

УДК 537

P27

Рецензент

д-р техн. наук, проф. *К.Л. Косырев*  
(председатель НМСН *Металлургия*)

**Рахштадт Ю.А.**

P27 Физика: Силовые поля: Учеб. пособие. Ч. 3. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2009. – 218 с.

Учебное пособие состоит из пяти частей, соответствующих пяти разделам курса физики. В третьей части «Силовые поля» рассматриваются свойства гравитационного и электромагнитного поля с точки зрения современных физических представлений, методы расчета силовых полей, движение частиц в силовых полях, поведение проводников, диэлектриков и магнетиков в электромагнитном поле.

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению «Металлургия».



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 8. Фундаментальные взаимодействия и фундаментальные силовые поля .....	7
Глава 9. Источники и основные характеристики силовых полей. наглядное представление полей.....	11
9.1. Гравитационное поле .....	11
9.2. Электромагнитное поле .....	12
9.3. Силовые и энергетические характеристики полей .....	15
9.4. Наглядное представление полей.....	16
Контрольные вопросы .....	19
Глава 10. Постоянное гравитационное поле.....	20
Контрольные вопросы .....	25
Глава 11. Постоянное электромагнитное поле элементарных источников.....	26
11.1. Электрическое поле. Электрическая сила .....	26
11.2. Электростатическое поле неподвижного точечного заряда.....	27
11.3. Взаимодействие неподвижных точечных зарядов. Закон Кулона. Потенциальная энергия.....	30
11.4. Электрическое поле движущегося точечного заряда .....	34
11.5. Относительный характер компонент электромагнитного поля. Магнитное поле. Магнитная сила. Электромагнитная сила Лоренца .....	35
Контрольные вопросы .....	42
Глава 12. Методы расчета макроскопических полей .....	44
12.1. Принцип суперпозиции полей .....	44
12.2. Структура векторных полей .....	46
12.3. Поток и дивергенция векторного поля.....	46
12.4. Циркуляция и ротор векторного поля .....	51
Контрольные вопросы .....	56
Глава 13. Электрическое поле.....	57
13.1. Электростатическое поле точечного заряда.....	57
13.2. Электростатическое поле равномерно заряженной сферы (или проводящего шара) .....	58
13.3. Электростатическое поле равномерно заряженного непроводящего шара .....	60

13.4. Электростатическое поле равномерно заряженной бесконечно длинной нити .....	62
13.5. Электростатическое поле равномерно заряженной плоскости .....	64
13.6. Электростатическое поле электрического диполя (в вакууме).....	65
Контрольные вопросы .....	68
Примеры решения задач.....	69
Глава 14. Постоянный ток .....	74
14.1. Понятие об электрическом токе .....	74
14.2. Условия возникновения и поддержания постоянного тока в проводниках. Понятие ЭДС .....	75
14.3. Падение напряжения (или напряжение) на участке цепи .....	77
14.4. Величина и плотность тока.....	77
14.5. Основные законы постоянного тока .....	80
Контрольные вопросы .....	86
Примеры решения задач.....	86
Глава 15. Расчеты магнитостатических полей токов.....	89
15.1. Магнитное поле движущегося заряда (в вакууме) .....	89
15.2. Закон Био – Савара – Лапласа.....	90
15.3. Магнитостатическое поле магнитного диполя.....	91
15.4. Магнитостатическое поле бесконечно длинного прямого проводника с током.....	93
15.5. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида .....	94
15.6. Магнитное поле тонкого тороида .....	95
15.7. Проводник с током в магнитном поле. Сила Ампера. ....	97
15.8. Магнитное взаимодействие параллельных токов. Закон Ампера .....	98
15.9. Электромагнитное взаимодействие потоков заряженных частиц (в вакууме).....	99
Контрольные вопросы .....	100
Примеры решения задач.....	101
Глава 16. Движение в силовых полях .....	103
16.1. Движение в гравитационном поле.....	103
16.2. Движение в электромагнитном поле .....	110
Контрольные вопросы .....	115

Примеры решения задач.....	116
Глава 17. Вещество в постоянном электромагнитном поле .....	121
17.1. Проводники .....	121
17.2. Диэлектрики .....	126
17.3. Магнетики .....	139
Контрольные вопросы .....	153
Глава 18. Электродинамика.....	156
18.1. Электромагнитная индукция .....	156
18.2. Механизм возникновения тока индукции .....	160
18.3. Вихревые токи .....	163
18.4. Физический принцип действия генератора переменного тока .....	165
18.5. Явление самоиндукции .....	169
18.6. Явление взаимоиנדукции. Физический принцип действия трансформатора.....	171
18.7. Еще один источник вихревого магнитного поля (в электродинамике). Ток смещения .....	173
Контрольные вопросы .....	175
Примеры решения задач.....	176
Глава 19. Законы электромагнитного поля – уравнения Максвелла .....	180
Контрольные вопросы .....	183
Домашние задания.....	184
Приложение .....	184
Библиографический список.....	226

## Глава 8. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СИЛОВЫЕ ПОЛЯ

Материя существует не только в форме вещества. Пространство между телами никогда не является пустым: оно заполнено материей в форме силового поля. В определенном смысле поле является такой же составной частью любого макроскопического тела, как и элементарные частицы, образующие атомы этого тела. Например, собственный объем частиц составляет всего около  $10^{-15}$  полного объема макроскопического тела, остальной же объем занят полями этих частиц.

Поле является переносчиком взаимодействия тел. Образно говоря, каждое тело «узнает» о существовании других тел только через окружающие его поля.

Полям – так же, как и частицам вещества, – свойственно состояние движения. Но это движение не может быть сведено к простому механическому перемещению. Для описания полей непригодны модели механики: материальная точка, твердое тело, система тел и др. Действительно, что именно движется, когда в поле происходят какие-то изменения или когда оно передает воздействие одного тела на другое? Современная физика не может сопоставить этому движению столь же наглядные модели, как в случае перемещения тел или частиц.

Модель поля более сложна. Мы представляем себе поле как некий материальный объект, непрерывно заполняющий все пространство рассматриваемой области, причем состояние поля даже в двух соседних точках может быть различным. Поэтому физические величины, характеризующие поле, должны быть непрерывными функциями координат. Тогда, сопоставляя каждой точке пространства определенное значение соответствующей функции, получаем искомую модель поля.

В математическом отношении у такой модели может быть много разновидностей. Если функция, о которой шла речь, есть скаляр, то такое поле называется *скалярным*. Если же функция векторная, то это значит, что каждой точке пространства соответствует теперь не одно число, как в скалярном поле, а тройка чисел. Такое поле называется *векторным*. Может случиться и так, что одной векторной величины окажется недостаточно для однозначной характеристики состояния поля. Это – более сложные по своей математической струк-

туре поля (например, *тензорное* или *спинорное*). Электростатическое поле, например, можно описать с помощью скалярной модели – поля потенциала  $\varphi$ , или с помощью векторной модели – поля вектора электрической напряженности  $\vec{E}$ .

Указанные математические модели применяются и за пределами проблемы силовых полей, например: температурное поле, поле скоростей в жидкости, поле деформаций и механических напряжений тела и др. Эти поля принципиально отличаются от силовых: они не представляют собой какой-либо особой формы существования материи. Поле скоростей, температур и т.п. есть просто удобный способ наглядного изображения этих параметров для какой-либо пространственно протяженной вещественной среды (нагретый газ, поток жидкости и т.п.) По существу такие поля являются просто математическими моделями.

Моделирование *фундаментальных силовых* полей представляет собой значительно более глубокую по своему физическому содержанию проблему. В самом деле, что значит выбрать подходящую модель для описания какого-нибудь поля? Для этого, прежде всего, нужно выяснить, какой набор физических величин должен быть задан, чтобы состояние поля определялось столь же однозначно, как, скажем, определяется положение тела по его координатам.

Однако обнаружив в природе какое-то новое фундаментальное поле, мы еще не знаем, какие физические величины могут послужить его характеристикой, будут ли это скаляры, векторы или тензоры. Так или иначе, эти величины заранее неизвестны, это – новые физические величины, которые еще только предстоит найти. Найти же их можно только из опыта, из экспериментальных данных об основных свойствах вновь открытого поля. Конечно, можно попытаться и теоретически «сконструировать» модель поля, но тогда эксперимент должен подтвердить ее соответствие оригиналу. Найденная в результате модель силового поля не есть, следовательно, чисто математическое построение. Она отражает физическую реальность новой формы материи, т.е. является *физической моделью*.

*Физические поля* – физические системы, обладающие бесконечно большим числом степеней свободы. Относящиеся к такой системе физические величины не локализованы на каких-либо материальных частицах с конечным числом степеней свободы, а непрерывно распределены по некоторой области пространства. Примерами таких полей могут служить гравитационное и электромагнитное поля.

Пока речь идет о нерелятивистских процессах (классическая механика), понятие поля можно не вводить: поле является лишь некоторым способом описания физического явления – взаимодействия частиц. Можно считать, что пространство вокруг частиц не играет особенной роли в передаче взаимодействия<sup>1</sup> – такое представление соответствует концепции *дальнодействия*.

Модель силового поля была введена именно для объяснения механизма дальнодействия: поле рассматривается как материальная среда, являющаяся носителем взаимодействия. Примеры дальнодействующих взаимодействий приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Гравитационное взаимодействие	Электромагнитное взаимодействие	
<p>Взаимодействие точечных масс</p> $F_{\text{гр}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} -$ <p><i>закон всемирного тяготения Ньютона.</i> Здесь <math>\gamma</math> – гравитационная постоянная</p>	<p>Электрическое взаимодействие точечных зарядов</p> $F_{\text{э}} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} -$ <p><i>закон Кулона.</i> Здесь <math>k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}</math>, где <math>\epsilon_0</math> – электрическая постоянная, <math>\epsilon</math> – диэлектрическая проницаемость вещества</p>	<p>Магнитное взаимодействие параллельных токов</p> $F^* = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{d} -$ <p><i>закон Ампера.</i> Здесь <math>F^*</math> – магнитная сила, действующая на единицу длины проводника с током («приведенная сила»), <math>\mu_0</math> – магнитная постоянная</p>

В теории же относительности при рассмотрении релятивистских процессов, благодаря конечной скорости распространения информации о взаимодействии, положение вещей существенным образом меняется и говорить о дальнодействии уже нельзя. В этом случае изменение положения одной из частиц отражается на других частицах лишь спустя некоторый промежуток времени, т.е. поле, переносящее взаимодействие, является само по себе физической реальностью. Взаимодействие может происходить в каждый момент лишь между соседними точками пространства (*близкодействие*).

Соответственно *четырем* известным сейчас видам *фундаментальных сил* существуют *четыре* типа *силовых полей*: *гравитационное, электромагнитное, поле сильных (ядерных) взаимодействий и поле слабых взаимодействий* (табл. 8.2).

<sup>1</sup> В классической механике скорость передачи любого сигнала, в том числе и информации о взаимодействии, считается бесконечной.

Таблица 8.2

Параметры	Фундаментальные взаимодействия			
	гравитационное	слабое	электромагнитное	ядерное
Интенсивность, $G^2$	$10^{-39}$	$10^{-14}$	$10^{-2}$	1
Радиус $R$ , м	$\infty$	$10^{-15}$	$\infty$	$10^{-18}$
Носители	Гравитоны (?) (или гравитационные волны (?))	$W^\pm$ и $Z^0$ – бозоны	Фотоны (или электромагнитные волны)	Глюоны

Каждое из них ответственно за свой круг процессов и явлений в природе. Мы пока не знаем, почему фундаментальных полей именно четыре, существуют ли еще какие-нибудь виды силовых полей – или, напротив, все они есть только частные проявления какого-то одного, еще более фундаментального поля.

# ГЛАВА 9. ИСТОЧНИКИ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ. НАГЛЯДНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЕЙ

## 9.1. Гравитационное поле

*Гравитационное поле* есть область пространства, в каждой точке которой задан вектор  $\vec{F}_{\text{Гр}}(\vec{r})$  – сила гравитационного взаимодействия (гравитационная сила) – являющийся функцией координат и характеризующий силовое взаимодействие поля и любого тела.

### 9.1.1. Источник гравитационного поля

Источником гравитационного поля является масса.

*Масса* – скалярная физическая величина, количественно характеризующая инертные и гравитационные свойства тела.

*Инертная* масса характеризует способность тела сопротивляться изменению своего состояния (покоя или движения), например, во втором законе Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{m}. \quad (9.1)$$

*Гравитационная* масса характеризует способность тела создавать гравитационное поле и взаимодействовать с внешними гравитационными полями, например, в законе всемирного тяготения

$$\vec{F}_{\text{Гр}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (9.2)$$

Каждая масса является *одновременно* и инертной, и гравитационной.

### 9.1.2. Свойства массы

1. Масса тела зависит от плотности вещества  $\rho$  и объема тела  $V$ :

$$m = \iiint_V \rho dV. \quad (9.3)$$

2. Масса не тождественна количеству вещества, так как (в отличие от количества вещества) масса зависит от скорости (рис. 9.1):

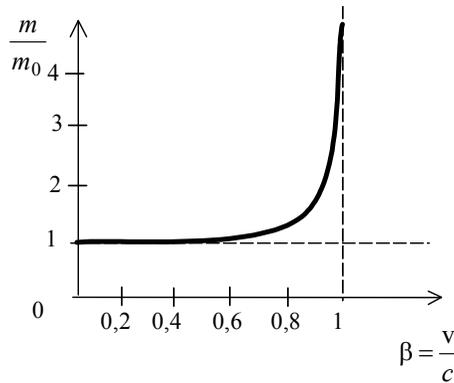


Рис. 9.1. Зависимость массы от скорости

$$m = \gamma m_0, \quad (9.4)$$

где  $\gamma$  – релятивистский фактор;  
 $m_0$  – масса покоя.

3. Понятие массы не тождественно понятиям веса и силы тяжести, так как не зависит от полей тяготения и ускорений.

4. Масса необходима и достаточна для описания поступательного движения, но недостаточна для описания вращательного движения.

## 9.2. Электромагнитное поле

*Электромагнитное поле* есть область пространства, в каждой точке которой задан вектор  $\vec{F}_{\text{ЭМ}}(\vec{r})$  – *электромагнитная сила* – являющийся функцией координат и характеризующий силовое взаимодействие поля и любого *заряженного* тела.

### 9.2.1. Источник электромагнитного поля

Источником электромагнитного поля является электрический заряд.

*Электрический заряд* – это свойство некоторых элементарных частиц вступать в электромагнитное взаимодействие.

### 9.2.2. Свойства электрического заряда

1. Двухзначность электрического заряда.

Электрический заряд может быть *положительным* и *отрицательным*. Принято считать, что протон заряжен положительно:  $p^+$ ,  $q_p > 0$ , а электрон – отрицательно:  $e^-$ ,  $q_e < 0$ .

Эти названия условны. Они могли бы быть и другими. По существу, это два проявления одного и того же качества. Различаются эти виды зарядов характером взаимодействия: одноименные заряды отталкиваются, разноименные притягиваются (см. ниже рис. 11.2). Во всех формулах и уравнениях принято считать заряд величиной *алгебраической*: положительный заряд  $q > 0$  и отрицательный заряд  $q < 0$ <sup>1</sup>.

Других видов электрического заряда в природе не обнаружено. Любая заряженная частица ведет себя в электрическом отношении либо как электрон – тогда ее заряд считается тоже отрицательным, либо как протон – тогда ее заряд считается положительным. Частица, не являющаяся носителем заряда, называется нейтральной.

Положительные и отрицательные заряды способны компенсировать действие друг друга. Если в каком-либо теле находится одинаковое число частиц с зарядами того и другого знака, то тело ведет себя как электрически нейтральное. Большинство тел в обычных условиях электрически нейтральны как раз в силу очень высокой степени баланса между зарядом ядер и электронов, из которых все тела состоят. Вообще в природе существует глубокая симметрия между положительным и отрицательным электричеством.

Среди элементарных частиц одинаково часто встречаются заряды обоого знака.

2. Величина заряда зависит от плотности распределения заряда и от объема заряженного тела:

$$\left. \begin{aligned} q &= \iiint_V \rho dV, \\ q &= \iint_S \sigma dS, \\ q &= \int_{\ell} \lambda d\ell \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

---

<sup>1</sup> Если иметь в виду значение модуля заряда, то можно записывать так:  $+|q|$  и  $-|q|$ .

В формулах (9.5)  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $\lambda$  – *объемная, поверхностная и линейная плотности* распределения заряда в объеме  $V$ , по поверхности  $S$  и на длине  $\ell$  соответственно.

### 3. Квантованность электрического заряда.

Абсолютная величина заряда у всех элементарных частиц одинакова. Этот заряд называется *элементарным*. Равенство зарядов выполняется с поразительной точностью, и причина этого до сих пор непонятна. Частицы, резко отличающиеся друг от друга по всем остальным свойствам, имеют в точности одинаковый заряд. Поскольку элементарные частицы суть неделимые объекты (в свободном состоянии никогда не встречаются, например, половины электрона), то и электрический заряд у тел может изменяться не непрерывно, а лишь *дискретно*, конечными порциями. Минимальная возможная порция равна элементарному заряду. Это свойство заряда называют *квантованностью*. *Квант электрического заряда* – элементарный электрический заряд –

$$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Квант заряда, т.е. элементарный заряд, представляет собой естественную единицу заряда. Однако она слишком мала для практических целей. В системе СИ используют в качестве единицы 1 *кулон* (Кл) =  $6,25 \cdot 10^{18} \cdot |e|$ . Несмотря на столь малую величину кванта заряда, сам факт его существования и свойство универсальности имеют огромное принципиальное значение. С далеко идущими следствиями этого важнейшего закона природы мы еще не раз столкнемся.

В свободном состоянии все заряды кратны целому числу элементарных электрических зарядов:

$$q = \pm N|e|. \quad (9.6)$$

Элементарные частицы – кварки  $u$  и  $d$ , существующие только в *связанном* состоянии в составе *адронов*, обладают дробными зарядами:

$$q_u = +\frac{2}{3}|e| \text{ и } q_d = -\frac{1}{3}|e|$$

соответственно, и тогда, например, структуру *протона*  $p^+$  можно представить как  $uud$ , а структуру *нейтрона*  $n^0$  – как  $ddu$ .

