный стержень длиной ℓ и массой m_1 может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Пуля массой m_2, летящая горизонтально со скоростью υ, попадает в нижний конец неподвижного стержня и застревает в нем. После попадания пули стержень отклоняется от положения равновесия на угол φ (силы трения не учитывать). Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, г	ℓ , см	υ, м/с	ω, рад/с	φ, град
1	?	30	90	56,4	2,8	–
2	3,0	50	?	35,0	–	60
3	4,2	60	–	?	3,2	45
4	2,4	40	80	–	1,8	?
5	1,8	20	–	24,0	?	53

5 Механические колебания

5.1 Теория

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Физическая природа колебаний может быть разной, например колебания могут быть механические или электромагнитные. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями.

Колебания называются ***свободными*** (или ***собственными***), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Простейшим типом колебаний являются ***гармонические колебания*** – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Независимо от природы физической величины гармонические колебания описываются ***дифференциальным уравнением гармонических колебаний***, которое имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0 \text{ или } \ddot{x}+\omega_0^2x=0\,. \tag{5.1}$$

В уравнении (5.1) зависящая от времени функция $x = x(t)$ может быть и координатой шарика, колеблющегося на пружине, и углом отклонения физического или математического маятника от положения равновесия, и током в колебательном контуре, если речь идет об электромагнитных колебаниях. В механических системах уравнение вида (5.1) возникает тогда, когда, во-первых, в системе не действуют силы трения и другие диссипативные силы, а во-вторых, на тело, выведенное из положения равновесия, действует ***возвращающая сила***, прямо пропорциональная отклонению тела от положения равновесия. Уравнение (5.1) выведено ниже на примере пружинного, математического и физического маятников.

Решением уравнения (5.1) являются гармонические функции, и колебания величины X описываются уравнениями типа

$$X = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ или } X = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{5.2}$$

где A – амплитуда колебаний (наибольшее отклонение колеблющейся величины X от положения равновесия); ω_0 – круговая (циклическая) частота; $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебаний (определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени t); φ – начальная фаза колебаний (фаза в момент времени $t = 0$).

Отметим, что частоту ω_0 называют собственной частотой.

Период гармонического колебания T – это время, за которое фаза колебания получает приращение 2π, или время одного полного колебания:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{5.3}$$

Частота колебаний ν – это величина, которая равна числу полных колебаний N в единицу времени, т.е. величина, обратная периоду колебаний:

$$\nu = \frac{N}{t} \text{ или } \nu = \frac{1}{T}. \tag{5.4}$$

Единица измерения частоты в СИ – герц (Гц).

Сравнивая равенства (5.2) и (5.3), получаем

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{5.5}$$

Пусть материальная точка совершает гармонические колебания только вдоль оси X около положения равновесия, принятого за начало координат, и зависимость координаты от времени описывается равенством $X = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Запишем первую и вторую производные от колеблющейся величины:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi); \tag{5.6}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = -A\omega^2{}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{5.7}$$

Таким образом, скорость и ускорение колеблющейся величины X изменяются также гармонически, при этом в моменты времени, когда $X = 0$, скорость приобретает наибольшие (по модулю) значения, а проекция ускорения приобретает наибольшее положительное значение при достижении X максимального отрицательного значения (рисунок 5.1).

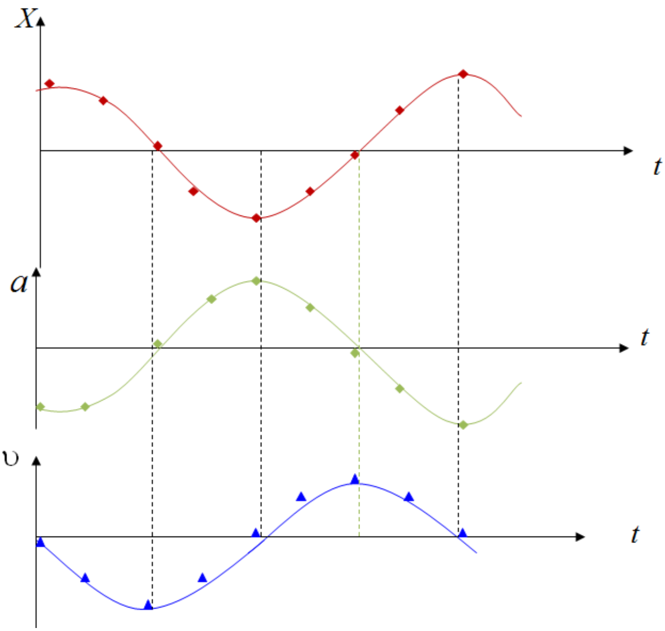

Рисунок 5.1 – Смещение, скорость и ускорение при гармонических колебаниях

Если на механическую систему, находящуюся в состоянии устойчивого равновесия, действует *внешняя* сила, то возникает градиент потенциальной энергии и, как следствие, – *внутренняя* сила $\vec{F}$, которая возвращает систему в положение устойчивого равновесия. Таким образом, в системе возникают колебания под действием так называемой *квазиупругой силы*, которая, согласно формулам (5.2) и (5.7), равна

$$F = -m\omega_0^2 x\,, \tag{5.8}$$

где m – масса системы; x – изменяющийся параметр системы.

Поскольку упругая сила консервативна, то полная механическая энергия при свободных гармонических колебаниях остается постоянной и выполняется **закон сохранения и превращения механической энергии колебаний,** который в этом случае имеет такую запись:

$$E_п^{max} = E_п + E_к = E_к^{max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\,. \tag{5.9}$$

Рассмотрим процесс механических колебаний на примере колебаний маятников.

Пружинный маятник – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы

$$F = -kx\,, \tag{5.10}$$

где k – жесткость пружины (рисунок 5.2, а).

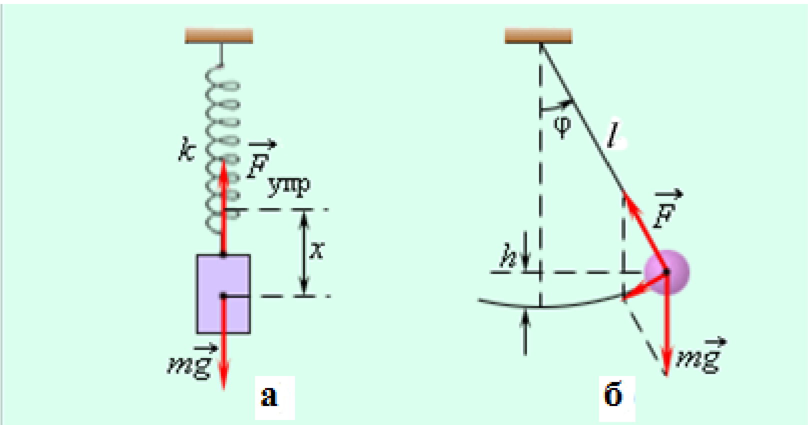

Рисунок 5.2 – Пружинный (а) и математический (б) маятники

Из второго закона Ньютона при отсутствии сил трения и с учетом (5.10) получим уравнение движения маятника:

$$m\ddot{x} = -kx \text{ или } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (5.11)$$

Сравнение уравнения (5.11) с уравнением гармонических колебаний (5.1) показывает, что пружинный маятник совершает гармонические колебания с частотой ω_0 и периодом T:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (5.12)$$

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити длиной l, и колеблющаяся под действием силы тяжести (рисунок 5.2, б).

При отклонении маятника из положения равновесия на угол φ (образованный с вертикалью) возникает вращательный момент силы тяжести $M = mgl\sin\varphi$, который заставляет систему вернуться в состояние равновесия. Тогда в отсутствие сил сопротивления уравнение движения маятника

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi \text{ или для малых углов } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \qquad (5.13)$$

Сравнение уравнения (5.13) с уравнением гармонических колебаний (5.1) показывает, что математический маятник совершает гармонические колебания с частотой ω_0 и периодом T:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (5.14)$$

Физический маятник – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку, не совпадающую с центром (C) масс тела (рисунок 5.3).

При отклонении маятника из положения равновесия на угол φ (образованный с вертикалью) возникает вращательный момент силы тяжести $M = mgd\sin\varphi$, который заставляет систему вернуться в состояние равновесия. Тогда в отсутствие сил сопротивления для малых углов φ

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{I}\varphi = 0\,, \tag{5.15}$$

где I – момент инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс тела (теорема Штейнера, формула (4.6)).