#### 4. Закон сохранения заряда.

Со свойством квантованности заряда тесно связан закон сохранения заряда. Если состав частиц какой-либо системы со временем не изменяется, то сохранение неизменным полного заряда этой системы есть просто следствие неизменности самого кванта. Однако, как показывает опыт, полный заряд сохраняется и тогда, когда внутри изолированной системы происходят взаимные превращения частиц, так что состав системы изменяется. Закон сохранения заряда накладывает определенные ограничения на возможные типы превращений. А именно – могут совершаться только такие превращения, при которых суммарный алгебраический заряд исходных частиц равен суммарному заряду продуктов реакции. В частности, рождение и уничтожение заряженных частиц может осуществляться только парами. Разумеется, если система не является изолированной, т.е. в нее могут проникать посторонние частицы или, наоборот, из нее могут вылетать «свои» частицы, то закон сохранения заряда не выполняется.

#### 5. Инвариантность электрического заряда.

Электрический заряд принадлежит к числу тех физических величин, которые обладают *релятивистской инвариантностью*. Это значит, что во всех инерциальных системах отсчета (ИСО) величина заряда любой частицы или тела одинакова. Другими словами, заряд движущейся и покоящейся частиц одинаков. *Сохраняемость и инвариантность* – это равные по своему содержанию законы. Инвариантность заряда так же, как и все предыдущие его свойства, есть опытный факт. Если бы заряд зависел от скорости, то атомы и молекулы тел не могли бы сохранять свою нейтральность при изменении движения орбитальных электронов.

### 9.3. Силовые и энергетические характеристики полей

Таблица 9.1

Поле	Источник поля	Силовые характеристики	Энергетические характеристики	Взаимосвязь характеристик
Поля потенциальных сил				
Гравитационное поле	Масса (гравитационный заряд)	$\vec{G}$ – напряженность	$\phi$ – гравитационный потенциал	$\vec{G} = -\text{grad}\phi$
Взаимодействие в гравитационном поле		$\vec{F}_{\text{Гр}} = m\vec{G}$ – гравитационная сила	$U = m\phi$ – потенциальная энергия	$\vec{F} = -\text{grad}U$

Электростатическое поле	Электрический заряд	$\vec{E}$ – напряженность	$\varphi$ – электрический потенциал	$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$
Взаимодействие в электростатическом поле		$\vec{F}_э = q\vec{E}$ – электрическая сила	$U = q\varphi$ – потенциальная энергия	$\vec{F} = -\text{grad}U$
Вихревые поля				
Магнито-статическое поле	Движущийся электрический заряд	$\vec{B}$ – индукция		
Взаимодействие в магнитном поле		$\vec{F}_м = q[\vec{v}\vec{B}]$ – магнитная сила		

Характеристики полей приведены в табл. 9.1.

*Напряженность силового поля* – скрытая силовая характеристика поля, которая проявляется при внесении в поле пробного тела (массы, заряда). Напряженность поля – векторная величина.

Размерность напряженности:

$$\text{гравитационного поля } \vec{G} - \left[ \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right];$$

$$\text{электрического поля } \vec{E} - \left[ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}} \right].$$

*Потенциал поля*  $\varphi$  – это скрытая энергетическая характеристика поля, которая проявляется при внесении в поле пробного тела (пробной массы или пробного заряда) и зависит от источника поля и от расстояния от него до точки в поле. Потенциал  $\varphi$  – скалярная величина.

Размерность потенциала:

$$\text{электрического поля } \varphi - \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В (вольт)} \right];$$

$$\text{гравитационного поля } \varphi - \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right].$$

#### 9.4. Наглядное представление полей

Силовые поля могут быть представлены с помощью линий напряженности – так называемых *силовых линий* (рис. 9.2).

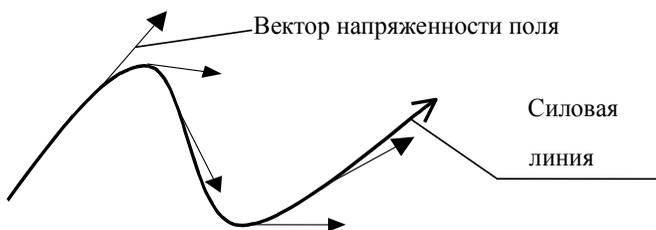


Рис. 9.2. К понятию силовой линии

Длина силовой линии не имеет физического смысла. Физический смысл имеет лишь *густота* силовых линий. По картине силовых линий поля можно разделить на *однородные* и *неоднородные*.

Поле называется *однородным*, если его напряженность во всех точках одинакова. Силовые линии такого поля параллельны друг другу и равномерно распределены в пространстве. Например, однородными являются гравитационное поле Земли вблизи ее поверхности и электростатическое поле в плоском конденсаторе (вдали от краев) – рис. 9.3.

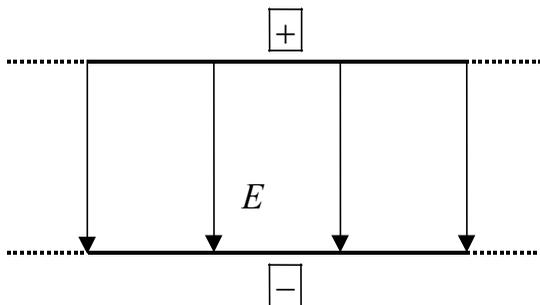


Рис. 9.3. Однородное электростатическое поле

В *неоднородных* полях напряженность зависит от величины и направления радиуса-вектора, проведенного от источника поля в исследуемую точку. Силовые линии неоднородных полей, в частности, могут быть *расходящимися* (например, электрическое поле неподвижного положительного точечного заряда (рис. 9.4) или *сходящимися* (например, электрическое поле неподвижного отрицательного заряда или гравитационное поле неподвижной точечной массы – рис. 9.5), а также *вихревыми* – с замкнутыми силовыми линиями (например, магнитное поле прямого тока – рис. 9.6).

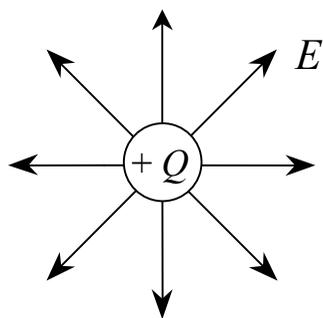


Рис. 9.4. Электростатическое поле точечного положительного заряда

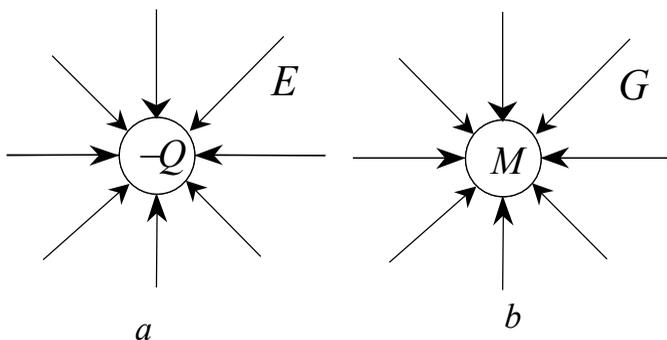


Рис. 9.5. Электростатическое поле точечного отрицательного заряда (а) гравитационное поле точечной массы (б)

Линии напряженности гравитационных и электростатических полей являются именно *силовыми*, так как касательная к силовой линии в любой точке совпадает с вектором напряженности поля и с вектором силы, действующей на пробное тело в данной точке поля.

Линии напряженности вихревых магнитных полей (см. рис. 9.6), строго говоря, силовыми не являются, так как не показывают направление силы, действующей на элементарный ток или движущийся заряд, находящиеся в данной точке поля. Как будет показано ниже

(см., например, рис. 11.7), вектор магнитной силы перпендикулярен к вектору индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , который направлен по касательной к силовым линиям.

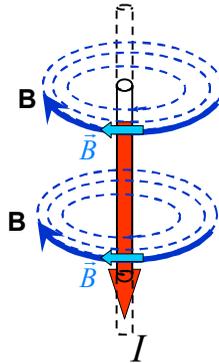


Рис. 9.6. Вихревое магнитное поле прямого тока

### Контрольные вопросы

1. Верно ли утверждение: «Силовая линия электростатического поля есть траектория движения положительного заряда?»
2. В каком случае напряженность электрического поля в некоторой точке и сила, действующая на заряд в той же точке, противоположны по направлению?
3. Верно ли утверждение: «Силовая линия магнитного поля есть траектория движения положительного заряда?»
4. В каком гипотетическом случае магнитные силовые линии могли бы быть расходящимися (сходящимися)?
5. Назовите возможные источники однородного электростатического поля.
6. Назовите возможные источники однородного магнитостатического поля.
7. Может ли электрическое поле быть вихревым? Если «да», то в каком случае?

## Глава 10. ПОСТОЯННОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ<sup>1</sup>

Сила гравитационного взаимодействия – первая из фундаментальных сил, которая была исследована количественно.

В настоящее время можно считать установленным экспериментально, что все тела подвержены гравитационному взаимодействию. Ускорения, которые испытывают различные тела в заданном гравитационном поле, одинаковы – они не зависят от массы и других свойств тел. Сила гравитационного взаимодействия  $\vec{F}_{\text{Гр}}(\vec{r})$  зависит явно от масс взаимодействующих тел и от расстояния между ними, а от скоростей этих тел – только через  $m(v)$ . Поскольку все тела обладают массой (даже если масса покоя  $m_0 = 0$ ), то гравитационное взаимодействие универсально.

Пусть тела с массами  $m_1, m_2, m_i, \dots$  создают гравитационное поле. Рассмотрим действие этого поля на материальный объект массой  $m$ , находящийся в точке, к которой проведен радиус-вектор  $\vec{r}$ . Условимся рассматривать только медленные движения тела:  $v \ll c$  ( $m_i = m_{i0}$ ).

Тело массой  $m$  называется *пробным* телом. Пробное тело мало, т.е.: 1) масса  $m$  настолько мала, что своим присутствием пробное тело не нарушает гравитационного поля; 2) протяженность тела массой  $m$  мала по сравнению с расстояниями до других тел (вектор  $\vec{r}$  имеет смысл радиуса-вектора м.т.). Помещая пробное тело массой  $m$  в различные точки пространства, т.е. меняя  $\vec{r}$ , будем получать всякий раз различные по величине и направлению силы  $\vec{F}_{\text{Гр}}(\vec{r})$ . При любом  $\vec{r}$  сила  $\vec{F}_{\text{Гр}}(\vec{r})$  пропорциональна  $m$ .

Очевидно, что гравитационное воздействие происходит не непосредственно при контакте двух тел (как, например, удар), а на расстоянии (дальнодействие).

Пространство, окружающее тела  $m_1, m_2, m_i, \dots$ , заполнено *гравитационным полем*. Количественной характеристикой воздействия этого поля на материальные объекты следует считать отношение  $\vec{F}_{\text{Гр}}(\vec{r})$  к массе пробного тела:

---

<sup>1</sup> Предлагается факультативно – для самостоятельного изучения.

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{\text{гр}}(\vec{r})}{m}. \quad (10.1)$$

Векторная физическая величина  $\vec{G}(\vec{r})$ , характеризующая состояние гравитационного поля в каждой точке пространства, называется *напряженностью* гравитационного поля. Вектор напряженности  $\vec{G}(\vec{r})$  определяет силовое действие поля на помещенные в него тела: величина  $\vec{G}(\vec{r})$  не зависит от массы пробных тел. В связи с этим массу пробного тела  $m$  называют *гравитационным зарядом* (по аналогии с электрическим зарядом), а тела  $m_1, m_2, m_i, \dots$  – *источниками поля*.

Необходимо отметить, что понятие массы, введенное ранее как мера инертности тела, и понятие массы как гравитационного заряда (меры гравитационного взаимодействия) могли бы в принципе быть совершенно различными понятиями. Согласно второму закону Ньютона под действием силы любого происхождения  $\vec{F}$  тело приобретает ускорение

$$\vec{a}_{\text{гр}} = \frac{\vec{F}}{m_{\text{ин}}}. \quad (10.2)$$

В частном случае гравитационных сил

$$\vec{a}_{\text{гр}} = \frac{m_{\text{гр}} \vec{G}}{m_{\text{ин}}}. \quad (10.3)$$

Из опыта известно, что все тела в данном поле  $\vec{G}(\vec{r})$  обладают одним и тем же ускорением  $\vec{a}_{\text{гр}} = \text{const}$  (у поверхности Земли  $\vec{a}_{\text{гр}} = \vec{g}$ ). Отсюда можно сделать вывод, что  $\frac{m_{\text{гр}}}{m_{\text{ин}}} = \text{const}$ , т.е.  $m_{\text{гр}} \cong m_{\text{ин}}$ . Коэффициент пропорциональности зависит от выбора системы единиц. В системе СИ  $m_{\text{гр}} = m_{\text{ин}}$  (проверка опытами Этвеша и Дикка показала, что равенство справедливо с точностью до  $10^{-14} \gamma$ ). Этот факт назван *принципом эквивалентности* гравитационной («тяжелой») и инертной масс и лежит в основе построения *общей теории относительности*.

Итак,  $\vec{G}(\vec{r})$  – общая характеристика гравитационного поля безотносительно к виду его источников, она определяется эксперимен-

тально о помощью пробного тела. Однако важно уметь находить поля, созданные заданным распределением масс, зная поле в самом простом случае – поле одной точечной массы.

Закон всемирного тяготения (четвертый закон Ньютона) на основе опытных данных (рис. 10.1) сформулирован следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \\ \vec{F}_{2 \rightarrow 1} &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}, \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  – сила притяжения, действующая со стороны массы 1 на массу 2;

$\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  – сила притяжения, действующая со стороны массы 2 на массу 1.

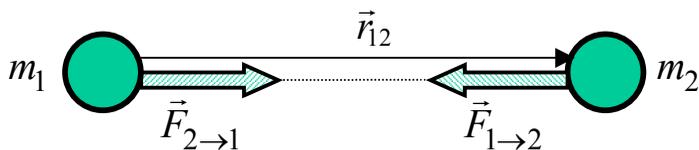


Рис. 10.1. Гравитационное взаимодействие *точечных* масс

Данный закон применим с определенными ограничениями: 1) тела  $m_1$  и  $m_2$  покоятся или движутся очень медленно ( $v \ll c$ ); 2) тела должны быть материальными точками, т.е. их размеры много меньше расстояния между ними (например, Земля и Луна). Сила  $\vec{F}_{\text{Гр}}(\vec{r})$  – всегда сила притяжения. Формально это следует из того факта, что  $m > 0$ ; не существует тел с отрицательной массой или нулевой массой (если даже  $m_0 = 0$ , то  $m = \frac{E}{c^2} \neq 0$ , так как  $E \neq 0$ ). Поэтому под действием только гравитационных сил невозможно равновесие (даже неустойчивое) покоящихся масс. Они имеют тенденцию к стягива-

нию, например, при очень больших массах сверхплотных звезд происходит гравитационный коллапс.

Гравитационные силы невозможно экранировать (возможность экранирования электрических полей связана с наличием двух видов электрических зарядов) – «от гравитационного поля скрыться нельзя».

Гравитационное поле  $\vec{G}(\vec{r})$  точечной массы  $m$  – *радиальное и сферически симметричное* (рис. 10.2).

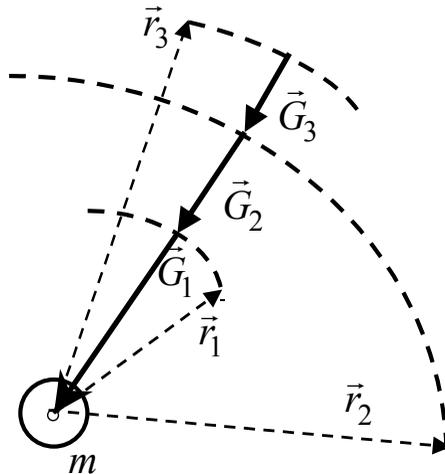


Рис. 10.2. Гравитационное поле точечной массы  $m$  :  
( $\vec{G}_{1-3}$  – векторы напряженности поля в точках на радиусах  $\vec{r}_{1-3}$   
соответственно

Основная задача расчета гравитационного поля сводится к вычислению его напряженности  $\vec{G}(\vec{r})$  при заданном распределении точечных или протяженных масс. Зная  $\vec{G}(\vec{r})$ , всегда можно найти силу, действующую на пробную массу  $m$ .

Как показывает опыт, поле  $\vec{G}(\vec{r})$ , созданное несколькими массами в некоторой точке, есть векторная сумма гравитационных полей отдельных масс  $\vec{G}_i(\vec{r})$  :

$$\vec{G}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i(\vec{r}). \quad (10.5)$$

Данное утверждение называется *принципом суперпозиции* и отражает независимость действия полей, отсутствие их влияния друг на друга.

Вектор напряженности гравитационного поля  $\vec{G}$  точечной массы (рис. 10.3) равен

$$\vec{G} = \gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (10.6)$$

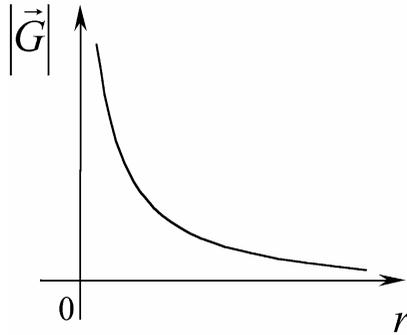


Рис. 10.3. Зависимость напряженности гравитационного поля от расстояния

*Пример расчета потенциала гравитационного поля точечной массы.*

На основе взаимосвязи напряженности и потенциала  $\vec{G} = -\text{grad}\varphi$  получаем

$$\left. \begin{aligned} \partial\varphi &= -G_r \partial r, \\ \int \partial\varphi &= + \int \gamma \frac{M}{r^2} \partial r, \\ \varphi &= -\gamma \frac{M}{r} + C. \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

Если считать, что  $\varphi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , тогда  $C = 0$ . Следовательно (рис. 10.4),

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{r}. \quad (10.8)$$

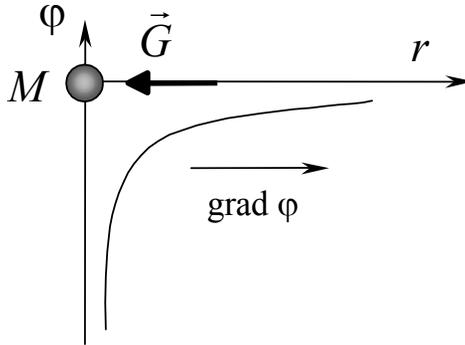


Рис. 10.4. Зависимость гравитационного потенциала от расстояния

Скалярной характеристикой взаимодействия в гравитационном поле является *потенциальная энергия*, величина которой может быть получена на основе взаимосвязи силы и потенциальной энергии:

$$\vec{F} = -\text{grad}U. \quad (10.9)$$

Тогда, например, потенциальная энергия взаимодействия (притяжения) двух точечных масс будет равна:

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (10.10)$$

### Контрольные вопросы

1. Можно ли вычислять силу гравитационного взаимодействия между протяженными телами произвольной формы, пользуясь формулой закона всемирного тяготения?
2. Чему равны напряженность и потенциал гравитационного поля вблизи поверхности Земли?
3. При соблюдении каких условий справедлив закон всемирного тяготения?
4. Является ли гравитационное поле точечной массы потенциальным полем?