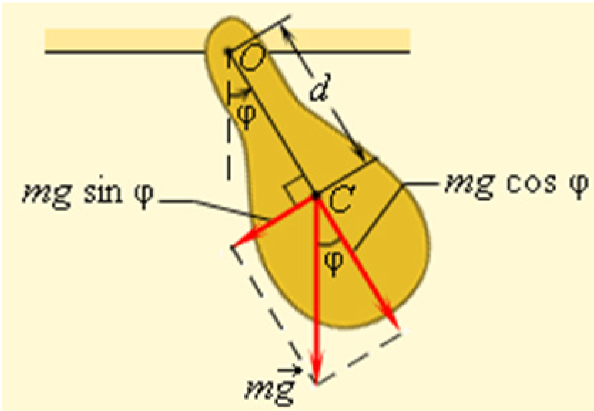

Рисунок 5.3 – Физический маятник

Сравнение уравнения (5.15) с уравнением гармонических колебаний (5.1) показывает, что физический маятник совершает гармонические колебания с частотой ω_0 и периодом T:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}\,;\; T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\,. \tag{5.16}$$

Если тело колеблется в вязкой жидкости или в газе, то на тело действует сила трения, зависящая от скорости и направленная противоположно скорости:

$$\vec{F} = -r\vec{\upsilon}\,, \tag{5.17}$$

где r – коэффициент сопротивления, который определяется свойствами среды, формой тела и свойствами его поверхности.

В этом случае уравнение (5.11) для пружинного маятника приобретает следующий вид:

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx\ . \qquad (5.18)$$

Это уравнение можно записать в общем виде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\ , \qquad (5.19)$$

где β – коэффициент затухания; ω_0 – собственная частота колебаний:

$$\beta = \frac{r}{2m}\ ;\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ . \qquad (5.20)$$

Уравнение (5.19) является дифференциальным уравнением затухающих колебаний, которое справедливо не только для механических систем. Точно такое же уравнение получается и для электромагнитных колебаний в контуре, где есть активное сопротивление.

Решением уравнения (5.19) является функция вида

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)\ , \qquad (5.21)$$

которая описывает колебания с уменьшающейся во времени амплитудой $A(t)$:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}\ . \qquad (5.22)$$

Циклическая частота ω, частота ν и период T затухающих колебаний отличаются от соответствующих параметров для колебаний без затухания:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\ ;\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\ ;\ \nu = \frac{1}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\pi}\ . \qquad (5.23)$$

В случае когда затухания слабые, т.е. при $\beta \ll \omega_0$, можно считать $\omega_0 \approx \omega$, и тогда частота и период затухающих колебаний определяются формулами (5.3) и (5.4).

Для характеристики колебательной системы с затуханием вводят ***логарифмический декремент затухания*** λ:

$$\lambda = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}}\right) = \beta T\ , \qquad (5.24)$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующие моментам времени, различающимся на период.

Если в течение некоторого времени система совершает N_e колебаний и при этом амплитуда колебаний уменьшается в e раз (e – основание натурального логарифма), то логарифмический декремент затухания можно выразить как

$$\lambda = \frac{1}{N_e}\,. \tag{5.25}$$

Из (5.25) следует, что логарифмический декремент затухания в системах со слабым затуханием мал, так как система совершает большое число колебаний прежде, чем их амплитуда существенно уменьшается.

5.2 Пример решения и оформления задачи

Однородный диск радиуса R может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей на расстоянии R/n от центра диска. Период малых колебаний этого диска – T, частота колебаний – ν, циклическая частота – ω, логарифмический декремент затухания $\lambda = 1{,}0$.

R, м	n	T, с	ν, с$^{-1}$	ω, рад/с	λ
0,13	1	?	–	–	1,0

Решение

По условию задачи логарифмический декремент затухания λ не мал, поэтому период колебаний T следует вычислять по формуле (5.23). Найдем сначала собственную частоту ω_0 колебаний диска, воспользовавшись формулой (5.16). Момент инерции I диска относительно оси вращения можно найти по теореме Штейнера (4.6), где I_c – момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр, m – масса диска; $b = R/n$ (см. рисунки 5.3, 5.4):

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(R/n\right)^2 = \frac{1}{2}mR^2\left(1 + \frac{2}{n^2}\right). \tag{5.26}$$

Тогда для ω_0, учитывая, что $d = b = R/n$, из (5.16) получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2gn}{R(n^2+2)}}\,. \qquad (5.27)$$

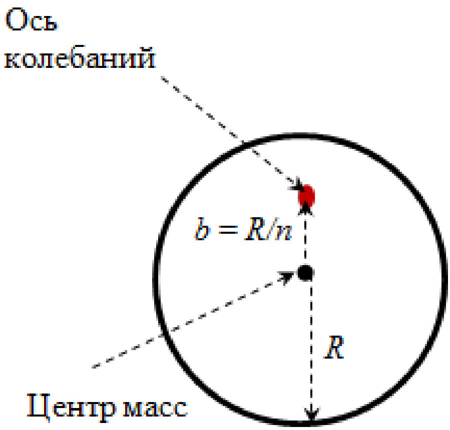

Рисунок 5.4 – Определение момента инерции диска

Из формул (5.23), (5.24) получим выражение для логарифмического декремента затухания:

$$\lambda = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\,. \qquad (5.28)$$

Выразим коэффициент затухания β:

$$\beta = \frac{\lambda\omega_0}{\sqrt{\lambda^2 + 4\pi^2}}\,. \qquad (5.29)$$

Из формул (5.28) и (5.29) выразим период:

$$T = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\pi^2}}{\omega_0}\,.$$

С учетом выражения для собственной частоты ω_0 (5.27) получим окончательное выражение для периода:

$$T = \sqrt{\frac{(\lambda^2 + 4\pi^2)R(n^2 + 2)}{2gn}} \,. \qquad (5.30)$$

Все данные в задаче выражены в единицах системы СИ. Проверим размерность и проведем вычисления по формуле (5.30):

Дано	Решение
$R = 0{,}13$ м $n = 1$ $\lambda = 1{,}0$	$[T] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{м/с}^2}} = \text{с}$; $T = \sqrt{\frac{(1^2 + 4 \cdot 3{,}14^2) \cdot 0{,}13 \cdot (1^2 + 2)}{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1}} = 0{,}90$.
$T = ?$	Ответ: $T = 0{,}90$ с.

5.3 Домашние задания

Задача 5–01

Колебания материальной точки происходят вдоль оси OX по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где все величины заданы в единицах системы СИ. В начальный момент времени смещение точки – x_0, проекция скорости – υ_0, проекция ускорения – a_0, период колебаний точки – T. Определить неизвестную величину.

Шифр	A, м	ω, с$^{-1}$	x_0, м	υ_0, м/с	a_0, м/с^2	T, с
1	?	3,0	1,5	–2,7	–	–
2	–	–	–2,3	–	10,8	?
3	–	2,0	?	3,6	–8,1	–
4	4,2	–	2,5	?	–6,7	–
5	–	–	8,5	–	?	3,0

Задача 5–02

Шарик массой m, прикрепленный к пружине жесткостью k, совершает незатухающие гармонические колебания вдоль гладкой горизонтальной поверхности. Амплитуда колебаний – A, максимальная скорость шарика – υ_{max}, максимальное ускорение – a_{max}, период колебаний шарика – T. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, г	k, Н/м	A, см	υ_{max}, см/с	a_{max}, см/с^2	T, с
1	40	1,0	?	7,5	–	–
2	50	20	–	?	110	–
3	–	–	2,3	–	220	?
4	35	?	–	5,2	44	–
5	?	10	1,8	8,4	–	–

Задача 5–03

Физический маятник представляет собой однородный тонкий стержень длиной L, который совершает колебания в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через стержень на расстоянии x от его верхнего конца. Максимальный угол отклонения стержня от вертикальной оси в процессе колебаний – φ_{max}, максимальная угловая скорость вращения – ω_{max}, максимальная скорость нижнего конца стержня – υ_{max}, период колебаний стержня – T. Трением в оси и сопротивлением воздуха пренебречь. Считать, что при малых углах отклонения $\mathrm{tg}\varphi_{max} \approx \sin\varphi_{max} \approx \varphi_{max}$. Определить неизвестную величину.