## Глава 11. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основу современной интерпретации электромагнитных явлений в курсе общей физики составляют следующие исходные моменты:

1. Электромагнитное поле, наряду с веществом, является одной из форм существования материи. Оно обладает такими атрибутами движения, как энергия, импульс, масса и др. и может перемещаться в пространстве с предельно возможной в природе скоростью в виде электромагнитных волн излучения.

2. Электромагнитное поле проявляется по действию на электрические заряды, но существует *объективно*.

3. Все встречающиеся в природе проявления электромагнитных взаимодействий тесно связаны с тем фактом, что некоторым элементарным частицам вещества присуще особое фундаментальное свойство – электрический заряд. Элементарный электрический заряд обладает свойствами *квантованности, двузначности, инвариантности и сохраняемости* (см. 9.2.2).

4. Заряды и токи в макроскопических телах обусловлены присутствием и движением электронов или других заряженных частиц. Любое макроскопическое электромагнитное поле есть результат суперпозиции микроскопических полей элементарных зарядов.

5. Основные законы движения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) инвариантны относительно преобразований Лоренца. В то же время сами компоненты поля преобразуются при изменении системы отсчета. Вообще разделение поля на электрическую и магнитную части является условным.

### 11.1. Электрическое поле. Электрическая сила

Для выбора модели электромагнитного поля нужно сконструировать (основываясь на данных опыта) такие физические величины, задание которых однозначно определяло бы свойства поля. Электромагнитное поле проявляет себя, действуя с определенной силой на помещенные в него заряды. Посмотрим, через какие характеристики поля и заряда можно выразить эту силу. Заряд, с помощью которого изучаются свойства поля, называется *пробным*.

Опыт показывает, что в любом электромагнитное поле сила, действующая на неподвижный заряд, зависит только от величины заряда и его местоположения в поле, причем всегда

$$F \sim Q. \quad (11.1)$$

Воздействие этого типа легко описать, если каждой точке поля поставить в соответствие такой вектор  $\vec{E}$ , который служил бы коэффициентом пропорциональности в формуле (11.1). Тогда, если задано поле  $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z)$  или  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ , то тем самым определена и сила, с которой поле действует на помещенный в любую его точку заряд.

Сила, действующая на неподвижный заряд, называется *электрической силой*  $\vec{F}_3$ .

Векторная физическая величина  $\vec{E}$ , характеризующая то состояние поля, которое обуславливает действие  $\vec{F}_3$ , называется *электрической напряженностью* электромагнитного поля. Таким образом, электрическая сила, действующая, например, со стороны заряда  $Q_1$  на заряд  $Q_2$ , равна

$$\vec{F}_3^{1 \rightarrow 2} = Q_2 \vec{E}_1, \quad (11.2)$$

где  $\vec{E}_1$  – напряженность электрического поля, созданного зарядом  $Q_1$ .

## 11.2. Электростатическое поле неподвижного точечного заряда

Электрическое поле *неподвижного* точечного заряда называется *кулоновским* и является *статическим* и сферически симметричным.

Напряженность электрического поля неподвижного точечного заряда

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{Q}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (11.3)$$

где заряд  $Q$  – источник поля.

Зависимость  $E(r)$  представлена на рис. 11.1.

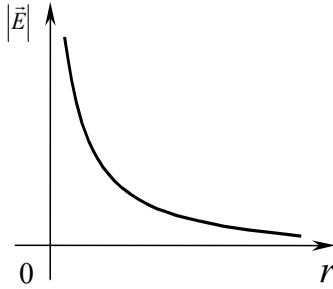


Рис. 11.1. Зависимость модуля вектора напряженности электрического поля точечного заряда от расстояния

Картины линий напряженности («силовых линий») электрического поля точечных зарядов даны на рис. 9.4 и 9.5.

Силовая (векторная) характеристика электрического поля  $\vec{E}$  и энергетическая (скалярная) характеристика поля  $\varphi$  связаны друг с другом соотношением (см. табл. 9.1):

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi,$$

где  $\text{grad}\varphi$  (градиент потенциала) – вектор, направленный в сторону быстрого увеличения потенциала поля (рис. 11.2, а и б).

*Пример расчета потенциала электрического поля точечного заряда.*

На основе взаимосвязи напряженности и потенциала  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  получаем

$$\left. \begin{aligned} \partial\varphi &= -E_r \partial r, \\ \int \partial\varphi &= -\int k \frac{Q}{r^2} \partial r, \\ \varphi &= k \frac{Q}{r} + C. \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Если считать, что  $\varphi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , тогда  $C = 0$ . Следовательно, потенциал поля точечного заряда  $Q$

$$\varphi = k \frac{Q}{\epsilon r}, \quad (11.5)$$

где заряд  $Q$  может быть положительным ( $Q > 0$ ) и отрицательным ( $Q < 0$ ).

Зависимости  $\varphi(r)$  представлены на рис. 11.2, *a* и *б*.

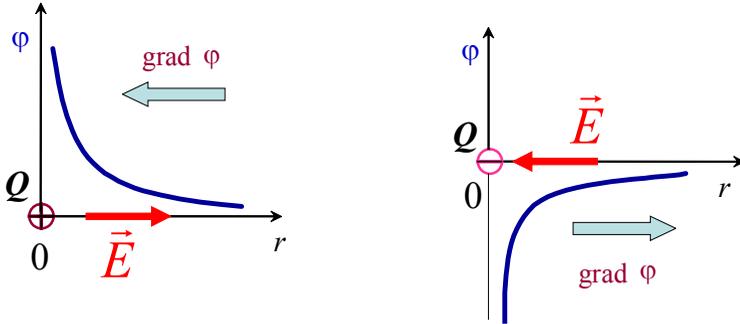


Рис. 11.2. Зависимость потенциала поля от расстояния:  
*a* – для положительного заряда; *б* – для отрицательного заряда

Электрическое поле может быть представлено не только картиной силовых линий, но и картиной *экипотенциальных поверхностей*. Экипотенциальная поверхность (*поверхность равного потенциала*) есть воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Экипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля. Однако целесообразно проводить поверхности так, чтобы разность потенциалов между соседними поверхностями была всюду одна и та же ( $\partial\varphi = \text{const}$ ). Тогда по густоте экипотенциальных поверхностей можно судить о модуле напряженности поля – там, где поверхности гуще, потенциал изменяется вдоль линии поля быстрее и следовательно, напряженность поля больше; там, где поверхности реже, напряженность поля меньше.

На рис. 11.3 представлена картина экипотенциальных поверхностей поля положительного точечного заряда (слева). Для сопоставления с ней на том же рисунке дана картина силовых линий поля того же заряда (справа). Густота экипотенциальных поверхностей и густота силовых линий уменьшаются в удалении от заряда, что соответствует приведенным на том же рисунке зависимостям потенциала и модуля вектора напряженности от расстояния до заряда.

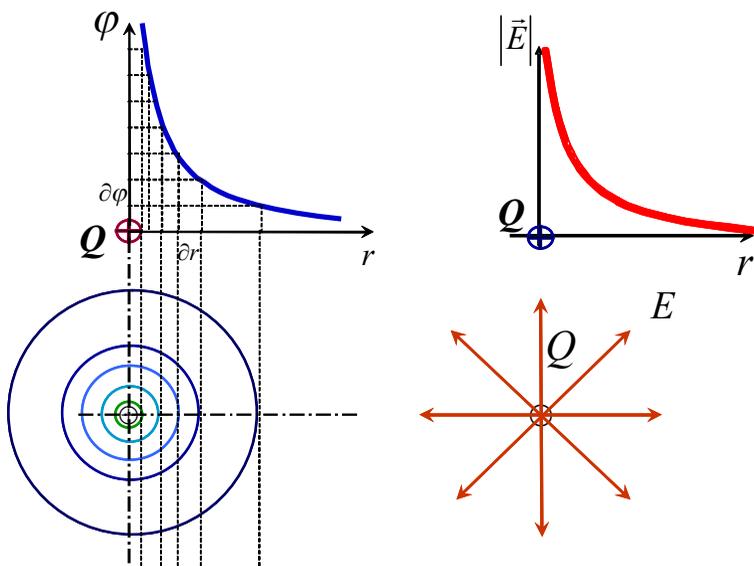


Рис. 11.3. Электростатическое поле положительного заряда:  
 $a$  – эквипотенциальные поверхности;  $b$  – силовые линии

### 11.3. Взаимодействие неподвижных точечных зарядов. Закон Кулона. Потенциальная энергия

Формулу (11.2) для электрической силы, действующей между двумя *точечными* зарядами можно записать в виде

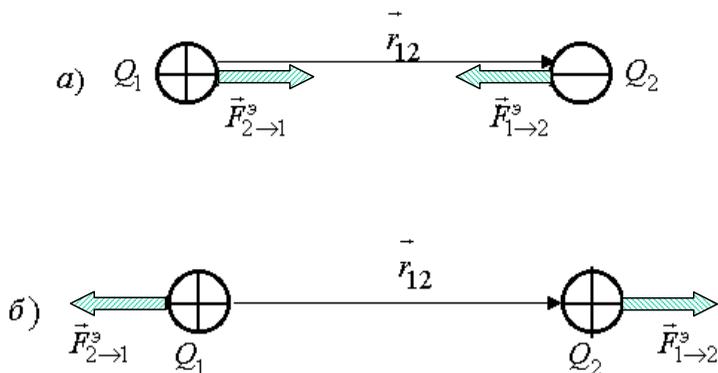


Рис. 11.4. Электрическое взаимодействие точечных зарядов:  
 $a$  – разноименных (*притяжение*);  $b$  – одноименных (*отталкивание*)

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = k \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad (11.6)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  – алгебраические величины (см. 9.2.2).

Формула (11.6) выражает закон Кулона – электрическую силу взаимодействия двух точечных зарядов (этот закон по форме аналогичен закону всемирного тяготения – см. 10.4). Электрическая сила, действующая со стороны заряда 1 на заряд 2,  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \parallel -\vec{r}_{12}$  в случае притяжения разноименных зарядов (рис. 11.4, а); электрическая сила, действующая со стороны заряда 1 на заряд 2,  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \parallel \vec{r}_{12}$  в случае отталкивания одноименных зарядов (рис. 11.4, б).

Скалярной характеристикой взаимодействия в электрическом поле является *потенциальная энергия*, величина которой может быть получена на основе взаимосвязи силы и потенциальной энергии (10.9).

Тогда, например, потенциальная энергия взаимодействия (*отталкивания*) двух одноименных точечных зарядов будет равна

$$U_{1 \rightarrow 2} = Q_2 \phi_1 = k \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon r_{12}}, \quad (11.7)$$

а потенциальная энергия взаимодействия (*притяжения*) двух разноименных точечных зарядов будет равна

$$U_{1 \rightarrow 2} = (-|Q_2|) \phi_1 = k \frac{Q_1 (-|Q_2|)}{\epsilon r_{12}}. \quad (11.8)$$

### Пример 1.

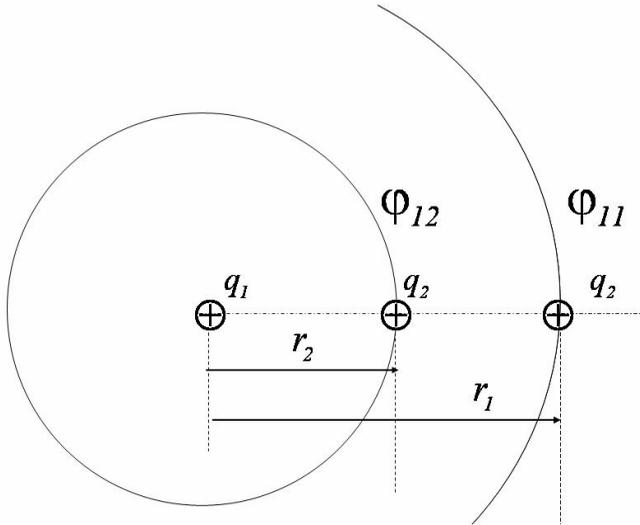
Рассчитаем изменение потенциальной энергии системы двух разноименных точечных зарядов, например, при их разделении в пространстве.

Поскольку - по определению (см.4.18) – работа равна изменению потенциальной энергии, взятому с обратным знаком,

$$A = -\Delta U,$$

вычислим работу внешних сил, направленную на разделение этих разноименных зарядов.

Пусть два шарика с зарядами  $q_1$  и  $q_2$  находятся в вакууме на расстоянии  $r_1$  друг от друга (рис.11.5). Какую надо совершить работу, чтобы **развести** их до расстояния  $r_2$ ?



**Рис. 11.5.** На рисунке показаны начальное и конечное положения заряда  $q_2$  в поле, созданном зарядом  $q_1$ . Представлены фрагменты эквипотенциальных поверхностей  $\varphi_{11}$  и  $\varphi_{12}$  поля первого заряда в точках, расположенных на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от первого заряда

**Проведем расчет изменения потенциальной энергии системы двух зарядов:**

$$A_{\text{внеш}} = -\Delta U = -q_2(\varphi_{12} - \varphi_{11}) = kq_2 \left( \frac{q_1}{r_2} - \frac{q_1}{r_1} \right) = -kq_1q_2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) < 0. \quad (11.9)$$

Как и следовало ожидать, работа внешних сил по разделению в пространстве разноимённых зарядов привела к увеличению потенциальной энергии системы.

### Пример 2.

Вычислим работу электрической (кулоновской) силы по перемещению точечного заряда  $q$  в однородном электростатическом поле.

Работа кулоновской силы (рис.11.6) может быть рассчитана так:

$$A = \int_H^K (\vec{F}, d\vec{S}) = \int_H^K (q\vec{E}_{\text{кулон}}, d\vec{S}) = \int_H^K qE_{\text{кулон}} \cdot dS_{q\vec{E}}, \quad (11.10)$$

где  $dS_{q\vec{E}} = -dy$  есть проекция вектора элементарного перемещения на направление электростатической силы  $q\vec{E}$ .

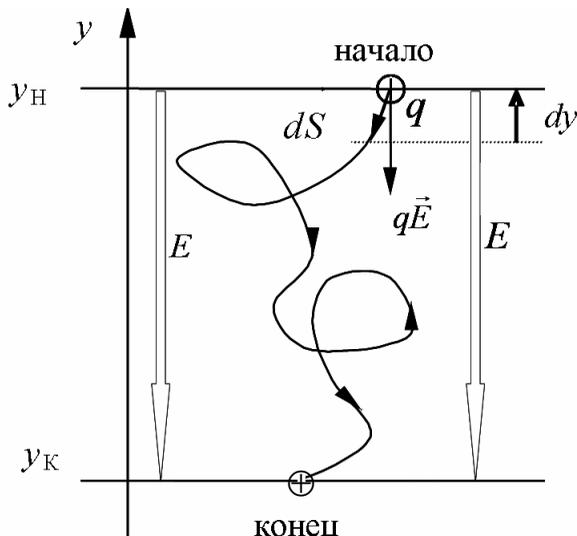


Рис. 11.6. Движение заряда в однородном электростатическом поле

$$A = -\int_H^K qE_{\text{кулон}} \cdot dy = qE_{\text{кулон}} \cdot (y_H - y_K) = U_H - U_K > 0. \quad (11.11)$$

Как и следовало ожидать, работа внутренней силы (силы поля) привела к уменьшению потенциальной энергии системы.

В случае движения заряда по замкнутому контуру (пути)  $L$  работа кулоновской силы (как и любой *потенциальной* силы) будет равна нулю:

$$A_{\text{кулон}} = \oint_L (\vec{E}_{\text{кулон}} d\vec{\ell}) = 0, \quad (11.12)$$

где  $d\vec{l}$  - есть произведение элемента длины контура на тангенциальный орт  $\vec{\tau}$ .

#### 11.4. Электрическое поле движущегося точечного заряда

Напряженность поля точечного заряда, движущегося в веществе со скоростью  $\vec{v} = \text{const}$  (рис. 11.7)

$$\vec{E} = k \frac{Q(1-\beta^2)}{\varepsilon(1-\beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (11.13)$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$ .

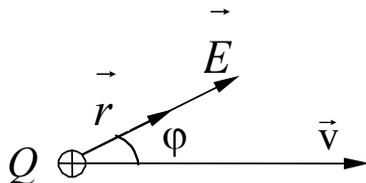


Рис. 11.7. К расчету электрического поля движущегося заряда

При  $\beta \rightarrow 0$

$$|\vec{E}| \rightarrow |\vec{E}_k|,$$

т.е. поле – кулоновское, сферически симметричное (см. рис. 9.4, 9.5).

При  $\beta \rightarrow 1$  поле уже не является сферически симметричным (рис. 11.8):

– вдоль направления движения заряда  $E = \frac{1}{\gamma^2} E_k$ , где  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,

т. е.  $E < E_k$ ;

– в направлении перпендикулярном направлению движения заряда

$E = \gamma E_k$ , т.е.  $E > E_k$ .