Шифр	L, м	x, м	φ_{max}, рад	ω_{max}, рад/с	υ_{max}, м/с	T, с
1	2,0	0,5	?	0,15	–	–
2	2,5	0,25	?	–	0,34	–
3	–	–	0,06	0,24	–	?
4	3,0	–	–	0,11	0,13	?
5	2,2	?	–	–	–	2,29

Задача 5–04

Физический маятник представляет собой однородный тонкий диск радиусом R, массой m, который совершает колебания в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей на расстоянии x от центра диска. Максимальная скорость центра диска в процессе колебаний – υ_{max}, максимальная кинетическая энергия – W_{max}, период колебаний маятника – T. Трением в оси и сопротивлением воздуха пренебречь. Определить неизвестную величину.

Шифр	R, см	m, кг	x, см	υ_{max}, м/с	W_{max}, мДж	T, с
1	9,0	2,0	6,0	?	6,0	–
2	10,0	–	?	–	–	0,8
3	8,0	?	3,0	0,025	1,5	–
4	12	–	5,0	–	–	?
5	10	1,5	4,0	?	3,0	–

Задача 5–05

Шарик массой m, прикрепленный к пружине жесткостью k, совершает затухающие колебания с периодом T в вязкой среде. Когда шарик совершил N полных колебаний, амплитуда колебаний уменьшилась в n раз, коэффициент затухания – β. Затухание считать слабым. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, кг	k, Н/м	N	n	β, с$^{-1}$
1	0,25	18	25	4	?
2	?	14	30	3	0,049
3	0,15	?	35	2	0,036
4	0,20	32	?	3	0,088
5	0,10	15	40	?	0,066

Задача 5–06

Гиря массой m, прикрепленная к пружине жесткостью k, совершает затухающие колебания в вязкой среде. Через время t после начала колебаний амплитуда колебаний уменьшилась в n раз. Логарифмический коэффициент затухания – λ. Затухание считать слабым. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, кг	k, Н/м	t, с	n	λ
1	0,20	?	65	4	0,012
2	?	12	31	3	0,025
3	0,10	15	?	2	0,0062
4	0,051	10	90	3	?
5	0,17	20	24	?	0,017

6 Уравнение состояния идеального газа

6.1 Теория

Молекулярная физика – раздел физики, в котором изучаются строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном беспорядочном движении.

Молекула – это наименьшая частица вещества, сохраняющая все его химические свойства. Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия огромного числа молекул. Законы поведения огромного числа молекул, являясь статистическими закономерностями, изучаются с помощью ***статистического метода – молекулярно-кинетической теории***.

Задачей молекулярно-кинетической теории является не описание движения отдельных частиц, а определение макроскопических параметров системы, таких как масса, объем, давление, температура и т.п. Эти параметры относятся ко всей системе в целом, и их можно измерить макроскопическими приборами.

В молекулярно-кинетической теории пользуются ***моделью идеального газа***, согласно которой считают, что:

- собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;
- между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- столкновения молекул газа между собой и стенками сосуда абсолютно упругие.

Таким образом, молекулы идеального газа можно рассматривать как маленькие упругие шарики. Наиболее близко свойствам идеального газа соответствуют достаточно разреженные газы.

Основными параметрами газа являются давление (p), объем (V) и температура (T).

Давление p газа на стенку сосуда является результатом столкновений с ней молекул газа. Каждая молекула при столкновении передает стенке определенный импульс, следовательно, воздействует на стенку с некоторой силой. Отношение этой силы к площади поверхности и дает величину давления, оказываемого газом на стенку. Получить значение этого давления можно достаточно простым методом, если считать удары молекул о стенку абсолютно упругими (т.е. величина скорости молекулы до и после соударения одинакова, угол падения равен углу отражения). В СИ давление измеряется в паскалях (1 Па = 1 Н/1 м^2).

Объем газа V – внутренний объем сосуда, в котором находится газ. В СИ объем измеряется в кубических метрах (1 литр = 1 · 10^{-3} м^3).

Температура – физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. Это одно из основных понятий, играющих важную роль не только в термодинамике, но и в физике в целом. По термодинамической температурной шкале ***температура T*** измеряется в кельвинах (К), по Международной практической шкале ***температура t*** – в градусах Цельсия (°С). Термодинамическая температура и температура по Международной практической шкале связаны соотношением

$$T,\text{К} = \left(t^\circ + 273\right). \qquad (6.1)$$

Отношение числа молекул N в макрообъекте к числу Авогадро N_A называют ***количеством вещества*** (***числом молей***):

$$\nu = \frac{N}{N_A}. \qquad (6.2)$$

В качестве единицы количества вещества используется моль, т.е. количество вещества, которое содержит столько же частиц (атомов, молекул), сколько атомов содержится в 12 граммах углерода. Масса одного моля вещества называется ***молярной массой*** $\boldsymbol{\mu}$. Молярная масса связана с массой одной молекулы m_0 соотношением

$$\mu = m_0 N_A \qquad (6.3)$$

и в СИ измеряется в килограммах на моль (кг/моль).

Если m – масса всего вещества, то количество вещества ν в молях вычисляется по формуле

$$\nu = \frac{m}{\mu}. \qquad (6.4)$$

Как уже указывалось, состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами – давлением p, объемом V и температурой T. Между этими параметрами существует определенная связь, описываемая ***уравнением состояния идеального газа***, которое называется также ***уравнением Менделеева – Клапейрона***:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \qquad (6.5)$$

где R = 8,31 Дж/(моль·К) – это универсальная газовая постоянная.

Как следствия из этого уравнения можно получить:

- **закон Дальтона** – давление смеси газов равно сумме парциальных давлений (***парциальное давление*** – это давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре):

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n; \qquad (6.6)$$

- зависимость плотности газа от давления и температуры:

$$\rho = \frac{m}{V}, \ \rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}, \ \rho = \frac{p\mu}{RT} \to \boxed{\rho = f(p;T)}. \qquad (6.7)$$

Часто используют несколько иную форму записи уравнения состояния идеального газа, вводя ***постоянную Больцмана k***:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \qquad (6.8)$$

Тогда равенство (6.5) записывают в виде

$$p = nkT, \qquad (6.9)$$

где n – концентрация молекул газа, т.е. число молекул в единице объема:

$$n = \frac{N}{V}. \tag{6.10}$$

Параметры состояния системы могут изменяться. Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее термодинамических параметров, называется ***термодинамическим процессом***.

Изопроцессы – термодинамические процессы, во время которых масса и еще одна из физических величин, параметров состояния, остаются неизменными. Рассмотрим законы, описывающие такие процессы.

Изотермическим процессом называют квазистатический процесс, протекающий при ***постоянной температуре T***. Из уравнения состояния идеального газа следует, что при постоянной температуре T и неизменной массе газа m в сосуде произведение давления p газа на его объем V должно оставаться постоянным:

$$pV = \text{const} \text{ при } T = \text{const}, \ m = \text{const}. \tag{6.11}$$

Уравнение изотермического процесса было получено экспериментально английским физиком Р. Бойлем и независимо от него французским физиком Э. Мариоттом, поэтому это уравнение называют **законом Бойля – Мариотта**.

График зависимости между параметрами состояния газа при постоянной температуре называется *изотермой*. Изотермы в координатах (p, V) представляют собой гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс (рисунок 6.1).

Изохорный процесс – это процесс квазистатического нагревания или охлаждения газа при постоянном объеме V и при условии, что масса газа m в сосуде остается неизменной. Как следует из уравнения состояния идеального газа, при этих условиях давление газа p изменяется прямо пропорционально его абсолютной температуре:

$$\frac{p}{T} = \text{const} \text{ при } V = \text{const}, \ m = \text{const}. \tag{6.12}$$

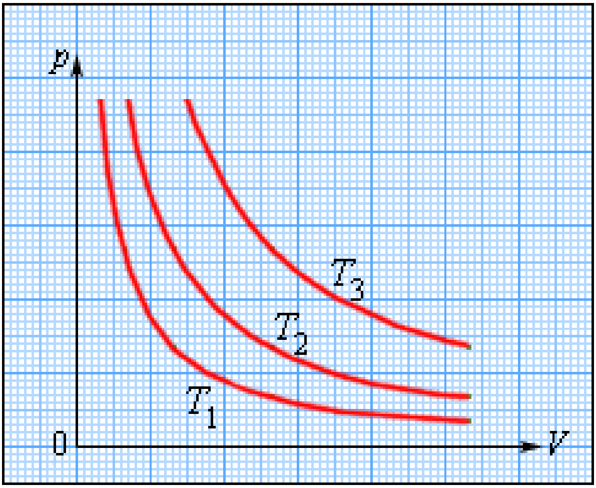

Рисунок 6.1 – Семейство изотерм на плоскости (p, V);
$T_3 > T_2 > T_1$

Экспериментально зависимость давления газа от температуры исследовал французский физик Ж. Шарль, поэтому уравнение изохорного процесса называется **законом Шарля.** Уравнение изохорного процесса может быть записано в виде

$$p = \frac{p_0}{T_0} T = p_0 \alpha T , \qquad (6.13)$$

где p_0 – давление газа при $T = T_0 = 273$ К (т.е. при температуре 0 °С); α – температурный коэффициент давления, $\alpha = 1/273$ К$^{-1}$.

На плоскости (p, T) изохорные процессы для заданной массы газа при различных значениях объема V изображаются семейством прямых линий, которые называются *изохорами*; большим значениям объема соответствуют изохоры с меньшим наклоном по отношению к оси температур (рисунок 6.2).

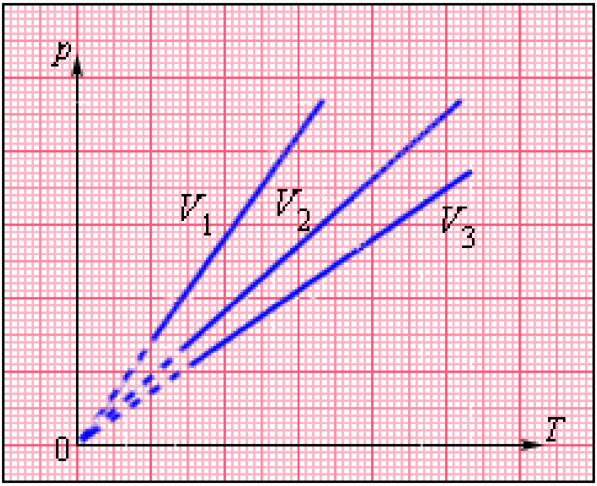

Рисунок 6.2 – Семейство изохор на плоскости (p, T);
$V_3 > V_2 > V_1$

Изобарным процессом называют квазистатический процесс, протекающий при неизменном давлении p и при условии, что масса газа m в сосуде остается неизменной. Уравнение изобарного процесса имеет вид

$$\frac{V}{T} = \text{const} \ \text{при} \ p = \text{const}, \ m = \text{const}. \tag{6.14}$$

Зависимость объема газа от температуры при неизменном давлении была экспериментально исследована французским физиком Ж. Гей-Люссаком, поэтому уравнение изобарного процесса называют **законом Гей-Люссака:**

$$V = V_0 \alpha T, \tag{6.15}$$

где V_0 – объем газа при температуре 0 °C; α – температурный коэффициент объемного расширения газов, $\alpha = 1/273$ К$^{-1}$.

На плоскости (V, T) изобарные процессы при разных значениях давления p изображаются семейством прямых линий (рисунок 6.3), которые называются *изобарами*.

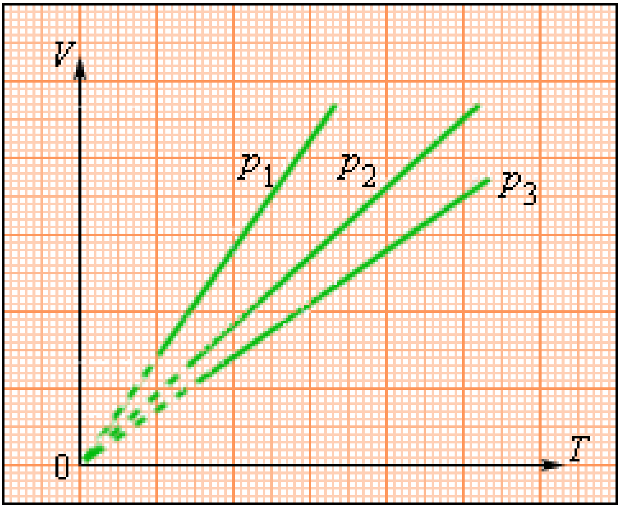

Рисунок 6.3 – Семейство изобар на плоскости (V, T); $p_3 > p_2 > p_1$

***Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов*:**

$$p = \frac{1}{3} n \cdot m_0 \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2, \qquad (6.16)$$

где m_0 – масса молекулы, $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle$ – средняя квадратичная скорость, которую вычисляют по формуле

$$\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \qquad (6.17)$$

Формулы (6.16) и (6.17) позволяют определить температуру как ***меру средней кинетической энергии поступательного движения молекул***.

6.2 Пример решения и оформления задачи

В сосуде содержится смесь двух газов при температуре T и давлении p. Концентрация молекул первого газа – n_1, молярная масса – μ_1, концентрация молекул второго газа – n_2, молярная масса – μ_2, молярная масса смеси – μ. Определить неизвестную величину.

T, К	p, Па	$n_1 \cdot 10^{-22}$, м$^{-3}$	μ_1, г/моль	$n_2 \cdot 10^{-22}$, м$^{-3}$	μ_2, г/моль	μ, г/моль
350	215	–	32	2,5	44	?

Решение

В соответствии с уравнением состояния идеального газа давление газа p вычисляют по формуле

$$p = nkT\ ,$$

где n – концентрация молекул; концентрация смеси газов равна сумме концентраций молекул газов, входящих в эту смесь:

$$n = n_1 + n_2\ .$$

Тогда для вычисления давления смеси газов получим формулу

$$p = (n_1 + n_2)kT\ ,$$

из которой выражаем неизвестную концентрацию молекул первого газа n_1:

$$n_1 = \frac{p}{kT} - n_2\ .$$

Из определения молярной массы следует, что молярная масса смеси μ есть отношение массы смеси m к количеству вещества смеси ν, измеряемому в молях:

$$\mu = \frac{m}{\nu}\ .$$

Общее число молекул первого или второго газа в объеме V равно произведению соответствующей концентрации на объем. Учтем, что каждый моль вещества содержит число молекул, равное числу Авогадро $N_{\text{А}}$. Тогда количество вещества $\nu_{1,2}$ первого или второго газа равно соответственно

$$\nu_{1,2} = \frac{n_{1,2}V}{N_A}\ .$$

Массу первого или второго газа $m_{1,2}$ можно вычислить по формуле

$$m_{1,2} = \nu_{1,2}\mu_{1,2}.$$

Тогда для молярной массы смеси с учетом полученных выше соотношений запишем следующее выражение:

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2}{n_1 + n_2}.$$

Подставим выражение для n_1 и получим формулу для вычисления молярной массы смеси газов:

$$\boxed{\mu = \frac{\mu_1\left(\dfrac{p}{kT} - n_2\right) + \mu_2 n_2}{\dfrac{p}{kT}}}.$$

Выразим данные задачи в единицах системы СИ, проверим размерность и проведем вычисления.

Дано:

$\mu_1 = 0{,}032$ кг/моль
$\mu_2 = 0{,}044$ кг/моль
$n_2 = 2{,}5 \cdot 10^{22}$ м$^{-3}$
$P = 215$ Па
$T = 350$ К
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

$\mu = ?$

$$[\mu] = \frac{\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot \left(\dfrac{\text{Па}}{(\text{Дж}/\text{К}) \cdot \text{К}} - \dfrac{1}{\text{м}^3}\right) + \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot \dfrac{1}{\text{м}^3}}{\dfrac{\text{Па}}{(\text{Дж}/\text{К}) \cdot \text{К}}} = \frac{\text{кг}}{\text{моль}};$$

$$\mu = \frac{0{,}032 \cdot \left(\dfrac{215}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 350} - 2{,}5 \cdot 10^{22}\right) + 0{,}044 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{22}}{\dfrac{215}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 350}} =$$
$$= 0{,}039.$$

Ответ: $\mu = 0{,}039$ кг/моль.