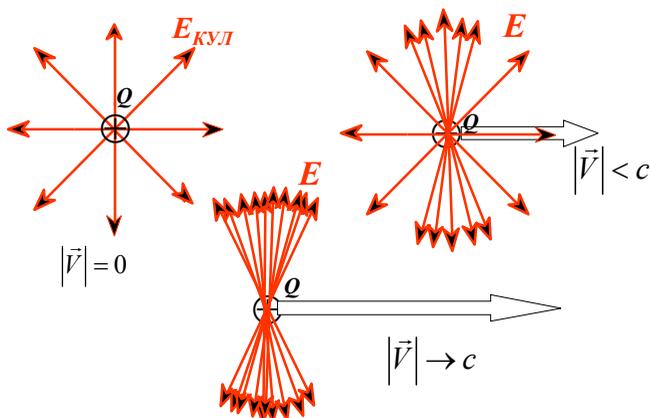


Рис. 11.8. Электрическое поле движущегося положительного точечного заряда

### 11.5. Относительный характер компонент электромагнитного поля. Магнитное поле. Магнитная сила. Электромагнитная сила Лоренца

Дальнейшие опыты с пробными зарядами показывают однако, что вектор электрической напряженности  $\vec{E}$  не характеризует состояние электромагнитного поля *исчерпывающим* образом. Действительно, если начать двигать пробный заряд, то обнаружим некоторую добавочную к (11.2) силу, величина и направление которой в общем случае оказываются никак не связанными с  $\vec{E}$ . Из этого следует, что для однозначного описания состояния электромагнитного поля нужно задать кроме  $\vec{E}$  еще какие-то другие параметры; сколько и какие – на это может дать ответ только опыт.

Рассмотрим положительный точечный заряд  $Q$  как *источник* электрического поля и положительный точечный заряд  $q$  как *пробный* заряд.

**Пример 1.** Свяжем с зарядом  $Q$  ИСО  $\boxed{K'}$ , т.е. в этой ИСО заряд  $Q$  неподвижен (рис. 11.9).

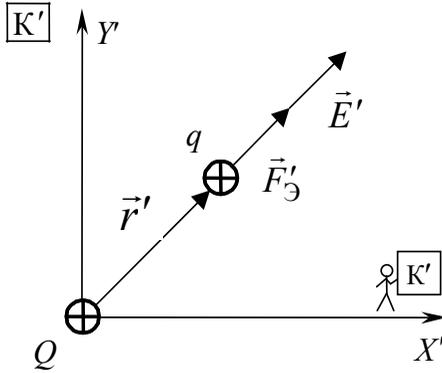


Рис. 11.9. Электрическая сила, действующая на пробный заряд  $q$  в ИСО  $\boxed{K'}$

С точки зрения наблюдателя в ИСО  $\boxed{K'}$  заряд  $Q$  в вакууме создает только электрическое поле  $\vec{E}' = k \frac{Q\vec{r}'}{(r')^3}$  и действует на пробный заряд  $q$  (который может быть и движущимся, и неподвижным) только электрической силой  $\vec{F}'_Э = q\vec{E}'$ .

**Пример 2.** С точки зрения наблюдателя в ИСО  $\boxed{K}$  заряд  $Q$  движется в ИСО  $\boxed{K}$  со скоростью  $\vec{v}$  (рис. 11.10), создает электрическое поле  $\vec{E}$  и действует на пробный заряд  $q$  электрической силой<sup>1</sup>  $\vec{F}_Э = q\vec{E}$ .

<sup>1</sup> Электрическое поле движущегося заряда – см. 11.3.

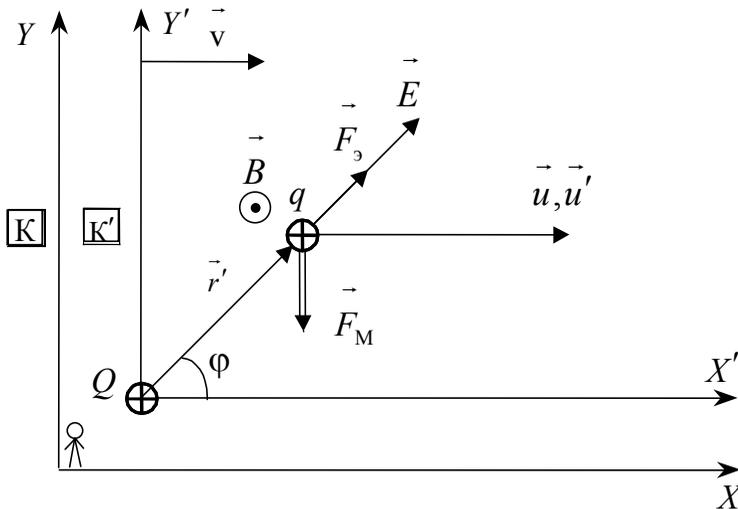


Рис. 11.10. Силы, действующие на пробный заряд  $q$  в ИСО  $\boxed{K}$

Так как  $\vec{v} \neq 0$ , то  $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} \neq 0$  вне зависимости от того, движется ли заряд  $q$  в ИСО  $\boxed{K'}$  ( $\vec{u}' \neq 0$ ) или не движется ( $\vec{u}' = 0$ ). Поэтому в ИСО  $\boxed{K}$ , с точки зрения наблюдателя  $\boxed{K}$  пробный заряд  $q$  в любом случае является движущимся ( $\vec{u} \neq 0$ ) и тогда оказывается, что на него действует дополнительная сила, которую называют *магнитной* ( $\vec{F}_M$ ) и которая пропорциональна величине заряда  $q$  и скорости  $\vec{u}$

$$|\vec{F}_M| \sim q|\vec{u}| \quad (11.13)$$

и перпендикулярна вектору скорости:  $(\vec{F}_M \perp \vec{u})$ .

Казалось бы, по аналогии с  $\vec{E}$  можно ввести еще один вектор, величина которого была бы коэффициентом пропорциональности в (11.13), а направление совпадало с направлением  $\vec{F}_M$ . Но этого сделать нельзя: такой вектор, заданный в какой-либо точке поля, не определял бы  $\vec{F}_M$  однозначно, так как последняя зависит еще от направления скорости движения заряда.

Более подробно поведение магнитной силы выглядит так, как показано на рис. 11.11.

Если двигать пробный заряд через какую-нибудь фиксированную точку поля с одной и той же скоростью поочередно в разных направлениях, то каждый раз мы будем получать, вообще говоря, значения  $\vec{F}_M$ , отличающиеся друг от друга и величиной, и направлением, причем всегда  $\vec{F}_M \perp \vec{v}$ . Таким образом, одной ж той же точке поля при фиксированных  $q$  и  $\vec{v}$  соответствует бесконечное множество возможных значений  $\vec{F}_M$ . Что же касается ее возможных направлений, то ни одно из них, а их тоже бесконечное множество, не является сколько-нибудь выделенным, чтобы по этому направлению задать искомым «магнитный вектор». Ситуация, как видим, гораздо сложнее, чем при нахождении  $\vec{E}$ , причем ясно, что усложнение вызвано зависимостью  $\vec{F}_M$  от скорости заряда. Возникает даже сомнение, можно ли вообще сконструировать такой вектор, чтобы он однозначно характеризовал появление той или иной магнитной силы в зависимости от условий движения заряда. Внимательный анализ опытных данных показывает, что это все же можно сделать, притом единственным образом. Оказывается, для каждой точки электромагнитного поля существует свое единственное физически выделенное направление, обладающее следующими свойствами:

1. Если двигать заряд по этому направлению с любой скоростью, то  $\vec{F}_M = 0$ .

2. Если скорость заряда составляет некоторый угол  $\varphi$  с этим направлением, то модуль  $|\vec{F}_M|$  пропорционален синусу этого угла.

3. При всевозможных движениях пробного заряда сила  $\vec{F}_M$  всегда перпендикулярна этому выделенному направлению. Итак, согласно опыту магнитная сила равна

$$\vec{F}_M = q[\vec{u}, \vec{B}], \quad (11.14)$$

а ее абсолютная величина равна

$$|\vec{F}_M| = quB \sin \varphi, \quad (11.15)$$

где  $\varphi - (\vec{u} \wedge \vec{B})$  – угол между векторами  $\vec{u}$  и  $\vec{B}$ .

Если  $\vec{u}' = 0$ , то  $\vec{u} \equiv \vec{v}$  и магнитная сила (рис. 11.11) будет равна

$$\vec{F}_M = q[\vec{v}\vec{B}] \quad (11.16)$$

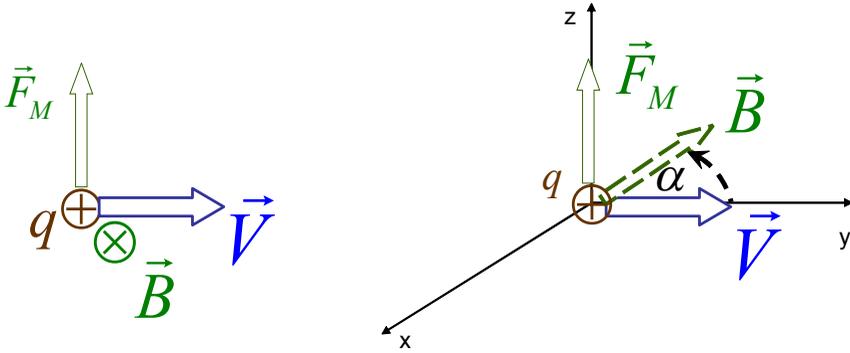


Рис. 11.11. Магнитная сила

Теперь уже нетрудно догадаться, что вектор  $\vec{B}$ , являющийся коэффициентом пропорциональности в (11.14 – 11.16), есть искомый магнитный вектор поля в данной точке. Действительно, задание  $\vec{B}$  в каждой точке пространства (наряду с заданием  $q$  и  $\vec{v}$ ) однозначно характеризует то состояние электромагнитного поля, которое обуславливает появление  $\vec{F}_M$ .

Этот вектор называется *магнитной индукцией* электромагнитного поля  $\vec{B}$ .

Правильнее его было бы назвать, по аналогии с вектором  $\vec{E}$ , *напряженностью* магнитного поля, но вследствие исторических причин сохранился старый термин – «*магнитная индукция*».

Электрическая и магнитная силы составляют полную силу, действующую на заряд в произвольном электромагнитное поле (рис. 11.12):

$$\vec{F}_M = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (11.17)$$

Эту силу, как известно, принято называть *электромагнитной силой Лоренца*.

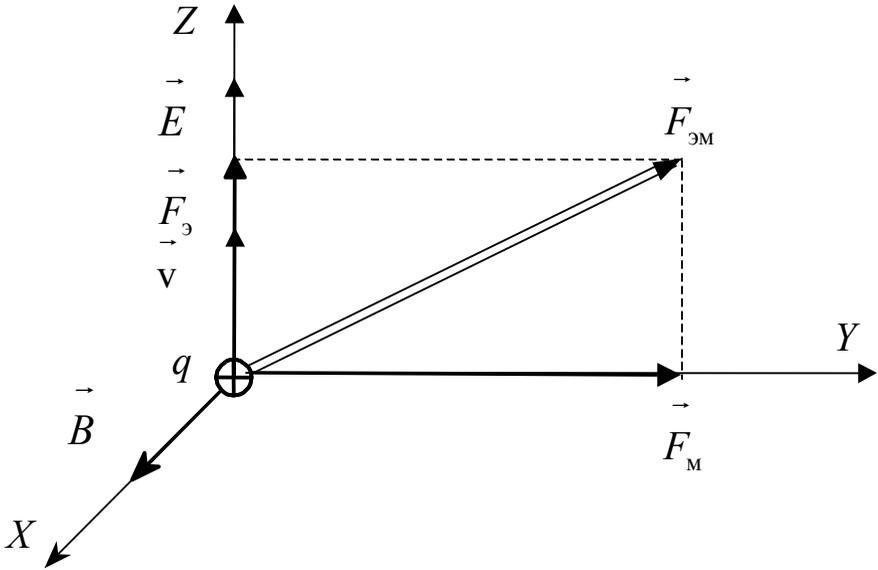


Рис. 11.12. Сила Лоренца, действующая на движущийся заряд  $q$  в электромагнитном поле

Нахождением  $\vec{B}$  завершается построение физической модели электромагнитного поля.

Таковой моделью оказалась *двухвекторная* модель, в которой векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  определяются по (11.2) и (11.18). Интересно заметить, что беря за основу силовое воздействие электромагнитного поля на заряды, можно было априори ожидать, что поскольку сила есть вектор, то и модель поля будет простой векторной моделью. Однако действительность оказалась вдвое «богаче» нашей интуиции: состояние электромагнитного поля в каждой его точке описывается не одним, а *двумя* разными векторами. Это убедительно подтверждает общую мысль о том, что никакая априорная математическая модель сама по себе не представляет еще реальное физическое поле. Ответ на вопрос об истинной структуре поля можно получить лишь из экспериментального изучения его свойств. Итак, совокупность экспериментов с пробными зарядами приводит к выводу, что любое электромагнитное поле может быть описано одновременным заданием поля вектора электрической напряженности  $\vec{E}$  и вектора магнитной

индукции  $\vec{B}$ . Для краткости говорят о задании электрического и магнитного полей соответственно.

Связь между компонентами электромагнитного поля (рис. 11.13):

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}]. \quad (11.18)$$

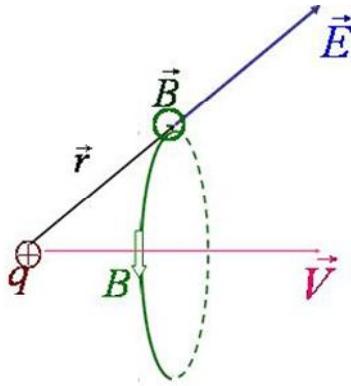


Рис. 11.13. Возникновение магнитной составляющей электромагнитного поля движущегося заряда

Разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное часто вызывает недоразумения. Применяя эту терминологию, нужно помнить, что в природе существует не смесь двух независимых полей, а одно поле – электромагнитное (дело, конечно не в названии, а в том, что это – единая сущность, а не два разных поля). Разделение его на части столь же условно, как разложение, например, вектора полной скорости тел на составляющие.

В строгом смысле, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  – т.е. шестерка чисел  $\{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$  – должны рассматриваться как равноправные компоненты единого электромагнитного поля, точнее говоря, как компоненты тензора электромагнитного поля, т.е. электромагнитное поле – двухкомпонентное поле  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ , но компонента  $\vec{B}$  носит *относительный* характер: магнитное поле существует и проявляется только в системе отсчета, относительно которой электрический заряд движется.

В частном случае может оказаться, что все  $E_i = 0$  или все  $B_i = 0$ , тогда поле сводится к чисто магнитному или к чисто электрическому полю. Сказанное о разделении полей относится и к силам  $\vec{F}_э$  и  $\vec{F}_м$ , поскольку они однозначно связаны с полями  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , а именно с полной силой  $\vec{F}_{эм}$ , но ее удобно представлять в виде суммы двух частей по формуле (11.10), в соответствии с выбранной моделью поля. Ясно, что это разделение условно в такой же мере, как и разделение самих полей.

В заключение сделаем еще следующие замечания:

1. При изучении электромагнитного поля величина заряда пробного тела должна быть достаточно малой. В противном случае собственное поле пробного заряда может заметно исказить исследуемое поле.

2. Все геометрические размеры пробного тела должны быть настолько малы, чтобы измеренные о его помощью  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  можно было сопоставить о какой-то определенной точке поля.

Ясно, что бесконечно малым реальное тело быть не может. Поэтому фактически всегда приходится делать некоторое усреднение поля по объему, занимаемому телом. Точечный заряд – это абстракция. Даже элементарные частицы имеют конечные размеры. Такой же абстракцией является и модель *непрерывного* поля. В действительности поле тоже дискретно, как и вещество. Однако это сказывается лишь на расстояниях, сравнимых с размерами элементарных частиц. (Теория электромагнитных явлений, использующая модель непрерывного поля, называется *классической* теорией, в отличие от *квантовой* теории, где учитывается дискретность электромагнитного поля.)

## Контрольные вопросы

1. В чем проявляется *относительный* характер компонент электромагнитного поля?

2. Неподвижные или движущиеся заряды являются источниками электрического поля? магнитного поля?

3. Какие поля называются электростатическими? Что такое напряженность электрического поля?

4. Какая сила – электрическая или магнитная – будет действовать в электромагнитном поле на заряд с точки зрения наблюдателя, относительно которого заряд движется?

5. Какая сила – электрическая или магнитная – будет действовать в электромагнитном поле на заряд с точки зрения наблюдателя, относительно которого заряд неподвижен?
6. Сформулируйте закон сохранения зарядов.
7. Как влияет диэлектрическая среда на взаимодействие помещенных в нее двух точечных зарядов?
8. Что такое электрическая постоянная и чему она равна в СИ?
9. Каково условие потенциальности силового поля? Докажите, что электростатическое поле является потенциальным.
10. Как связана работа перемещения заряда в электростатическом поле с напряженностью и потенциалом поля?
11. Какова связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля?
12. Чему равна работа электростатической (кулоновской) силы по перемещению заряда по замкнутому пути в однородном электростатическом поле?

## Глава 12. МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

### 12.1. Принцип суперпозиции полей

Вернемся к задаче изучения источников электромагнитного поля. Мы уже знаем, какое поле создает вокруг себя одиночный заряд. Теперь мы хотим найти способы расчета полей различных систем зарядов.

Можно ожидать, что поле системы есть результат сложения полей всех входящих в ее состав элементарных зарядов, но как эти поля складываются? Влияют ли они друг на друга, или каждый из зарядов системы вносит свой вклад в результирующее поле независимо от остальных?

Чтобы уяснить смысл этой проблемы, рассмотрим конкретную ситуацию. Пусть в нашем распоряжении имеются три точечных заряда  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ . (рис. 12.1). Для простоты будем считать их неподвижными.