6.3 Домашние задания

Задача 6–01

В сосуде содержится смесь двух газов: газа массой m_1 с молярной массой μ_1 и газа массой m_2 с молярной массой μ_2. Температура смеси – t, давление – p, плотность смеси при этих условиях – ρ. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, г	μ_1, г/моль	m_2, г	μ_2, г/моль	t, °С	p, кПа	ρ, кг/м^3
1	63	28	12	2,0	+73	21	?
2	80	?	56	44	+18	13	0,14
3	20	4,0	64	32	–10	?	0,087
4	92	40	21	?	+25	33	0,20
5	73	32	47	28	?	17	0,24

Задача 6–02

Баллон, содержащий водород массой m_1, при нагревании взрывается при достижении температуры t_1. В таком же баллоне необходимо хранить азот массой m_2 при температуре t_2, имея n-кратный запас прочности (т.е. давление азота должно быть в n раз меньше давления, при котором происходит взрыв). Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	t_1, °С	t_2, °С	n
1	?	34	+25	–35	7
2	48	?	–15	+45	5
3	14	43	?	+14	4
4	27	58	+39	?	6
5	15	84	–23	+27	?

Задача 6–03

Горизонтальный цилиндрический сосуд, наполненный газом, разделен тонким легкоподвижным теплонепроницаемым поршнем на две части объемами V_1 и V_2. Поршень находится в положении равновесия, температура в обеих частях сосуда равна T_0, давление – p_0. Первую часть сосуда охлаждают до температуры T_1, а вторую нагревают до температуры T_2. После того как поршень занимает новое положение равновесия, в сосуде устанавливается давление p. Определить неизвестную величину.

Шифр	T_0, К	p_0, кПа	T_1, К	V_1, л	T_2, К	V_2, л	p, кПа
1	324	560	?	2,2	354	5,8	590
2	?	820	267	7,3	312	2,7	770
3	256	?	228	4,5	296	6,5	460
4	338	240	301	8,2	375	3,8	?
5	297	370	263	4,6	?	7,4	410

Задача 6–04

В сосуде объемом V находится газ при температуре T_1 и давлении p_1, плотность газа в этих условиях составляет ρ_1. После того как из сосуда выпустили часть газа массой m, в сосуде установились давление p_2 и температура T_2. В новых условиях плотность газа составляет ρ_2. Определить неизвестную величину.

Шифр	T_1, К	p_1, кПа	ρ_1, кг/м^3	T_2, К	p_2, кПа	ρ_2, кг/м^3	m, г	V, л
1	318	241	2,35	267	132	–	?	230
2	?	158	–	139	104	1,44	237	324
3	271	273	3,43	198	176	–	115	?
4	307	311	–	?	219	2,75	387	215
5	234	265	?	207	189	–	182	173

Задача 6–05

Идеальный газ переводят из состояния с давлением p_1 и объемом V_1 в состояние с давлением p_2 и объемом V_2 в два этапа: сначала газ при постоянном давлении расширяют так, что объем увеличивается в n раз. Затем газ при постоянной температуре расширяют до конечного объема V_2. Определить неизвестную величину.

Шифр	p_1, кПа	p_2, кПа	V_1, л	V_2, л	n
1	?	321	14	37	2
2	367	?	12	83	5
3	245	147	?	67	4
4	341	214	23	?	3
5	312	176	11	39	?

Задача 6–06

Цилиндрический горизонтальный сосуд объемом V разделен тонким легкоподвижным поршнем на две части. В одной части объемом V_1 находится водород массой m_1, в другой части объемом V_2 находится углекислый газ массой m_2. Поршень находится в равновесии, температура газа в обеих частях одинакова. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, г	m_2, г	V_1, л	V_2, л	V, л
1	1,7	23	–	3,5	?
2	3,1	19	?	–	4,1
3	?	37	–	1,9	3,5
4	2,4	27	–	?	6,2
5	5,3	?	4,3	–	5,7

7 Энергетические аспекты молекулярно-кинетической теории идеального газа

7.1 Теория

Термодинамической системой называют совокупность макроскопических тел, которые могут взаимодействовать между собой и с другими телами (внешней средой) – обмениваться с ними энергией и веществом. Термодинамическая система состоит из столь большого числа атомов, молекул и т.п., что ее состояние можно характеризовать макроскопическими параметрами: плотностью, давлением, концентрацией веществ, образующих термодинамическую систему. Простейшей термодинамической системой является идеальный газ.

Тела, не входящие в систему, называются *внешними телами* или *окружающей средой*. Термодинамическая система может считаться *замкнутой*, если *отсутствует обмен веществом* между системой и окружающей средой. Если система не поглощает и не отдает тепла, то она называется *адиабатически изолированной*.

Кроме термодинамических параметров p, V и T термодинамическая система характеризуется некоторой функцией состояния U, которая называется ***внутренней энергией***.

В термодинамике движение системы как целого обычно не рассматривается, поэтому энергией системы оказывается ее внутренняя энергия U. Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют), то внутренняя энергия газа будет равна сумме кинетических энергий N молекул:

$$U = \frac{i}{2}kTN = \frac{i}{2}kT\nu N_A = \frac{i}{2}\nu RT \Rightarrow U = \frac{i}{2}\nu RT, \qquad (7.1)$$

где i – сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы.

Число степеней свободы молекулы – это число независимых координат, с помощью которых может быть однозначно задано положение молекулы в пространстве. Колебания в молекулах возникают при достаточно высоких температурах, когда в газах происходят такие процессы, как диссоциация, и газ перестает подчиняться уравнению состояния идеального газа. Поэтому в модели идеального газа, как правило, рассматривают молекулы с жесткой связью, тогда i – сумма поступательных и вращательных степеней свободы. Число поступательных степеней свободы любой молекулы равно 3, число вращательных степеней свободы двухатомных молекул и многоатомных линейных молекул равно 2 (например, молекула CO_2 – линейная, у нее две вращательные степени свободы), число вращательных степеней свободы нелинейных молекул из трех и более атомов равно 3. У одноатомных молекул вращательных степеней свободы нет. Таким образом, для молекул с жесткой связью i равно 3, 5 или 6.

Внутренняя энергия однозначно определяется состоянием системы: каждому состоянию системы присуще только одно значение энергии; изменение внутренней энергии возможно только при взаимодействии системы с внешними телами. В изолированной системе, а также вне силовых полей внутренняя энергия, как следует из закона сохранения энергии, не меняется.

Считается, что изменение энергии не зависит от пути, по которому система переходит из одного состояния в другое, а определяется только параметрами начального и конечного состояний. Внутренняя энергия системы может измениться в результате различных процессов, например совершения над системой работы или сообщения ей теплоты.

Полную работу, совершенную при изменении объема газа от V_1 до V_2, определяют формулой

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV . \tag{7.2}$$

Результат интегрирования определяется характером зависимости между давлением и объемом.

Работа, совершенная газом при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 при постоянном давлении (изобарный процесс), вычисляется по формулам:

$$A = p\left(V_2 - V_1\right) \text{ или } A = \nu R\left(T_2 - T_1\right); \qquad (7.3)$$

при постоянной температуре (изотермический процесс) по формулам:

$$A = \nu RT \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} \text{ или } A = \nu RT \cdot \ln\frac{p_1}{p_2}. \qquad (7.4)$$

Количество энергии, переданное системой (системе) в процессе расширения или сжатия газа, называют ***работой A***. Работу A принято считать положительной, если при этом энергия передается от системы внешним телам (работу совершает система). В противном случае значение работы A считается отрицательным (работа совершается над системой).

Количество энергии, переданное системой (системе) в процессе теплообмена, называют ***количеством теплоты*** или ***теплотой Q***. Теплота Q считается положительной, если она передается от внешних тел системе, и отрицательной, если она передается от системы внешним телам.

Таким образом, можно говорить о двух формах передачи энергии от одних тел к другим: работе и теплоте. Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения, и наоборот. При этих превращениях соблюдается закон сохранения и превращения энергии; применительно к термодинамическим процессам этим законом и является первое начало термодинамики, установленное в результате обобщения многовековых опытных данных:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (7.5)$$

Уравнение (7.5) выражает **первое начало термодинамики**: теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил.

Выражение (7.5) для элементарного процесса можно записать в виде

$$dQ = dU + dA. \qquad (7.6)$$

В термодинамическом описании процессов важную роль играет величина, называемая ***теплоемкостью***.

Удельная теплоемкость вещества – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{dQ}{mdT} . \quad (7.7)$$

Единицей удельной теплоемкости в СИ является джоуль на килограмм-кельвин (Дж/(кг·К)).

Молярная теплоемкость – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{dQ}{\nu dT} , \quad (7.8)$$

где $\nu = \frac{m}{\mu}$ – количество вещества.

Единица молярной теплоемкости в СИ – джоуль на моль-кельвин (Дж/(моль·К)).

Удельная теплоемкость связана с молярной теплоемкостью соотношением

$$C_m = c \cdot \mu . \quad (7.9)$$

Теплоемкость любой системы зависит от того, в ходе какого процесса происходит передача тепла системе. Различают *теплоемкости при постоянном объеме* и *постоянном давлении*, если в процессе нагревания системы ее объем или давление поддерживается постоянным.

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил, согласно (7.2), равна нулю и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии, т.е. молярная теплоемкость газа при постоянном объеме C_V равна изменению внутренней энергии 1 моля газа при повышении его температуры на 1 К. Тогда ***молярная теплоемкость газа при постоянном объеме C_V*** вычисляется по формуле

$$C_V = \frac{i}{2} R . \quad (7.10)$$

При нагревании газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа.

Выражение (7.11) называется ***уравнением Майера***; оно показывает, что теплоемкость при постоянном давлении C_p всегда больше теплоемкости при постоянном объеме C_V на величину молярной газовой постоянной:

$$C_p = C_V + R\,. \tag{7.11}$$

Использовав равенства (7.10) и (7.11), получаем формулу вычисления ***молярной теплоемкости газа при постоянном давлении C_p***:

$$C_p = \frac{i+2}{2}R\,. \tag{7.12}$$

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное для каждого газа отношение C_p к C_V:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{2}\,. \tag{7.13}$$

Адиабатным называется процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой, $Q = 0$. К адиабатным процессам можно отнести все быстропротекающие процессы, например процесс распространения звука в среде, так как скорость распространения звуковой волны настолько велика, что теплообмен между соседними областями среды произойти не успевает. Адиабатные процессы применяются в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах), в холодильных установках и т.д.

Из первого начала термодинамики (7.6) для адиабатного процесса следует, что

$$dA = -dU\,, \tag{7.14}$$

т.е. внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Это означает, что если система (газ) адиабатически сжимается (работа отрицательная), то внутренняя энергия системы увеличивается, температура повышается.

Уравнение адиабатного процесса, называемое также ***уравнением Пуассона***:

$$p \cdot V^{\gamma} = \text{const}\,, \tag{7.15}$$

где γ – показатель адиабаты, величина которого определяется формулой (7.13).

График зависимости между параметрами состояния идеального газа при $Q = 0$ называется ***адиабатой***. Адиабата в координатах (p, V) изображается нелинейным графиком, идущим круче, чем гипербола (рисунок 7.1).

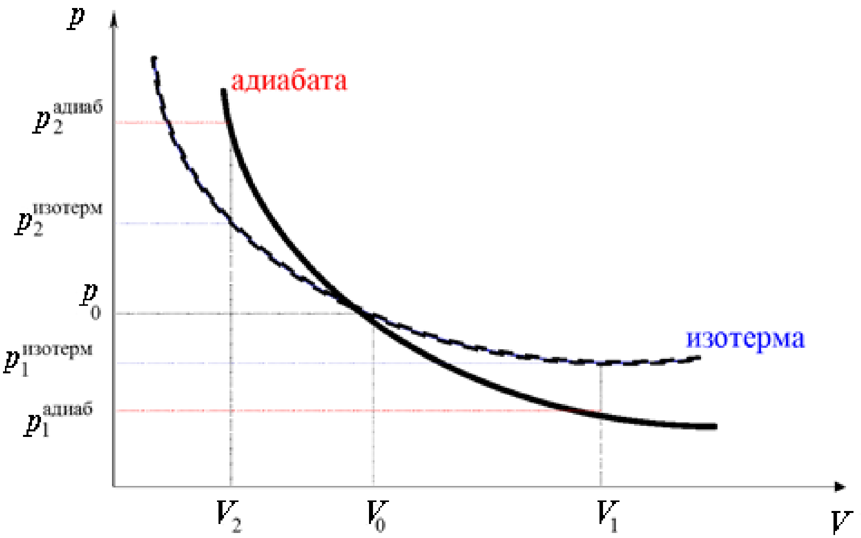

Рисунок 7.1 – Сравнение изотермы и адиабаты

На рисунке 7.1 видно, что адиабата ($pV^{\gamma} = \text{const}$) более крута, чем изотерма ($pV = \text{const}$).

Особое место в термодинамике занимают круговые процессы (циклы), так как на их основе работают все тепловые двигатели.

Круговым процессом (***циклом***) называют процесс, при котором термодинамическая система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное состояние.

На диаграмме (p, V) равновесный круговой процесс изображается замкнутой кривой (рисунок 7.2). Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения ($a-b-c$) и сжатия ($c-d-a$) газа.

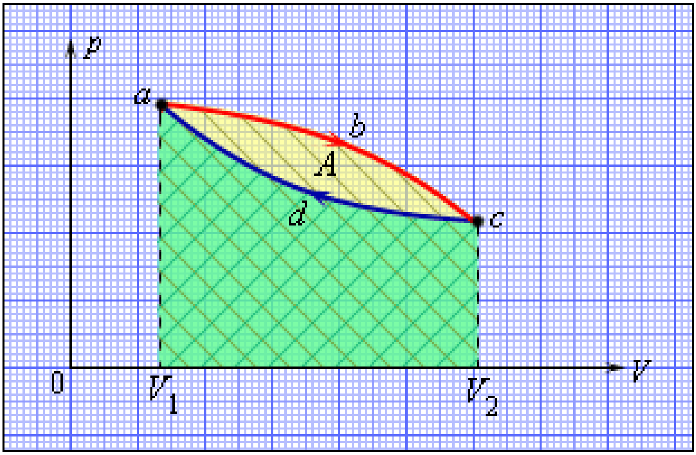

Рисунок 7.2 – Круговой процесс на диаграмме (p, V): abc – кривая расширения; cda – кривая сжатия

При расширении газ совершает положительную работу A_1, равную площади под кривой abc, при сжатии газ совершает отрицательную работу A_2, равную по модулю площади под кривой cda. Полная работа за цикл $A = A_1 + A_2$ на диаграмме (p, V) равна площади цикла.

Тепловым двигателем называется устройство, способное превращать полученное количество теплоты в механическую работу и работающее по замкнутому циклу. Механическая работа в тепловых двигателях производится в процессе расширения некоего вещества, которое называется рабочим телом. В качестве рабочего тела обычно используются газообразные вещества (пары бензина, воздух, водяной пар). Рабочее тело получает (или отдает) тепловую энергию в процессе теплообмена с телами, имеющими большой запас внутренней энергии. Эти тела называются тепловыми резервуарами.

Общее свойство всех круговых процессов состоит в том, что их невозможно провести, приводя рабочее тело в тепловой контакт только с одним тепловым резервуаром. Их нужно по крайней мере два. Тепловой резервуар с более высокой температурой называют ***нагревателем***, а с более низкой – ***холодильником***. Это утверждение является одной из возможных формулировок **второго начала термодинамики**. Совершая круговой процесс, рабочее тело получает от нагревателя некоторое количество теплоты $Q_1 > 0$ и отдает холодильнику количество теплоты $Q_2 < 0$.

Принцип действия теплового двигателя приведен на рисунке 7.3.

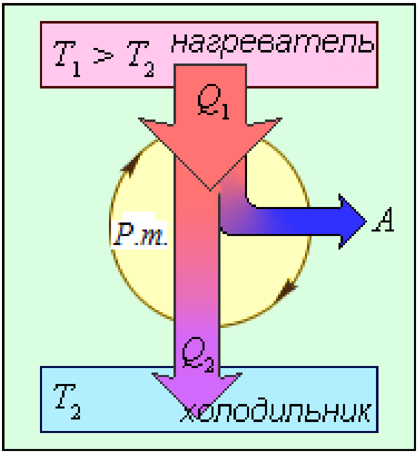

Рисунок 7.3 – Энергетическая схема тепловой машины: *Р.т.* – рабочее тело

От нагревателя с более высокой температурой T_1 за цикл отбирается количество теплоты Q_1, а холодильнику с более низкой температурой T_2 за цикл передается количество теплоты Q_2, при этом совершается работа

$$A = Q_1 - Q_2 . \tag{7.16}$$

Термический коэффициент полезного действия теплового двигателя **(*КПД*)** η определяется формулой

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (7.17)$$

Из всевозможных круговых процессов важное значение в термодинамике имеет ***цикл Карно*** – цикл, состоящий из четырех последовательных обратимых процессов: изотермического расширения, адиабатного расширения, изотермического сжатия и адиабатного сжатия.