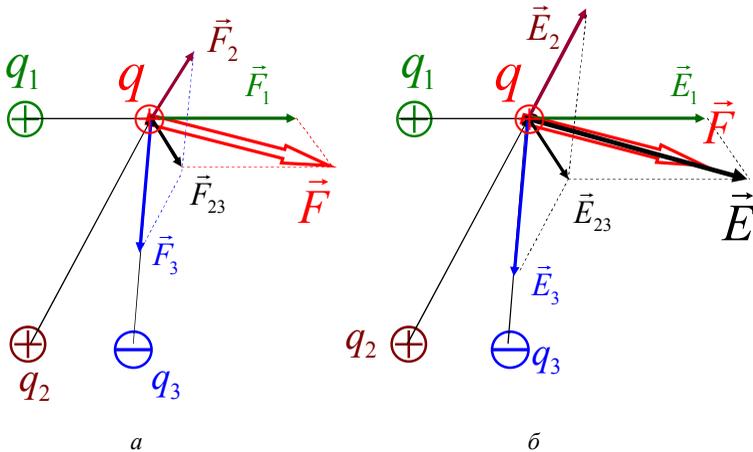


Рис. 12.1. Суперпозиция полей

Поместим пробный заряд  $q$  в произвольную точку поля, образованного вышеуказанными тремя зарядами. Найдем **воздействие** на него трех наших зарядов:

а) поочередное

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + q\vec{E}_3,$$

б) одновременное

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Оказывается,

$$\vec{F} = q\vec{E} = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + q\vec{E}_3. \quad (12.1)$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость следующего выражения:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3. \quad (12.2)$$

Опыт показывает, что по такому же принципу складываются поля движущихся зарядов, отдельно – электрические компоненты и отдельно – магнитные.

Этот опытный факт, будучи обобщен на системы с любым числом произвольно движущихся зарядов, носит название *принципа суперпозиции*. Сформулируем его еще раз в полном виде: электромагнитное поле произвольной системы зарядов есть результат сложения полей, которые создавались бы каждым из элементарных зарядов этой системы в отсутствие остальных. При этом компоненты результирующего поля находятся раздельным векторным сложением электрических и магнитных компонент исходных элементарных полей:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i, \quad \vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (12.3)$$

Принцип суперпозиции вместе с формулами поля точечного заряда позволяет свести проблему нахождения электромагнитных полей различных систем к чисто математической задаче вычисления сумм (см. выше). Зная величину, расположение и характер движения всех зарядов, входящих в состав системы, мы можем рассчитать ее поле, подставив в вышеприведенные формулы значения  $\vec{E}_i$  и  $\vec{B}_i$ , определяемые для каждого заряда в отдельности. Если распределение зарядов в системе можно считать непрерывным, то суммирование заменяется интегрированием

$$\vec{E} = \int d\vec{E}; \quad \vec{B} = \int d\vec{B}. \quad (12.4)$$

## 12.2. Структура векторных полей

Каждая из компонент электромагнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , будучи задана как функция координат, представляет собой в математическом отношении трехмерное векторное поле. Наглядное изображение этих полей дают карты векторных линий, которые часто называют силовыми линиями. Если поле зависит от времени, то карта силовых линий является как бы его мгновенной фотографией.

Нужно помнить, что в магнитном поле, в отличие от электрического, направление силовых линий отнюдь не указывает направление силы, действующей на пробный заряд. Этот термин – силовые линии – применяется в случае магнитного поля только из соображений «единообразия» с электрическим полем.

Поля могут иметь замкнутые и незамкнутые силовые линии, могут отличаться густотой силовых линий, их формой, степенью закрученности и т.п.

Чтобы как-то классифицировать встречающиеся виды полей, приходится изобретать специальные математические конструкции. Некоторые из них кажутся с первого взгляда довольно сложными и чересчур абстрактными. Как всегда, целесообразность введения новых понятий и величин выясняется лишь при дальнейшем их использовании. Исторически появлением этих понятий мы обязаны интуиции тех, кто смог увидеть за громоздкими формулами глубокий физический смысл.

Для описания общей структуры векторных полей вводятся следующие величины: **интегральные** – *поток* и *циркуляция*, **дифференциальные** – *дивергенция* и *ротор*. Эти величины применяются не только к электромагнитному полю, но и к другим векторным полям. В частности, впервые они появились в гидродинамике, где с их помощью изучается поле скоростей отдельных частиц текущей жидкости. Там эти величины приобретают особую наглядность, в связи с чем мы часто будем использовать гидродинамические аналогии.

## 12.3. Поток и дивергенция векторного поля

Введем понятие элементарного потока вектора  $\vec{E}$  через площадку  $d\vec{S}$ :

$$d\Phi_{\vec{E}} = (\vec{E}, d\vec{S}), \quad (12.5)$$

где  $d\vec{S} = dS\vec{n}$ .

Тогда

$$d\Phi_E = E \cdot d\vec{S} \cos\varphi, E \cos\varphi = E_n, d\Phi_E = E_n dS. \quad (12.6)$$

Полный поток вектора  $\vec{E}$  через данную поверхность  $S$  (рис. 12.2) есть скалярная физическая величина, определяемая формулой

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_S E_n dS. \quad (12.7)$$

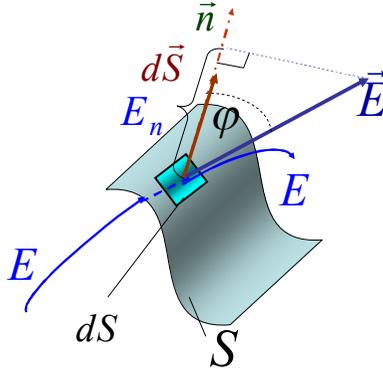


Рис. 12.2. К понятию потока вектора напряженности поля

Полный поток через замкнутую (*гауссову*) поверхность  $S$

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S E_n dS. \quad (12.8)$$

Аналогично определяется поток магнитного поля.

Выясним смысл понятия потока вектора напряженности  $\Phi_E$ . Для бесконечно малой плоской площадки  $dS$ , помещенной в поле, величина потока  $d\Phi_E$  зависит, очевидно, от густоты силовых линий в этом месте поля, от величины площадки и от ее ориентации относительно направления поля. Вспомним, что по условиям построения силовых линий поля их густота должна быть пропорциональна напряженности поля. Следовательно, величина  $d\Phi_E$  пропорциональна числу  $N$  силовых линий, проходящих сквозь  $dS$  и, очевидно, максимальна при  $\varphi = 0$ . Поэтому для поверхности конечных размеров и произвольной формы величина потока (12.8) отражает не полное число силовых линий, а разницу между числом силовых линий, проходящих в положительном и отрицательном направлениях.

*Гидродинамическая аналогия:* поток вектора скорости несжимаемой жидкости через воображаемую поверхность  $S$  пропорционален количеству жидкости, протекающему через эту поверхность в положительном направлении ее нормали за единицу времени. Отсюда и произошло название – «поток». Если поверхность замкнутая, то величина полного потока поля через нее приобретает новый смысл. Сравним картину силовых линий полей, изображенных на рис. 12.3. В поле на рис. 12.3, *a* силовые линии расходятся из некоторого центра, лежащего внутри  $S$ , поэтому почти всюду  $E_n > 0$  и  $\Phi_E > 0$ , в то время как для поля на рис. 12.3, *б*, очевидно,  $\Phi_E = 0$  (за положительное направление  $\vec{n}$  для замкнутых поверхностей всегда берут направление внешней нормали). Таким образом,  $\Phi_E$  характеризует то, что можно назвать степенью расходимости силовых линий поля в той области, где находится данная замкнутая поверхность. Расходимость отсутствует, если  $\Phi_E = 0$ , для сходящихся силовых линий (рис. 12.3, *в*)  $\Phi_E < 0$ .

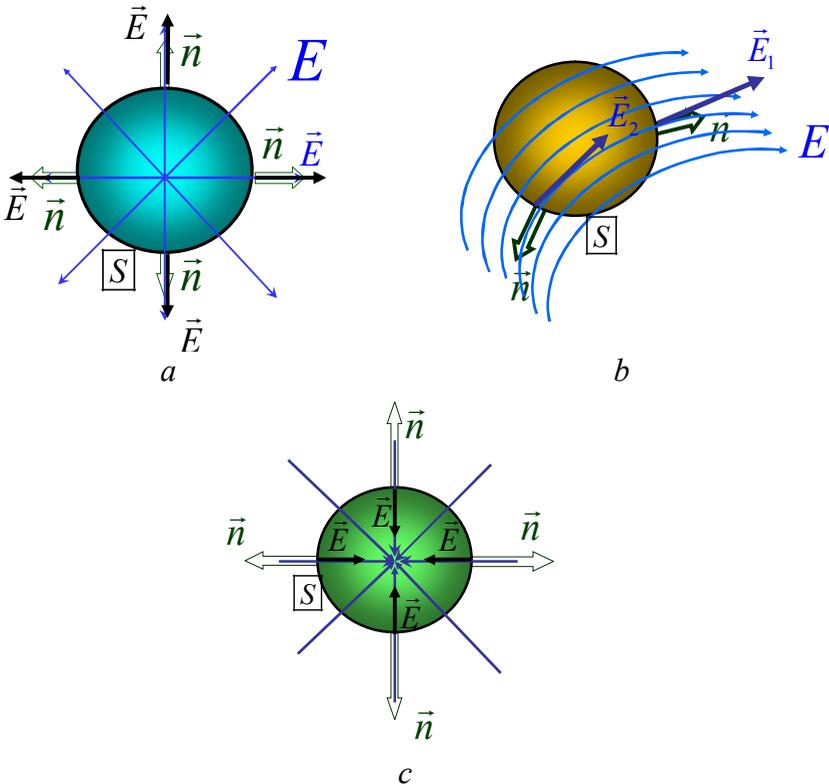


Рис. 12.3. Поток вектора  $\vec{E}$ :  $\mathbf{a} - \Phi_E > 0$ ;  $\mathbf{b} - \Phi_E = 0$ ;  $\mathbf{c} - \Phi_E < 0$

Точка, из которой выходят силовые линии как из центра, называется *источником* (*исток*) поля. В электрическом поле источниками служат положительные электрические заряды. Места схождения силовых линий называют отрицательными источниками, или стоками. В электрическом поле *стоками* служат отрицательные электрические заряды. Названия *сток* и *исток* опять-таки взяты из гидродинамики.

В электромагнитное поле, разумеется, ничего не течет, не истекает и не стекает, но гидродинамическая терминология все же применяется, как весьма наглядная.

### 12.3.1. Поток и дивергенция вектора $\vec{E}$ . Теорема Гаусса

*Поток вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$  (в системе СИ) и диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon$ :*

$$\oiint_S E_n dS = \begin{cases} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon} = 4\pi k \frac{Q}{\epsilon}, \text{ где } Q = \sum_{i=1}^n q_i \text{ — сумма зарядов внутри} \\ \text{поверхности } S; \\ = 0 \text{ — если внутри поверхности } S \text{ нет зарядов.} \end{cases} \quad (12.9)$$

При непрерывном распределении заряда

$$Q_{\text{внутр}} = \iiint_V \rho dV, \quad (12.10)$$

где  $V$  — объем внутри поверхности  $S$ .

Уравнение теоремы Гаусса в дифференциальной форме —

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}, \quad (12.11)$$

где

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\nabla \vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

– расходимость (дивергенция) вектора  $\vec{E}$ ;  $\rho$  – объемная плотность заряда.

Дивергенция вектора напряженности поля характеризует локальную степень расходимости силовых линий поля. Если  $\operatorname{div} \vec{E} > 0$ , то поле *расходящееся*, в противном случае – поле *сходящееся*.

З а м е ч а н и я :

1. Теорема Гаусса – это констатация факта существования электрических зарядов, а также того, что силовые линии электрического поля начинаются и кончаются на зарядах.

2. Теорема Гаусса – удобный и простой метод для вычисления электростатических полей.

### 12.3.2. Поток и дивергенция вектора $\vec{B}$

Поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность

$$\oiint_S B_n dS = 0. \quad (12.12)$$

В дифференциальной форме это уравнение выражается так:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (12.13)$$

где  $\operatorname{div} \vec{B} = (\nabla \vec{B})$  – расходимость (дивергенция) вектора  $\vec{B}$ .

Следовательно, магнитостатическое поле – вихревое непотенциальное и не имеет точечных источников.

Всюду ли  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ? Может быть, все-таки существуют *изолированные* северный и южный полюсы как *точечные источники расходящихся и сходящихся* магнитных полей? Высказывались предположения (П.А. Дирак), что пары магнитных полюсов могут возникать и разлетаться в ядерных взаимодействиях, происходящих при больших энергиях. Поиски таких частиц, названных *магнитными монополями* (*монополями Дирака*), пока оказываются безуспешными.

## 12.4. Циркуляция и ротор векторного поля

Метод определения полей систем движущихся зарядов или токов основан на введении математической характеристики векторных полей – циркуляции вектора ( $\vec{E}$  или  $\vec{B}$ ).

Элементарная циркуляция, например, вектора  $\vec{B}$  вдоль элемента контура  $d\ell$ :

$$dC_B = (\vec{B}, d\vec{\ell}) = B \cos \varphi d\ell = B_\tau d\ell,$$

где  $B_\tau$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на единичный касательный вектор  $\vec{\tau}$ .

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  вдоль контура  $L$  (рис. 12.4):

$$C_B = \int_L (B_\tau, d\ell). \quad (12.14)$$

где  $B_\tau$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на  $d\ell$  (рис. 12.4).

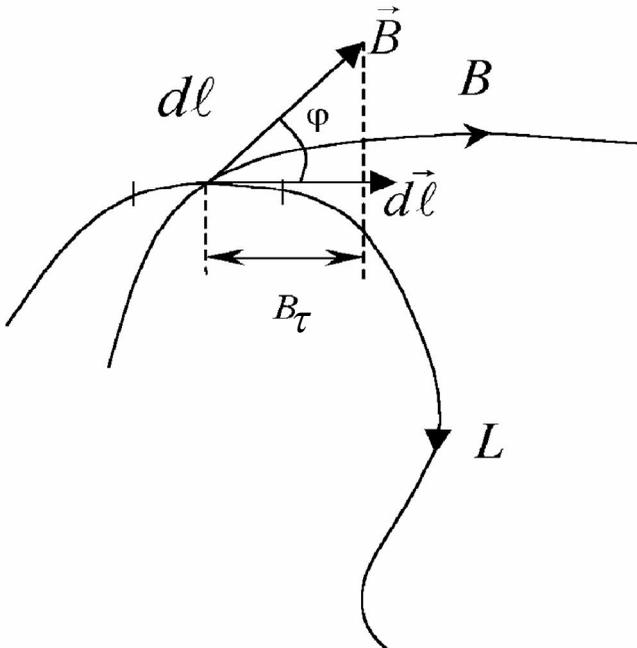


Рис. 12.4. К понятию циркуляции вектора  $\vec{B}$

Выберем контур, совпадающий с силовой линией магнитного поля. Тогда вектор  $\vec{B}$  совпадет по направлению с касательной *компонентой*  $d\vec{\ell}$  к контуру  $B_{\tau} = B = \text{const}$ .

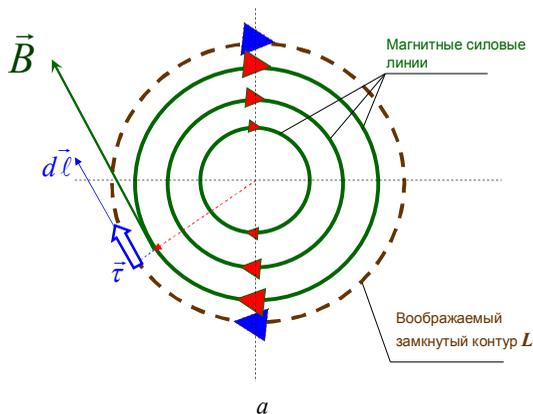
Нетрудно показать, что если контур не охватывает ток, то циркуляция вектора  $\vec{B}$  равна нулю.

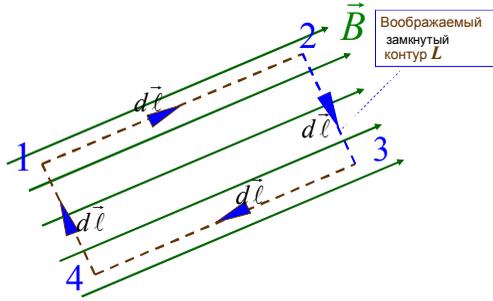
*Циркуляцией* векторного поля, например,  $\vec{B}$  вдоль какой-либо воображаемой замкнутой кривой  $L$  называется скалярная физическая величина, определяемая формулой:

$$C_B = \oint_L B_{\tau} d\ell, \quad (12.15)$$

Что характеризует циркуляция поля? Рассмотрим картину силовых линий полей на рис. 12.5. Во всех случаях источники отсутствуют. Но структура полей явно различна.

Поле на рис. 12.5, *a* имеет замкнутые силовые линии и при обходе контура  $L$  касательная составляющая поля  $B_{\tau}$  сохраняет знак и циркуляция  $C_B$  – положительна.





б

Рис. 12.5. Циркуляция вектора магнитной индукции:

$$a - C_B > 0; \quad б - C_B = 0$$

Для поля на рис. 12.5, б обход контура  $L$  дает на сторонах 1-4 и 2-3 прямоугольного контура нулевое значение интеграла (12.14), так как там

$$\begin{cases} \vec{B} \perp d\vec{\ell}, \\ B_{\phi} = 0, \end{cases}$$

а на двух других сторонах (1-2 и 3-4) абсолютные значения интегралов одинаковы, но имеют противоположные знаки:

$$\int_1^2 (B_{\tau}, d\ell) = - \int_3^4 (B_{\tau}, d\ell),$$

поскольку

$$\begin{cases} \vec{B} \parallel d\vec{\ell}^{(1-2)} \text{ и } \vec{B} \parallel -d\vec{\ell}^{(3-4)} \\ \sum (B_{\phi}^{(1-2)} + B_{\phi}^{(3-4)}) = 0 \end{cases}$$

В результате  $C_B = \oint_L B_{\tau} \cdot d\ell = 0$ .

*Гидродинамическая аналогия:* в поле скоростей циркуляция определяется характером течения жидкости. Если жидкость течет с завихрениями, образует водовороты, воронки и т.п., то  $C \neq 0$ .

Ограниченность гидродинамической аналогии в применении к электромагнитным полям очевидна: в поле ничто реально не циркулирует и не образует «водоворотов». Вместе с тем наглядный образ

циркуляции, как степени закрученности силовых линий поля, весьма полезен.

### 12.4.1. Циркуляция и ротор вектора $\vec{B}$ . Теорема о циркуляции

**Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$**  (закон Ампера – закон полного тока): циркуляция вектора  $\vec{B}$  вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, пронизывающих площадку  $S$ , ограниченную контуром  $L$ , умноженной на магнитную постоянную  $\mu_0$  (в СИ). (За положительное направление тока принимается направление, связанное с обходом контура по правилу правого винта):

$$\oint_L \vec{B}_\tau d\ell = \left\{ \begin{array}{l} = \mu_0 I, \text{ где } I = \sum_{n=1}^N i_n, \text{ } (i_n - \text{токи, пронизывающие} \\ \text{площадку, ограниченную контуром } L); \\ = 0 - \text{если токов } i_n, \text{ охватываемых контуром } L, \text{ нет.} \end{array} \right\} \quad (12.16)$$

В наиболее общем случае  $I = \oiint_S \vec{j}_n dS$ .

В дифференциальной форме теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  выражается так:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (12.17)$$

где  $\text{rot} \vec{B} = [\nabla \vec{B}]$  – вихрь (ротор) магнитного поля;

$\vec{j}$  – плотность тока.

Из теоремы о циркуляции в магнитостатике следует, что магнитное поле – *вихревое* и создается постоянными электрическими токами или движущимися зарядами. Направление закрученности силовых линий магнитного поля определяется направлением вектора  $\text{rot} \vec{B}$  (по правилу правого винта) (рис. 12.6).

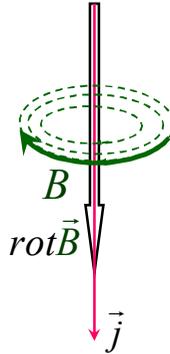


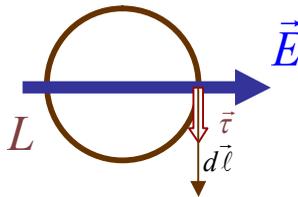
Рис. 12.6. К понятию ротора вектора  $\vec{B}$

Теорема о циркуляции имеет следующий физический смысл:

- 1) силовые линии магнитного поля замкнуты; магнитное поле носит вихревой характер (вихревое поле);
- 2) магнитное поле создается движущимися зарядами (токами);
- 3) теорема о циркуляции – метод расчета магнитных полей, создаваемых различными системами постоянных токов.

### 12.4.2. Циркуляция и ротор вектора $\vec{E}$

Для электростатического поля  $\vec{E}$  (рис.12.7)



циркуляция и ротор равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} C_E &= \oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) = \oint_L E_\tau \cdot d\ell = 0, \\ \text{rot} \vec{E} &= [\nabla \vec{E}] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$

что подтверждает потенциальный характер этого поля (силовые линии электростатического поля не замкнуты – либо расходятся, либо сходятся).

## Контрольные вопросы

1. В чем состоит принцип суперпозиции полей?
2. Может ли поток вектора  $B$  через замкнутую поверхность быть отличным от нуля?
3. Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура?
4. Какой знак имеет дивергенция вектора напряженности электростатического поля отрицательного заряда? положительного заряда?
5. В каком гипотетическом случае дивергенция вектора магнитной индукции может быть отлична от нуля?
6. Существует ли электрическое поле, ротор вектора напряженности которого отличен от нуля?

## Глава 13. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

### 13.1. Электростатическое поле точечного заряда

По теореме Гаусса

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S E_n dS = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (13.1)$$

Учитывая симметрию поля, в качестве гауссовой поверхности выбираем сферическую поверхность, центр которой совпадает с точечным зарядом (рис. 13.1).

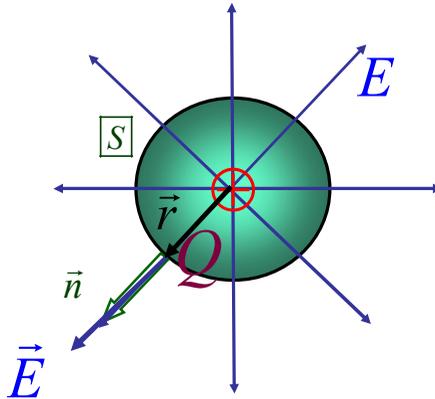


Рис. 13.1. К расчету поля точечного заряда

Поскольку  $\vec{E} \parallel \vec{r}$ , то  $E_n = E$ , а при фиксированном  $r \rightarrow E = \text{const}$ , тогда

$$\oiint_S E_n dS = E \oiint_S dS, \quad (13.2)$$

$$\oiint_S dS = 4\pi r^2, \quad (13.3)$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (13.4)$$

Следовательно, модуль вектора напряженности электростатического поля точечного заряда равен

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{kQ}{\epsilon r^2}. \quad (13.5)$$

### 13.2. Электростатическое поле равномерно заряженной сферы (или проводящего шара)

Учитывая симметрию поля, в качестве гауссовых поверхностей выбираем сферические поверхности, центры которых совпадают с центром сферы (шара) (рис. 13.2).

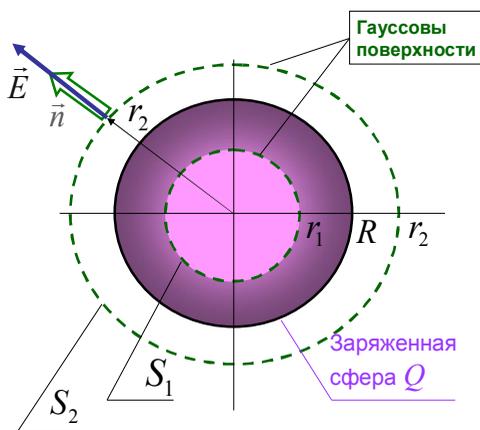


Рис. 13.2. К расчету поля сферы

Разобьем пространство на две области:

а)  $r_1 < R$  – внутри сферы  $S$ .

Внутри этой гауссовой поверхности зарядов нет ( $Q = 0$ ) и следовательно  $E = 0$ .

б)  $r_2 > R$  – вне сферы  $S$ .

Поскольку  $\vec{E} \parallel \vec{r}$ , то  $E_n = E$ , а при фиксированном  $r \rightarrow E = \text{const}$ , тогда

$$\oiint_S E_n dS = E \oiint_S dS = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (13.6)$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (13.7)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}, \quad (13.8)$$

где

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{Q}{S} = \text{const} \quad (13.9)$$

– поверхностная плотность заряда.

Модуль вектора напряженности электростатического поля заряженной сферы (рис. 13.3) равен

$$E = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \text{ если } r \geq R. \end{array} \right\} \quad (13.10)$$

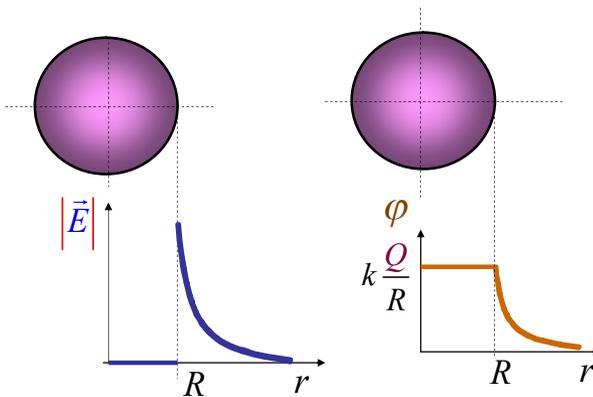


Рис. 13.3. Зависимость потенциала и модуля вектора напряженности поля заряженной сферы от расстояния до центра сферы

### **Расчет потенциала поля заряженной сферы:**

$$\boxed{r > R} \quad E = k \frac{Q}{r^2}; \quad \text{grad}\varphi = -k \frac{Q}{r^2}; \quad \varphi = k \frac{Q}{r};$$

$$r = R \rightarrow \varphi = k \frac{Q}{R}.$$

$$\boxed{r < R} \quad E = 0; \quad \text{grad}\varphi = 0; \quad \varphi = \text{const}.$$

### 13.3. Электростатическое поле равномерно заряженного непроводящего шара

Учитывая симметрию поля, в качестве гауссовых поверхностей выбираем сферические гауссовы поверхности, центры которых совпадают с центром шара (рис. 13.4 и 13.5): радиус внутренней гауссовой сферы  $r_1$ , радиус внешней гауссовой сферы  $r_2$ .

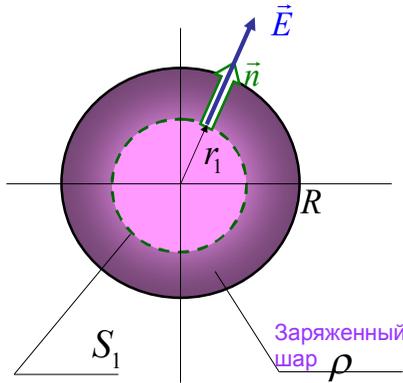


Рис. 13.4. К расчету напряженности поля внутри шара

Поскольку  $E = E(r)$ , то  $E_n = E$ , а при фиксированном  $r \rightarrow E = \text{const}$ , тогда

Напряженность поля внутри ( $r_1 < R$ ) и снаружи ( $r_2 > R$ ) непроводящего шара:

а)  $r_1 < R$

$$\oiint_S E_n dS = E \oiint_S dS = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}, \quad (13.11)$$

где  $q$  – заряд в объеме  $V_1$ , ограниченном поверхностью  $S_1$ ,  
 $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость вещества шара.

$$q = \iiint_{V_1} \rho dV = \rho \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (13.12)$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon \epsilon_0} r, \quad (13.13)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда:

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{Q}{V} = \text{const.} \quad (13.14)$$

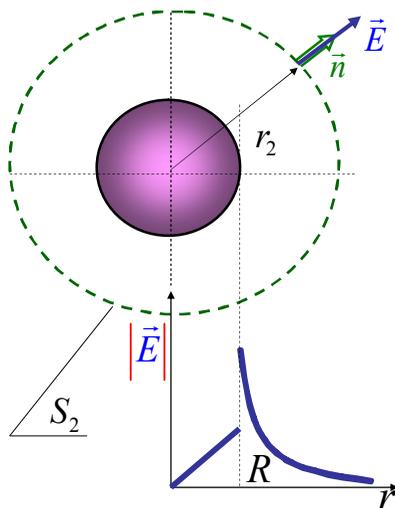


Рис. 13.5. К расчету напряженности поля вне шара. График зависимости модуля вектора напряженности поля шара от расстояния до центра шара

б)  $r_2 > R$  (шар находится в вакууме)

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (13.15)$$

где  $Q$  – заряд данного шара.

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (13.16)$$

Модуль вектора напряженности поля непроводящего заряженного шара:

$$E = \left\{ \begin{array}{l} \frac{Q}{3\epsilon\epsilon_0} r, \text{ если } r \leq R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ если } r \geq R. \end{array} \right\} \quad (13.17)$$

### 13.4. Электростатическое поле равномерно заряженной бесконечно длинной нити

Учитывая осевую симметрию поля нити, что определяется с помощью метода суперпозиции (рис. 13.6), в качестве гауссовой поверхности выбираем цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с нитью (рис. 13.7). Радиус цилиндра –  $r$ . Высота цилиндра –  $\ell$ .

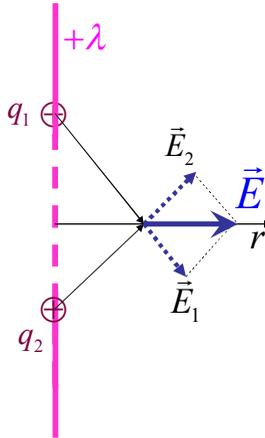


Рис. 13.6. К определению осевой симметрии поля нити

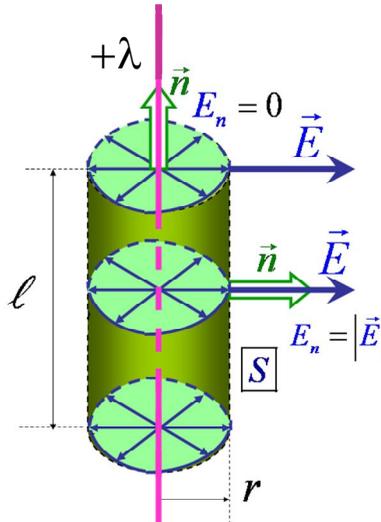


Рис. 13.7. К расчету поля нити

Полный поток вектора  $\vec{E}$ , проходящий через цилиндрическую поверхность, можно представить как сумму потоков через основания и через боковую поверхность:

$$\oiint_S E_n dS = \iint_{\text{осн}} E_n dS + \iint_{\text{бок}} E_n dS. \quad (13.18)$$

Поток вектора  $\vec{E}$  через основания цилиндра равен

$$\iint_{\text{осн}} E_n dS = 0, \quad (13.19)$$

так как  $\vec{E} \perp \vec{n}$ .

Поток вектора  $\vec{E}$ , проходящий через боковую поверхность цилиндра, равен

$$\iint_{\text{бок}} E_n dS = E \iint_{\text{бок}} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (13.20)$$

где  $Q$  – заряд нити;  $E_n = E$ , поскольку  $\vec{E} \parallel \vec{r}$ , а при фиксированном  $r \rightarrow E = \text{const}$ .

Площадь боковой поверхности цилиндра

$$\iint_{\text{бок}} dS = 2\pi r \ell. \quad (13.21)$$

Таким образом,

$$E \cdot 2\pi r \ell = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}, \quad (13.22)$$

где  $\lambda$  – линейная плотность заряда:

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} = \frac{Q}{\ell}. \quad (13.23)$$

Модуль вектора напряженности электростатического поля нити равен

$$E = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} = k \frac{2\lambda}{r}. \quad (13.24)$$

### 13.5. Электростатическое поле равномерно заряженной плоскости

Учитывая симметрию поля плоскости, что определяется с помощью метода суперпозиции (рис. 13.8), в качестве гауссовой поверхности выбираем любую замкнутую поверхность, например, поверхность цилиндра, перпендикулярного заряженной плоскости (рис. 13.9).

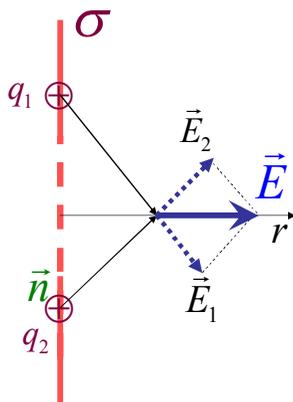


Рис. 13.8. К определению симметрии поля плоскости

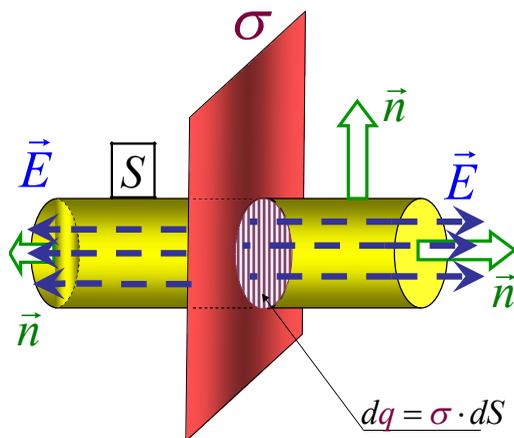


Рис. 13.9. К расчету поля плоскости

Полный поток вектора  $\vec{E}$  через гауссову поверхность можно представить как сумму потоков через основания и через боковую поверхность:

$$\oiint_S E_n dS = \iint_{\text{осн}} E_n dS + \iint_{\text{бок}} E_n dS. \quad (13.25)$$

Поток вектора  $\vec{E}$  через боковую поверхность равен нулю, так как  $\vec{E} \perp \vec{n}$ .

Поток вектора  $\vec{E}$  через оба основания **цилиндра** равен

$$2E \iint_{S_{\text{осн}}} dS = 2ES_{\text{осн}}, \quad (13.26)$$

так как  $E_n = E$ , поскольку  $\vec{E} \parallel \vec{n}$ .

Тогда

$$2ES_{\text{осн}} = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (13.27)$$

где  $Q$  – заряд плоскости;  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда.

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{Q}{S} = \text{const}. \quad (13.28)$$

Модуль вектора напряженности электростатического поля равномерно заряженной плоскости равен

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}. \quad (13.29)$$

### 13.6. Электростатическое поле электрического диполя (в вакууме)

Электрический диполь – система двух равных по модулю и противоположных по знаку зарядов  $|q_1| = |q_2| = q$  (рис. 13.10). Расстояние между зарядами  $\ell$  называется плечом диполя.

Электрический дипольный момент

$$\vec{P}_e = |q| \cdot \vec{\ell}. \quad (13.30)$$

Силовое поле диполя (рис. 13.10) исследуем в точках, удаленных от диполя на расстояние  $r \gg \ell$ .

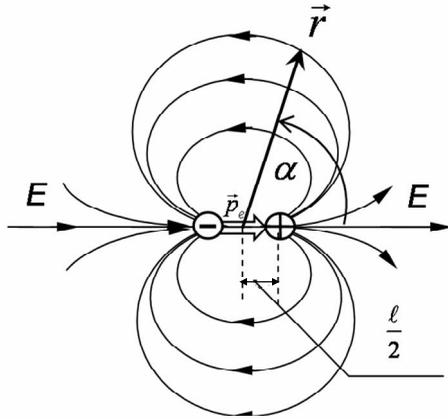


Рис. 13.10. Электрическое поле электрического диполя

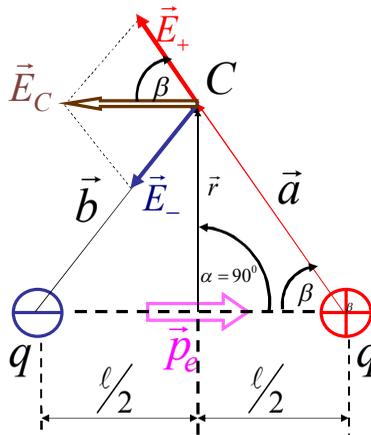


Рис. 13.11. К расчету напряженности поля электрического диполя в точке C

Расчет напряженности поля диполя в точке C, лежащей на «срединном» перпендикуляре  $\vec{r}$  к плечу диполя  $\ell$  (рис. 13.11).

Напряженность поля в точке C в векторном и скалярном виде –

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_-, \\ \frac{E}{2} &= E_{+(-)} \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\ell}{2a}, \\ a &= |\vec{a}| = b = |\vec{b}| = |\vec{r}|, \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$

поскольку – по условию задачи –  $|\vec{r}| \approx |\vec{a}| = |\vec{b}| \gg \ell$ .