Прямой цикл Карно изображен на рисунке 7.4, где изотермические расширение и сжатие заданы соответственно кривыми 1–2 и 3–4, а адиабатные расширение и сжатие – кривыми 2–3 и 4–1.

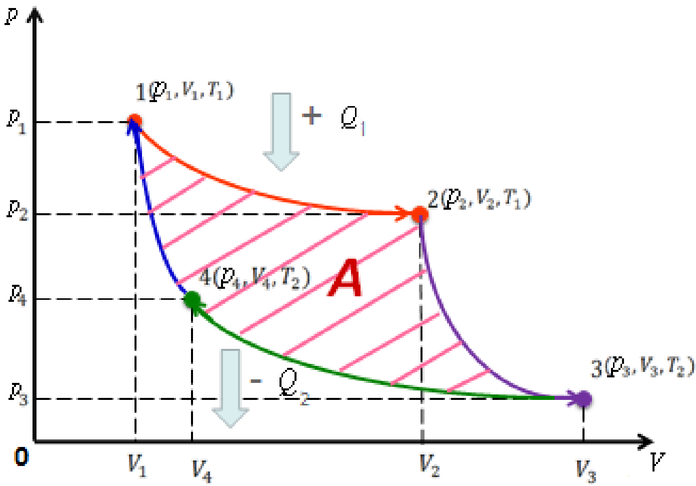

Рисунок 7.4 – Цикл Карно

Термический коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температуры нагревателя и холодильника и определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (7.18)$$

В соответствии с теоремой Карно КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, всегда больше КПД любого теплового двигателя, работающего при тех же температурах нагревателя и холодильника. Теорема Карно также является одной из возможных формулировок второго начала термодинамики.

7.2 Пример решения и оформления задачи

Некоторое количество идеального газа используется в качестве рабочего тела теплового двигателя, цикл которого состоит из последовательных участков изохорного нагревания, адиабатного расширения и изобарного сжатия. В ходе цикла отношение максимальной температуры к минимальной равно n, отношение максимального объема к минимальному равно k. Число степеней свободы молекулы равно i, КПД двигателя – η. Определить неизвестную величину.

n	k	i	η
3	2	3	?

Решение

График цикла в координатах (p, V) представлен на рисунке 7.5, где цифрами 1, 2, 3 обозначены характерные точки цикла.

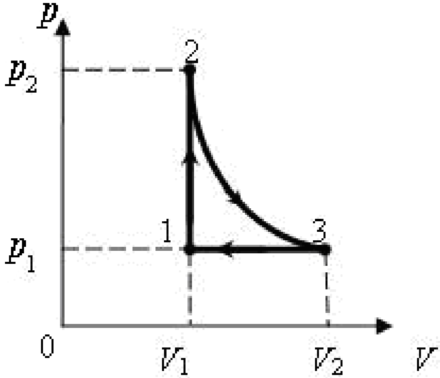

Рисунок 7.5 – График цикла

На участке 1–2 происходит изохорное нагревание, газ не совершает работы, получает тепло. Температура T_1 в точке 1 ниже температуры T_2 в точке 2.

В соответствии с первым законом термодинамики количество полученного газом тепла $Q_{пол}$ в этом случае равно изменению внутренней энергии газа ΔU_{12}:

$$Q_{пол} = \Delta U_{12} = \frac{i}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right).$$

На участке 2–3 происходит адиабатное расширение, газ не получает и не отдает тепло, температура уменьшается. Температура T_3 в точке 3 ниже температуры T_2 в точке 2.

На участке 3–1 газ сжимается при постоянном объеме, при этом газ совершает отрицательную работу, температура газа уменьшается, газ отдает тепло. Температура T_1 в точке 1 ниже температуры T_3 в точке 3. В соответствии с первым законом термодинамики количество отданного газом тепла $Q_{отд}$ в этом случае равно изменению внутренней энергии $\Delta\, U_{31}$ и работе газа A_{31}:

$$Q_{отд} = \Delta U_{31} + A_{31} = \frac{i}{2}\nu R\left(T_1 - T_3\right) + p_1\left(V_1 - V_2\right).$$

Минимальная температура газа в ходе цикла достигается в точке 1 (T_1), максимальная – в точке 2 (T_2). Учтем, что по условию $T_2/T_1 = n$, и обозначим минимальную температуру (T_1) через T. Тогда выражение для вычисления количества полученного газом тепла $Q_{пол}$ принимает вид

$$Q_{пол} = \frac{i}{2}\nu R\left(n - 1\right)T.$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона, записанного для состояний газа 1 и 3, следует, что

$$p_1\left(V_1 - V_2\right) = \nu R\left(T_1 - T_3\right).$$

В соответствии с уравнением изобарного процесса получим соотношение

$$T_3 / V_2 = T_1 / V_1. \qquad (7.19)$$

Поскольку по условию задачи $V_2/V_1 = k$, то из соотношения (7.19) найдем отношение объемов

$$T_3 / T_1 = k . \qquad (7.20)$$

С учетом уравнений (7.19) и (7.20) выражение для количества отданного газом тепла $Q_{\text{отд}}$ принимает вид

$$Q_{\text{отд}} = \frac{i+2}{2} \nu R (1-k) T .$$

Применим для вычисления КПД теплового двигателя формулу

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{отд}}|}{Q_{\text{пол}}} ,$$

в которую подставим полученные выше выражения для $Q_{\text{пол}}$ и $Q_{\text{отд}}$. Окончательная формула для вычисления КПД имеет вид

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{(i+2)(k-1)}{i(n-1)}.}$$

$n = 3$ $k = 2$ $i = 3$	$$\eta = 1 - \frac{(3+2)(2-1)}{3(3-1)} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17 .$$
$\eta = ?$	Ответ: $\eta = 0{,}17$.

В соответствии с правилами приближенных вычислений результат округляем до двух значащих цифр.

7.3 Домашние задания

Задача 7–01

Идеальный газ массой m и молярной массой μ нагревают первый раз при постоянном объеме, сообщая газу количество тепла Q_1, а второй раз при постоянном давлении, сообщая газу количество тепла Q_2. Температура каждый раз повышается на Δt. Число степеней свободы молекулы – i. Определить неизвестную величину.

Шифр	m, г	μ, г/моль	Q_1, Дж	Q_2, Дж	Δt, °С	i
1	–	–	2370	3160	–	?
2	86	?	1560	2190	28	–
3	?	4,0	–	4680	53	3
4	79	28	1350	1890	?	–
5	56	18	?	–	40	6

Задача 7–02

С идеальным газом, число степеней свободы молекулы которого i, а количество вещества ν, проводят адиабатный процесс. В начальном состоянии значения объема и температуры газа равны соответственно V_1, T_1. В конечном состоянии значения этих параметров равны V_2, T_2. В ходе процесса газ совершает работу A, при этом его внутренняя энергия меняется на ΔU. Определить неизвестную величину.

Шифр	T_1, К	V_1, л	T_2, К	V_2, л	A, кДж	ΔU, кДж	ν, моль	i
1	–	76	200	31	–	?	2,4	3
2	350	?	–	65	9,13	–	4,4	5
3	230	54	–	25	?	–	3,6	6
4	–	42	300	?	–	6,98	5,6	3
5	250	31	–	48	–	–1,49	?	5

Задача 7–03

Смесь водяного пара (H_2O) массой m_1 и водорода массой m_2 нагревают при постоянном давлении, сообщая газу количество тепла Q. При этом температура смеси меняется от значения T_1 до значения T_2. Определить неизвестную величину.

Шифр	m_1, г	m_2, г	T_1, К	T_2, К	Q, кДж
1	?	4,7	310	340	4,5
2	28	?	230	270	3,9
3	32	2,5	?	220	3,8
4	16	5,1	190	?	4,6
5	40	6,4	250	280	?