Напряженность поля, создаваемого каждым зарядом в отдельности:

$$\left. \begin{aligned} E_{+(-)} &= k \frac{q}{r^2}, \\ \vec{E}_{+(-)} &= |\vec{E}_{+(-)}| \cdot \end{aligned} \right\} \quad (13.33)$$

Результирующая напряженность поля в точке  $C$  равна

$$E = 2k \frac{q}{r^2} \frac{\ell}{2r} = k \frac{P_e}{r^3}. \quad (13.34)$$

Расчет напряженности поля в точке  $A$ , лежащей на оси диполя (см. рис. 13.12).

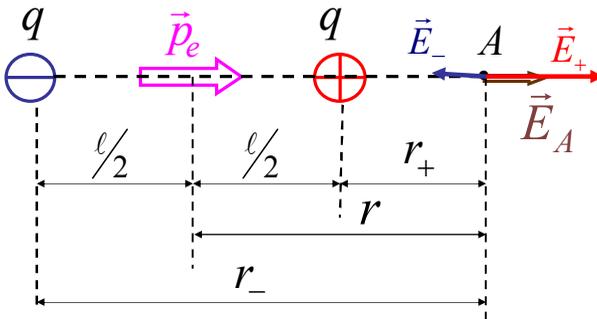


Рис. 13.12. К расчету напряженности поля электрического диполя в точке  $A$  (здесь угол  $\alpha$  – см. (13.38) – равен  $180^\circ$ )

Напряженность поля в точке  $A$  в векторном виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

а в скалярном виде:

$$E = E_+ - E_- = k \frac{q}{r_+^2} - k \frac{q}{r_-^2} = kq \left( \frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right) = kq \frac{(r_+ + r_-)(r_- - r_+)}{r_+^2 r_-^2} \quad (13.35)$$

где 
$$r_+ = r - \frac{\ell}{2} \text{ и } r_- = r + \frac{\ell}{2}, \quad (13.36)$$

причем  $r_+ \approx r_- = r$ , так как  $\ell \ll r$ .

Тогда результирующая напряженность поля в точке  $A$  равна

$$E = kq \frac{2\ell}{r^3} = k \frac{2P_e}{r^3}. \quad (13.37)$$

Напряженность и потенциал поля электрического диполя в произвольной точке, лежащей на радиусе  $\vec{r}$  (см. рис. 13.11), равны

$$\left. \begin{aligned} E &= k \frac{P_e}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}, \\ \varphi &= k \frac{P_e}{r^2} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (13.38)$$

### Контрольные вопросы

1. Может ли быть отличным от нуля электрическое поле вне двух разноименно заряженных бесконечных плоскостей?
2. Чему равна сила, действующая на пробный заряд, помещенный в центре равномерно заряженной сферы?
3. Алгебраическая сумма зарядов внутри замкнутой поверхности равна нулю. Будет ли равна нулю напряженность поля во всех точках внутри этой поверхности?
4. Если известно, что напряженность электростатического поля в какой-то точке равна нулю, значит ли это, что и потенциал в этой точке равен нулю?
5. Как меняется потенциальная энергия точечного заряда при его приближении к одноименному заряду?
6. Электрическое поле создано положительным точечным зарядом. Как направлены вектор напряженности и градиент потенциала в произвольной точке поля?

## Примеры решения задач

**Пример 13.1.** Пять точечных зарядов расположены в вакууме так, как показано на рис. 13.13 ( $q_1, q_2, q_3, q_4$  находятся в вершинах квадрата со стороной  $a = 1$  м, а  $q_5$  – в его середине). Определите величину силы, действующей на заряд  $q_5$ , если  $q_1 = q_2 = -1$  мкКл,  $q_3 = q_4 = q_5 = +1$  мкКл.

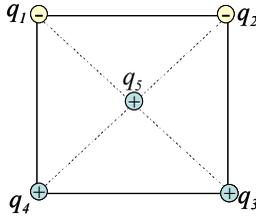


Рис. 13.13

### Решение

Так как заряд  $q_5$  находится в поле зарядов  $q_1, q_2, q_3, q_4$  (рис. 13.14), то сила, действующая на заряд  $q_5$ , равна

$$\vec{F} = q_5 \vec{E}, \quad (13.39)$$

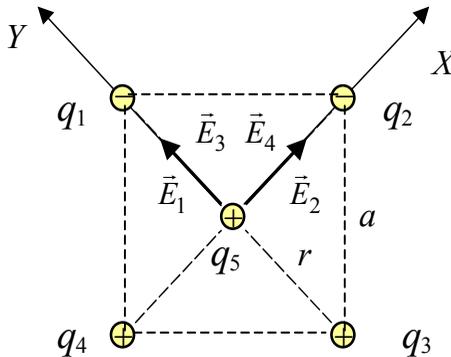


Рис. 13.14

где по принципу суперпозиции поля напряженность результирующего поля равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4. \quad (13.40)$$

В этой формуле  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4$  – напряженности полей, создаваемых точечными зарядами  $q_1, q_2, q_3, q_4$  в той точке, где расположен заряд  $q_5$ . Так как по модулю заряды одинаковы ( $|q_1| = |q_2| = |q_3| = |q_4| = |q_5| = q$ ), то

$$\left. \begin{aligned} |\vec{E}_1| &= \frac{k|q_1|}{r^2} = \frac{kq}{r^2}, \\ |\vec{E}_2| &= \frac{k|q_2|}{r^2} = \frac{kq}{r^2}, \\ |\vec{E}_3| &= \frac{k|q_3|}{r^2} = \frac{kq}{r^2}, \\ |\vec{E}_4| &= \frac{k|q_4|}{r^2} = \frac{kq}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.41)$$

Так как векторы  $\vec{E}_2$  и  $\vec{E}_4$  направлены вдоль оси  $X$ , а  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_3$  вдоль оси  $Y$ , то

$$E = \sqrt{(E_1 + E_3)^2 + (E_2 + E_4)^2} = 2 \frac{kq}{r^2} \sqrt{2}, \quad (13.42)$$

где  $r$  – это половина диагонали квадрата со стороной  $a$ :

$$r = \frac{1}{2} a \sqrt{2} = a \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (13.43)$$

Тогда

$$E = 2 \frac{kq \cdot 4}{2a^2} \sqrt{2} = \frac{4kq}{a^2} \sqrt{2}. \quad (13.44)$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$F = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (10^{-6})^2}{1^2} \sqrt{2} = 0,0509 \text{ Н} = 50,9 \text{ мН}.$$

**Пример 13.2.** Полый стеклянный шар несет равномерно распределенный по объему заряд 1 нКл. Внутренний радиус шара  $R_1 = 5$  см, наружный  $R_2 = 10$  см. (см. рис. 13.4 -13.5). Диэлектрическая проницаемость стекла  $\epsilon = 7$ .

Вычислите напряженность электрического поля в точках, отстоящих от центра шара на расстояние: 1)  $r_1 = 3$  см; 2)  $r_2 = 6$  см; 3)  $r_3 = 12$  см. Шар находится в вакууме.

### Решение

Для определения напряженности электростатического поля воспользуемся теоремой Гаусса:

$$\oiint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (13.45)$$

Разобьем исследуемое пространство на три области:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I.} \quad r < R_1, \\ \text{II.} \quad R_1 \leq r \leq R_2, \\ \text{III.} \quad r > R_2. \end{array} \right\} \quad (13.46)$$

В качестве гауссовых поверхностей выберем сферические поверхности (рис. 13.15), радиусы  $r$  которых удовлетворяют неравенствам (13.46).

Тогда для каждой из этих областей запишем теорему Гаусса (13.45):

$$\text{I.} \quad \oiint_S (\vec{E}_1, d\vec{S}) = 0, \quad (13.47)$$

так как внутри сферы радиуса  $r < R_1$  зарядов нет. Отсюда следует, что  $E_1 = 0$ .

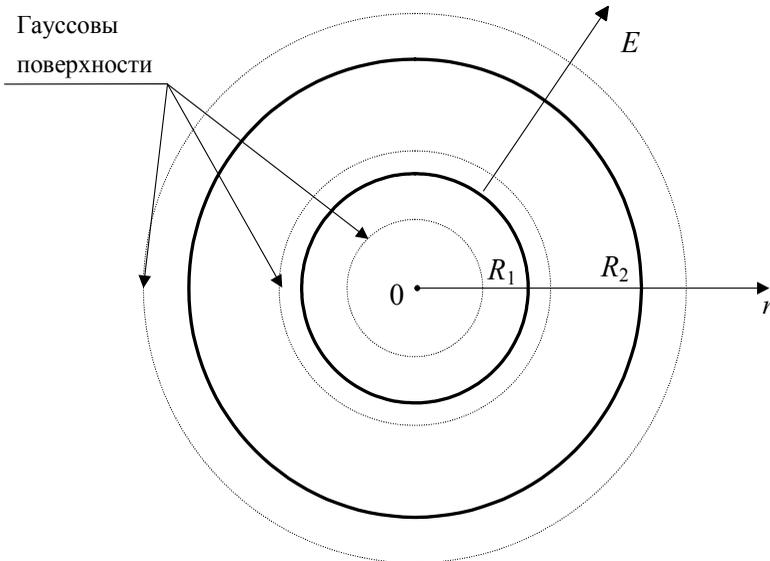


Рис. 13.15

$$\text{II. } \oiint_S (\vec{E}_{\text{II}} d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_{R_1}^r \rho dV = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \left( \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi R_1^3 \right) = \frac{4\rho\pi}{3\varepsilon\varepsilon_0} (r^3 - R_1^3), \quad (13.48)$$

$$\text{III. } \oiint_S (\vec{E}_{\text{III}} d\vec{S}) = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (13.49)$$

Объемную плотность заряда рассчитаем по формуле

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}. \quad (13.50)$$

Из условия симметрии следует, что вектор  $\vec{E}$  направлен радиально и зависит только от расстояния от центра шара, следовательно,

$$(\vec{E}, d\vec{S}) = E dS. \quad (13.51)$$

И тогда

$$\oiint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = E \cdot S, \quad (13.52)$$

где  $S$  – площадь гауссовой поверхности:

$$S = 4\pi r^2 \quad (13.53)$$

Тогда (13.48) и (13.49) переписутся так:

$$E_{\text{II}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\rho\pi}{3\varepsilon\varepsilon_0} (r^3 - R_1^3), \quad (13.54)$$

$$E_{\text{III}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (13.55)$$

Отсюда

$$E_{\text{II}} = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0} \left( r - \frac{R_1^3}{r^2} \right), \quad (13.56)$$

$$E_{\text{III}} = \frac{kq}{r^2}. \quad (13.57)$$

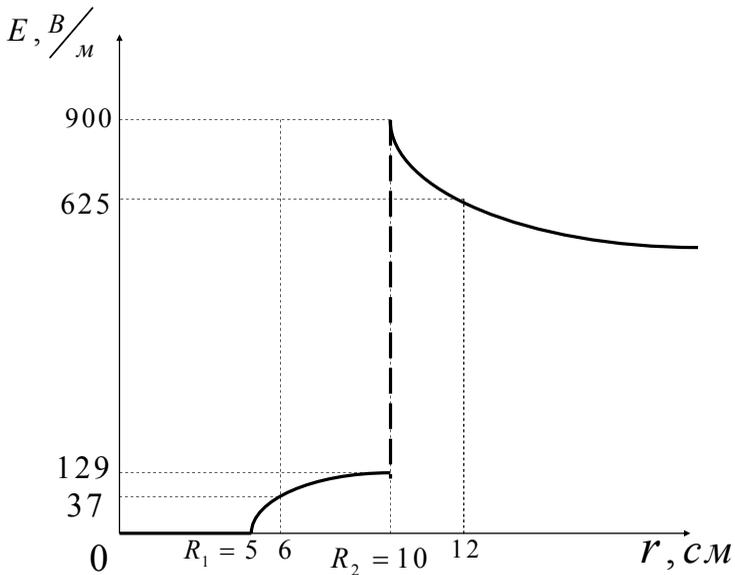
Тогда

$$\left. \begin{aligned} E(r_1) &= 0, \\ E(r_2) &= \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0} \left( r_2 - \frac{R_1^3}{r_2^2} \right) = \frac{kq}{\epsilon(R_2^3 - R_1^3)} \left( r_2 - \frac{R_1^3}{r_2^2} \right), \\ E(r_3) &= \frac{kq}{r_3^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.58)$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления (результаты расчетов представлены на **рис.13.16**).

$$E(r_2) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}}{7 \cdot (0,1^3 - 0,05^3)} \cdot \left( 0,06 - \frac{0,05^3}{0,06^2} \right) = 37,1 \text{ В/м.}$$

$$E(r_3) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}}{0,12^2} = 625 \text{ В/м.}$$



**Рис. 13.16**

## Глава 14. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Поскольку **постоянное** магнитное поле (*магнитоэстатическое поле*) является полем **постоянных** токов, рассмотрим основные понятия и законы постоянного тока.

### 14.1. Понятие об электрическом токе

Электростатические явления также сопровождаются движением элементарных электрических зарядов. Однако эти движения либо не влияют на электростатические поля, созданные макроскопическими зарядами, как например, тепловые колебания катионов кристаллической решетки заряженного металлического проводника, либо очень кратковременны и служат лишь переходом от одного равновесного состояния к другому, например перераспределение электронов проводимости при электростатической индукции или при заземлении заряженного проводника. Поэтому в электростатике, которая изучает явления, связанные с равновесием зарядов, эти процессы не рассматривались.

*Электрическим током называют всякое упорядоченное движение электрических зарядов.* Ток, возникающий в проводнике вследствие того, что в нем создается электрическое поле, называется *током проводимости*. При движении зарядов нарушается их равновесное распределение: поверхность проводника уже не является эквипотенциальной и электрические силовые линии не направлены перпендикулярно ей, так как для движения зарядов необходимо, чтобы на поверхности проводника тангенциальная составляющая напряженности электрического поля не равнялась нулю. Но тогда и внутри проводника должно существовать электрическое поле, ибо, как известно из электростатики, внутри проводника нет поля лишь в случае равновесного распределения зарядов на поверхности этого проводника. Перемещение зарядов – *электрический ток* – продолжается до тех пор, пока все точки проводника не станут эквипотенциальными.

Таким образом, для появления и существования тока проводимости необходимы три условия.

*Первое* – наличие в данной среде носителей заряда, т.е. заряженных частиц, которые могли бы в ней перемещаться. Такими частицами, как мы убедимся далее, в металлах являются электроны проводимости; в жидких проводниках (электролитах) – положительные и

отрицательные ионы; в газах – положительные ионы и электроны, а также иногда и отрицательные ионы.

*Второе* – наличие в данной среде электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение электрических зарядов. Для того чтобы ток был длительным, энергия поля должна все время пополняться, иными словами, нужен источник электрической энергии – устройство, в котором осуществляется преобразование какого-либо вида энергии в энергию электрического поля.

*Третье* – упорядоченное движение зарядов можно осуществить и другим способом – перемещением в пространстве заряженного тела (проводника или диэлектрика). Такой электрический ток называется конвекционным. Например, движение по орбите Земли, обладающей избыточным отрицательным зарядом, можно рассматривать как конвекционный ток.

## **14.2. Условия возникновения и поддержания постоянного тока в проводниках. Понятие ЭДС**

В случае электростатики заряды находились в равновесии, поверхность проводника являлась эквипотенциальной поверхностью ( $\varphi = \text{const}$ ). Однако необходимо иметь в виду, что свободные заряды в проводниках участвуют в хаотическом тепловом движении (со скоростями  $\sim 10^5$  м/с), но в среднем направленное движение зарядов (ток) отсутствует.

При соединении двух заряженных проводников с разными потенциалами ( $\varphi_1 \neq \varphi_2$ ) возникает новый проводник, заряды начнут протекать в направлении от первого проводника ко второму ( $\varphi_1 > \varphi_2$ ).

Такое направленное движение электрических зарядов в проводнике и называется *электрическим током (током проводимости)*. условно за направление тока принимается направление движения *положительных* зарядов (рис. 14.1). Движение зарядов в описываемом случае будет протекать в течение  $\sim 10^{-5}$  с до выравнивания потенциала.

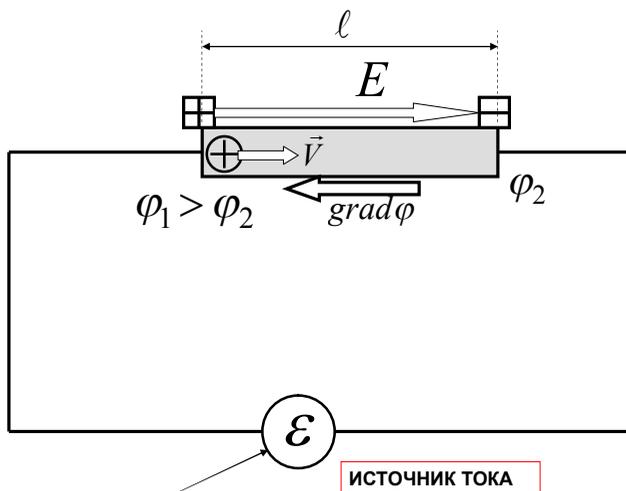


Рис. 14.1. Перемещение заряда по замкнутому контуру под действием сторонних сил

Для получения тока в проводнике в течение длительного времени необходимо поддерживать неизменной разность потенциалов на его концах, т.е. производить разделение зарядов, преодолевая сопротивление «электрических сил», иными словами – перемещая заряды против направления градиента потенциала – от  $\varphi_2$  к  $\varphi_1$  (см. рис. 14.1).

**Работа электростатических (кулоновских) сил по замкнутому пути равна нулю (см. 11.12).**

Поэтому для движения зарядов по замкнутому контуру необходимы силы *неэлектростатического* происхождения – так называемые *сторонние силы*.

Устройство, которое осуществляет непрерывное движение зарядов по замкнутому контуру, называется *источником тока*.

Силы, под действием которых происходит движение электрических зарядов внутри источника тока в направлении против действия электростатических сил, называются *сторонними силами*:

$$\vec{F}_{\text{стор}} = q\vec{E}_{\text{стор}}, \quad (14.1)$$

причем поле  $\vec{E}_{\text{стор}}$  не является потенциальным. В качестве сторонних сил могут быть использованы силы *вихревых* – магнитного и электрического полей, химические и ядерные реакции.