Задача 7–04

Идеальный двухатомный газ, объем которого – V_1, а давление – p_1, сначала изотермически расширяют до объема V_2, при этом давление становится равным p_2. Затем газ изобарно сжимают до первоначального объема. Изменение внутренней энергии газа в ходе процесса составляет ΔU. Определить неизвестную величину.

Шифр	p_1, кПа	p_2, кПа	V_1, м^3	V_2, м^3	ΔU, кДж
1	217	–	3,7	6,5	?
2	?	208	3,6	–	–940
3	246	115	–	4,1	?
4	?	319	2,8	–	–770
5	425	287	–	?	–850

Задача 7–05

Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ совершает замкнутый цикл, состоящий из последовательных участков изотермического расширения, изохорного охлаждения и адиабатного сжатия. В ходе цикла отношение максимального объема к минимальному равно k, максимальная и минимальная температуры равны T_1 и T_2 соответственно. Коэффициент полезного действия цикла – η, работа, совершенная газом за цикл, равна A. Определить неизвестную величину.

Шифр	T_1, К	T_2, К	k	γ	A, Дж	η
1	?	310	–	1,4	384	0,08
2	–	?	2	1,67	263	0,11
3	420	270	–	1,33	?	0,16
4	480	350	–	1,4	394	?
5	–	250	3	?	763	0,22

Задача 7–06

Идеальный газ совершает прямой замкнутый цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. В ходе цикла отношение максимального объема к минимальному равно k, минимальная температура равна T_1, максимальная температура равна T_2, удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме равны соответственно C_p и C_V. Коэффициент полезного действия цикла – η. Определить неизвестную величину.

Шифр	C_V, кДж/(кг·К)	C_p, кДж/(кг·К)	T_1, К	T_2, К	k	η
1	10,4	14,5	?	790	4	0,11
2	0,311	?	130	840	3	0,18
3	?	5,19	230	980	2	0,16
4	0,743	1,04	140	?	3	0,13
5	0,650	0,910	120	760	4	?

Библиографический список

Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М. : Наука, 2005.

Кикоин А.К. Молекулярная физика / А.К. Кикоин, И.К. Кикоин. – М. : Лань, 2008.

Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. Кн. 1 / И.В. Савельев. – М. : АСТ. Астрель, 2005.

Савельев И.В. Курс общей физики. Молекулярная физика и термодинамика. Кн. 3 / И.В. Савельев. – М.: АСТ. Астрель, 2007.

Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1 / Д.В. Сиухин. – М. : Физматлит, 2004.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1 – Основные единицы СИ

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			международное	русское
Длина	L	метр	m	м
Масса	M	килограмм	kg	кг
Время	T	секунда	s	с
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	K	К
Количество вещества	N	моль	mol	моль

Таблица П2 – Примеры производных единиц СИ, наименования и обозначения которых образованы с использованием наименований и обозначений основных единиц СИ

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			международное	русское
Площадь	L^2	квадратный метр	m^2	$м^2$
Объем, вместимость	L^3	кубический метр	m^3	$м^3$
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	m/s	м/с
Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	m/s^2	$м/с^2$
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	kg/m^3	$кг/м^3$

Таблица П3 – Примеры производных единиц СИ, имеющих специальные наименования, обозначения

Величина		Единица			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Выражение через основные и производные единицы СИ
			международное	русское	
Плоский угол	1	радиан	rad	рад	$m \cdot m^{-1} = 1$
Телесный угол	1	стерадиан	sr	ср	$m^2 \cdot m^{-2} = 1$
Частота	T^{-1}	герц	Hz	Гц	s^{-1}
Сила	LMT^{-2}	ньютон	N	Н	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Pa	Па	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	L^2MT^{-2}	джоуль	J	Дж	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Мощность	L^2MT^{-3}	ватт	W	Вт	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Температура Цельсия	Θ	градус Цельсия	°C	°C	K

Таблица П4 – Примеры производных единиц СИ, наименования и обозначения которых образованы с использованием специальных наименований и обозначений, указанных в таблице П.3

Величина		Единица			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Выражение через основные и производные единицы СИ
			международное	русское	
Момент силы	L^2MT^{-2}	ньютон-метр	N·m	Н·м	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Поверхностное натяжение	MT^{-2}	ньютон на метр	N/m	Н/м	$kg \cdot s^{-2}$
Удельная энергия	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	J/kg	Дж/кг	$m^2 \cdot s^{-2}$
Теплоемкость системы, энтропия системы	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	J/K	Дж/К	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	J/(kg·K)	Дж/(кг·К)	$m^2 \cdot s^{-2}K^{-1}$
Поверхностная плотность потока энергии	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	W/m^2	Вт/м^2	$kg \cdot s^{-3}$
Теплопроводность	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	W/(m·K)	Вт/(м·К)	$m \cdot kg \cdot s^{-3}K^{-1}$
Молярная внутренняя энергия	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	J/mol	Дж/моль	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$
Молярная энтропия, молярная теплоемкость	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	J/(mol·K)	Дж/(моль·К)	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}K^{-1} \times$ $\times mol^{-1}$
Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	rad/s	рад/с	s^{-1}
Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	rad/s^2	рад/с^2	s^{-2}

Таблица П5 – Множители и приставки, используемые для образования наименований и обозначений десятичных кратных и дольных единиц СИ

Десятичный множитель	Приставка	Обозначение приставки		Десятичный множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		международное	русское			международное	русское
10^{24}	иотта	Y	И	10^{-1}	деци	d	д
10^{21}	зетта	Z	З	10^{-2}	санти	c	с
10^{18}	экса	E	Э	10^{-3}	милли	m	м
10^{15}	пета	P	П	10^{-6}	микро	μ	мк
10^{12}	тера	T	Т	10^{-9}	нано	n	н
10^{9}	гига	G	Г	10^{-12}	пико	p	п
10^{6}	мега	M	М	10^{-15}	фемто	f	ф
10^{3}	кило	k	к	10^{-18}	атто	a	а
10^{2}	гекто	h	г	10^{-21}	зепто	z	з
10^{1}	дека	da	да	10^{-24}	иокто	y	и

Таблица П6 – Основные физические константы

Величина	Обозначение, численное значение
Скорость света в вакууме	$c = 3\cdot10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Стандартное ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Газовая постоянная	$R = 8{,}31$Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К

Таблица П7 – Математические константы, производные, интегралы некоторых функций

Константа		Обозначение, численное значение
Число π		$\pi \approx 3{,}14$
Основание натурального логарифма		$e \approx 2{,}72$
Функция	Производная	Интегралы
x^n	nx^{n-1}	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\int \sin x dx = -\cos x$
e^{nx}	ne^{nx}	$\int \cos x dx = \sin x$
a^x	$a^x \ln a$	$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln(\cos x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{arctg} x$
$\sin x$	$\cos x$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Таблица П8 – Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$
$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha};\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$	$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha};\alpha\neq\pi n, n\in Z$	$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$	$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\mathrm{tg}2\alpha==\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\mathrm{ctg}2\alpha==\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\alpha}$

Таблица П9 – Формулы для приближенных вычислений

Формула	Значение аргумента*
$\dfrac{1}{1\pm x}\approx1\mp x$	$x<0{,}031$
$\sqrt{1+x}\approx1+\dfrac{1}{2}x$	$x<0{,}093$
$\sqrt{1-x}\approx1-\dfrac{1}{2}x$	$x<0{,}085$
$e^{\pm x}\approx1\pm x$	$x<0{,}045$
$\ln(1\pm x)\approx\pm x$	$x<0{,}045$
$\sin x\approx x$	$x<0{,}077$ рад (4,4°)
$\cos x\approx1-\dfrac{1}{2}x^2$	$x<0{,}387$ рад (22,2°)

* Неравенства указывают значения аргумента, при которых расчеты по приближенным формулам приводят к ошибкам, не превышающим $0{,}1\%$.

Учебное издание

Степанова Валентина Анатольевна
Уварова Ирина Федоровна

ФИЗИКА

Механика и молекулярная физика

Учебное пособие для практических занятий

Редактор *Е.Н. Леонова*

Компьютерная верстка *И.В. Баратовой*

Подписано в печать 20.01.20	Уч.-изд. л. 6,5
Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$	Электронная версия

Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом НИТУ «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. 8 (495) 638-44-06

Отпечатано в типографии
Издательского Дома НИТУ «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. 8 (495) 638-44-16, 8 (495) 638-44-43