Основной количественной характеристикой источника тока является *электродвижущая сила* (ЭДС), измеряемая работой, которую совершают *сторонние* силы по перемещению единичного положительного заряда на всем участке их действия.

В общем случае

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \frac{1}{q} \oint_L (\vec{F}_{\text{стор}} d\vec{\ell}) = \frac{1}{q} \oint_L (q\vec{E}_{\text{стор}} d\vec{\ell}) = \oint_L (\vec{E}_{\text{стор}} d\vec{\ell}) \neq 0, \quad (14.2)$$

т.е. ЭДС – это *циркуляция сторонних сил по цепи тока*.

### 14.3. Падение напряжения (или напряжение) на участке цепи

Рассмотрим проводник, на концах которого создана разность потенциалов ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) и, кроме этого, на заряды действуют сторонние силы (см. рис. 14.1).

Работа электростатических и сторонних сил по переносу единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = E\ell q + \mathcal{E}q = (\varphi_1 - \varphi_2)q + \mathcal{E}q. \quad (14.3)$$

Разделив работу на заряд, получим величину, равную работе электростатической и сторонних сил – *падение напряжения*, или *напряжение*, на участке 1-2:

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}. \quad (14.4)$$

Участок цепи, где на носители зарядов не действуют сторонние силы, называется *однородным*. Для однородного участка цепи:

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (14.5)$$

Если же в цепи присутствует ЭДС, то такой участок называется *неоднородным*.

### 14.4. Величина и плотность тока

Для характеристики электрического тока через какую-либо поверхность (например, в случае тока проводимости – через поперечное сечение проводника) вводится понятие «сила» тока, или просто – *величина* тока. Величина тока  $I$  равна отношению заряда  $dq$ , перенос-

симого через рассматриваемую поверхность  $S$  за малый промежуток времени  $dt$ , к величине этого промежутка:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (14.6)$$

Если величина тока и его направление не изменяются с течением времени, то ток называется *постоянным*. Величина постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}, \quad (14.7)$$

где  $q$  – заряд, переносимый через поверхность  $S$  за конечный промежуток времени  $t$ .

В электротехнике величина  $I$  называется просто *током*. В дальнейшем мы часто будем пользоваться этим термином.

Для того, чтобы ток проводимости был постоянным, заряды не должны накапливаться или убывать ни в одной части проводника. Поэтому цепь постоянного тока должна быть замкнутой.

Единица тока в СИ – ампер (А) – определяется на основании электромагнитного взаимодействия двух параллельных прямолинейных постоянных токов (см. 11.6). Из формулы (14.7) следует, что 1 А равен величине постоянного электрического тока, при котором в единицу времени через любое поперечное сечение проводника переносится заряд, равный 1 Кл:

$$1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с}.$$

Для характеристики направления электрического тока в различных точках рассматриваемой поверхности и распределения силы тока по этой поверхности вводится *вектор плотности тока*.

Вектор плотности электрического тока  $\vec{j}$  совпадает по направлению с движением положительно заряженных частиц — носителей заряда и численно равен отношению величины тока  $dI$  сквозь малый элемент поверхности, нормальный к направлению движения заряженных частиц, к площади  $dS_{\perp}$  этого элемента:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (14.8)$$

В СИ плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр ( $\text{А/м}^2$ ).

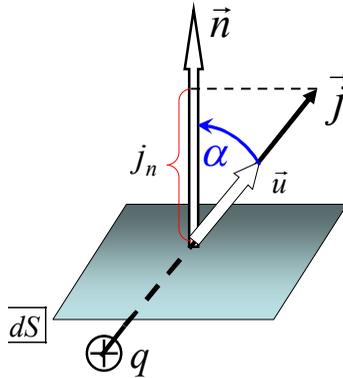


Рис. 14.2. К понятию вектора плотности тока  
(показано направление скорости упорядоченного движения заряда)

Найдем связь между плотностью тока  $j$  и величиной тока  $dI$  через малый элемент  $dS$  поверхности, нормаль к которому составляет с  $\vec{j}$  угол  $\alpha$  (рис.14.2). Площадь  $dS_{\perp}$  проекции площадки  $dS$  на плоскость, нормальную к  $\vec{j}$  равна,  $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$ . Поэтому в соответствии с (14.8)

$$dI = j dS \cos \alpha = j_n dS = (\vec{j} d\vec{S}), \quad (14.9)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, перпендикулярный площадке  $dS$ ;  
 $j_n$  – проекция вектора  $\vec{j}$  на направление нормали  $\vec{n}$  ;  
 $d\vec{S}$  – вектор элементарной площадки.

Из формулы (14.9) следует, что ток через произвольную поверхность  $S$  равен

$$I = \iint_S j_n dS = \iint_S (\vec{j} d\vec{S}), \quad (14.10)$$

где интегрирование проводится по всей площади этой поверхности.

Опыты показали, что плотность постоянного тока одинакова по всему поперечному сечению  $S$  однородного проводника. Поэтому для постоянного тока формулу (14.10) можно записать в виде

$$I = jS.$$

Пусть в единице объема проводника (рис. 14.4)

$$V = \ell S$$

содержится  $N$  отрицательных носителей тока – электронов, имеющих заряд  $(-|e|)$ .

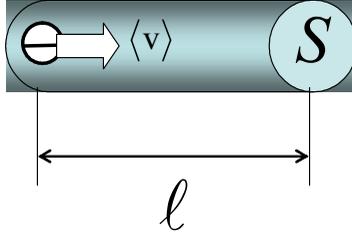


Рис. 14.3. Единичный объем проводника

Если скорость упорядоченного движения носителей заряда равна  $\bar{u}$ , то через *единичную* поверхность пройдет в *единицу* времени заряд

$$\begin{aligned} j &= \frac{I}{S} = \frac{Q}{tS} = \frac{N|e|\ell}{tS} \frac{\ell}{\ell} = \frac{N|e|\ell}{\ell S} \frac{\ell}{t} = \\ &= \frac{N}{\ell S} |e| \langle |\bar{u}| \rangle = n |e| \langle |\bar{u}| \rangle, \end{aligned} \quad (14.11)$$

где концентрация электронов проводимости в одноатомных металлах (плотность проводника  $\rho$  и молярная масса  $\mu$ ) равна концентрации атомов

$$n = \frac{N}{V} = N_A \frac{\rho}{\mu}. \quad (14.12)$$

## 14.5. Основные законы постоянного тока

### 14.5.1. Закон Ома

Ом экспериментально установил связь между напряжением и величиной тока:

$$I = \frac{U}{R} \quad (14.13)$$

где  $R$  – электрическое сопротивление образца.

Этот закон называется *законом Ома*. Для большинства проводников электрическое сопротивление не зависит от напряжения при не больших напряжениях. Единицей измерения электрического сопротивления является Ом.

Для *неоднородного* участка цепи:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}}{R}. \quad (14.14)$$

Для *однородного* участка цепи:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R}.$$

Для замкнутой цепи разность потенциалов равна нулю.

*Электрическое сопротивление и удельное электрическое сопротивление*. Величина электрического сопротивления зависит от формы и размеров образца, а также от свойств материала. Для образца с неизменной формой поперечного сечения:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (14.15)$$

где  $l$  – длина образца,

$S$  – площадь поперечного сечения,

$\rho$  – удельное электрическое сопротивление, Ом·м. Удельное электрическое сопротивление является свойством материала при данных внешних условиях.

*Проводимость и удельная проводимость*. Величину, обратную электрическому сопротивлению, называют *проводимостью* (единица проводимости – сименс (См)). Величину, обратную удельному электрическому сопротивлению, называют *удельной проводимостью*  $\sigma$  (единица удельной проводимости – См/м).

*Соединения сопротивлений (резисторов)*. Последовательное и продолжительное соединение резисторов изображены на рис. 14.4, 14.5.

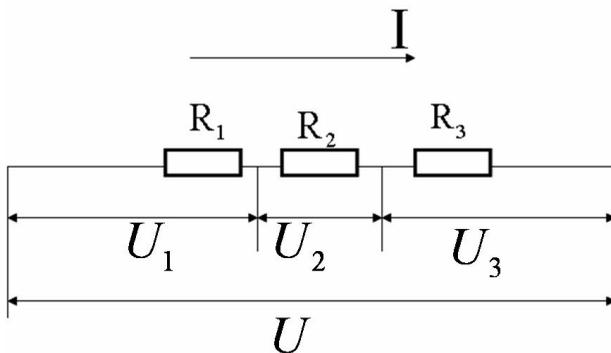


Рис. 14.4. Последовательное соединение резисторов

При последовательном соединении:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 = I_3 \\ U = U_1 + U_2 + U_3, \\ R = R_1 + R_2 + R_3. \end{cases} \quad (14.16)$$

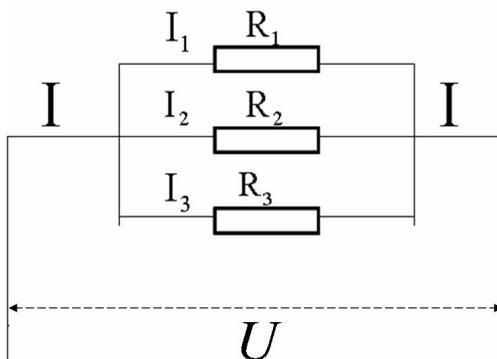


Рис. 14.5. Параллельное соединение резисторов

При параллельном соединении:

$$\begin{cases} U = U_1 = U_2 = U_3, \\ I = I_1 + I_2 + I_3, \\ \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \end{cases} \quad (14.17)$$

### 14.5.2. Закон Ома в дифференциальной форме

$$\left. \begin{aligned} \vec{j} &= \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma \vec{E}, \\ \vec{j} &= -\sigma \text{grad}\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

т.е., вектор плотности тока направлен в сторону уменьшения потенциала  $\varphi$  поля напряженностью  $\vec{E}$  внутри проводника.

### 14.5.3. Закон Джоуля – Ленца

Работа, которую совершает ток за время  $t$ ,

$$A = Uq = UI t. \quad (14.19)$$

Мощность тока (работа в единицу времени)

$$N = \frac{A}{t} = UI. \quad (14.20)$$

Если проводник неподвижен и нет химических превращений, то вся работа тока переходит в тепло (так называемое *джоулево тепло*). В этом случае количество теплоты

$$Q = UI t = \frac{U^2}{R} t = I^2 R t. \quad (14.21)$$

– закон Джоуля – Ленца в интегральной форме.

Отношение теплоты к объему, в котором она выделяется в единицу времени, называется *удельной тепловой мощностью* тока:

$$Q_{\text{уд}} = \vec{j} \vec{E} = \sigma E^2 = \rho j^2 \quad (14.22)$$

– закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

### 14.5.4. Правила Кирхгофа

Основные понятия:

*Ветвь* – участок цепи, где протекает одинаковый ток. *Узел* – точка, где сходятся более, чем две ветви (рис. 14.6). *Контур* – замкнутый путь вдоль нескольких ветвей (рис. 14.7).

**Первое правило Кирхгофа:**

*Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна в сумме нулю:*

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (14.23)$$

где  $n$  – число проводников, сходящихся в узле, а  $I_k$  – токи в них. При этом токи, подходящие к узлу, считают положительными, а токи, отходящие от него, – отрицательными. На рис. 14.7 в узле  $A$  сходятся шесть проводников; направления токов в них показаны стрелками. Первое правило Кирхгофа (14.23) запишется для узла  $A$  следующим образом:

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 - I_6 = 0. \quad (14.24)$$

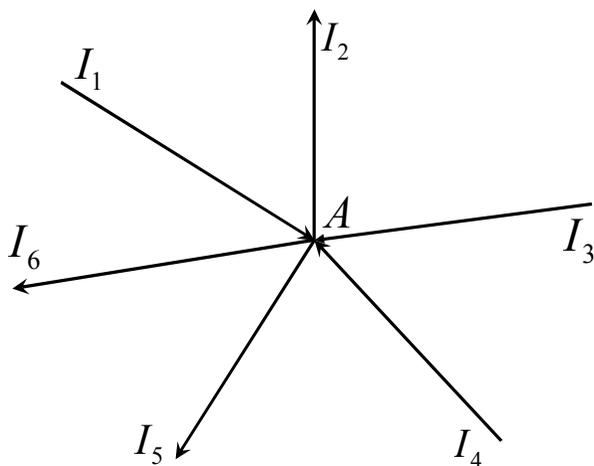


Рис. 14.6. Узел в разветвленной электрической цепи

**Второе правило Кирхгофа:**

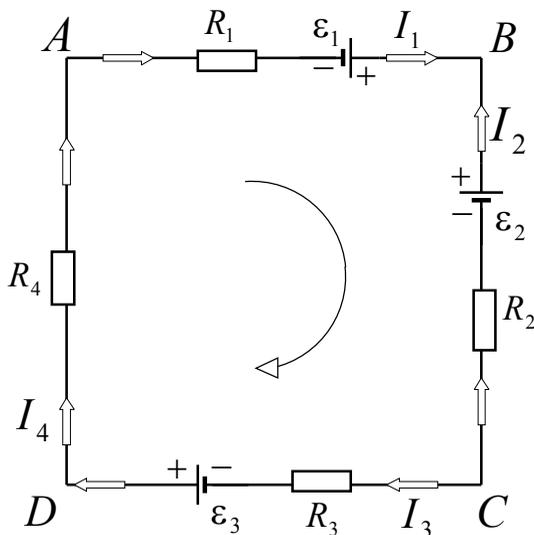


Рис. 14.7. Замкнутый контур в разветвленной электрической цепи

Второе правило Кирхгофа является обобщением закона Ома (14.15) на разветвленные электрические цепи. Оно состоит в следующем: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений величины токов  $I_k$  на сопротивления  $R_k$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС  $\mathcal{E}_i$  в контуре:

$$\sum_{k=1}^n (I_k \cdot R_k) = \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_i, \quad (14.25)$$

где  $n$  – число отдельных участков, на которые контур разбивается узлами.

Для раскрытия уравнения (14.25) необходимо условиться о направлении обхода контура (по часовой стрелке или против нее). Выбор этого направления совершенно произволен. Все токи  $I_k$ , совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считают положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура. Так например, в случае обхода по часовой стрелке

замкнутого контура  $ABCD$ , изображенного на рис. 14.7, уравнение (14.25) записывается следующим образом:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \quad (14.26)$$

### Контрольные вопросы

1. Какие силы называются сторонними?
2. Поясните физический смысл электродвижущей силы, напряжения и разности потенциалов.
3. В чем состоит закон Ома для участка цепи, для замкнутой цепи? Каков его физический смысл?
4. В чем состоят и на чем основаны правила Кирхгофа?
5. Что такое плотность электрического тока?
6. Как, зная плотность тока в каждой точке некоторой поверхности, найти силу тока, текущего через эту поверхность?
7. Как связана ЭДС с напряженностью поля сторонних сил?
8. Электродвижущая сила – это «сила»? В чем заключается физический смысл понятия ЭДС?
9. Как зависит удельное сопротивление металла от температуры?
10. Цепь постоянного тока состоит из гальванического элемента (источника тока), некоторого резистора и амперметра. На каких участках цепи произведение  $(\vec{E}_{\text{стоп}} d\vec{l})$  отлично от нуля?

### Примеры решения задач

**Пример 14.1.** Элементы цепи, схема которой изображена на рис. 14.8, имеют следующие значения:  $\mathcal{E}_1 = 1,50$  В,  $\mathcal{E}_2 = 1,60$  В,  $R_1 = 1,00$  кОм,  $R_2 = 2,00$  кОм. Определить показания вольтметра, если его сопротивление  $R_V = 2,00$  кОм. Сопротивлением источников напряжения и соединительных проводов следует пренебречь.

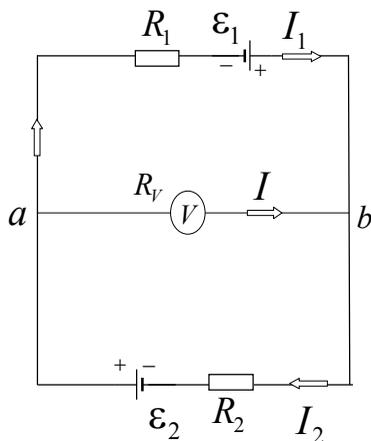


Рис. 14.8

### Решение

Здесь требуется найти падение напряжения на  $R_V$  (между точками  $a$  и  $b$ ), которую измеряет вольтметр, подключенный к этим точкам. Если бы вольтметр обладал бесконечно большим сопротивлением и тока через него не было, то эта задача была бы решена с помощью закона Ома для участка неоднородной цепи. Однако в данном случае сопротивление  $R_V$  одного порядка с  $R_1$  и  $R_2$ , поэтому пренебречь током  $I$  в цепи вольтметра нельзя.

Таким образом, здесь имеется разветвленная цепь, по трем участкам которой текут, вообще говоря, разные токи:  $I, I_1, I_2$ . Задачу можно решить, используя правила Кирхгофа для разветвленных цепей.

Искомое падение напряжения по закону Ома (14.14) равна

$$\varphi_a - \varphi_b = IR_V. \quad (14.26)$$

Чтобы определить величину тока  $I$  в цепи вольтметра, применим правила Кирхгофа (14.23), (14.24). Обозначив на рис. 14.9 направления всех токов (для тока  $I$  делаем это лишь предположительно), согласно *первому* правилу Кирхгофа запишем для узла  $a$ :

$$I_2 - I_1 - I = 0. \quad (14.27)$$

Для составления остальных двух независимых уравнений воспользуемся *вторым* правилом Кирхгофа. Предварительно выбрав

направление обхода замкнутых контуров, например по часовой стрелке, и учитывая правило знаков (см. 14.5.4), получим соответственно для контуров  $aR_1ba$  и  $abR_2a$ :

$$I_1R_1 - IR_V = \mathcal{E}_1, \quad (14.28)$$

$$I_2R_2 + IR_V = \mathcal{E}_2. \quad (14.29)$$

Решив систему трех уравнений (14.27) – (14.29) с тремя неизвестными  $I_1, I_2, I$  относительно тока  $I$ , найдем

$$I = \frac{\mathcal{E}_2R_1 - \mathcal{E}_1R_2}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)R_V}. \quad (14.30)$$

Подставив это значение  $I$  в (14.26) и произведя вычисления, получим

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{(\mathcal{E}_2R_1 - \mathcal{E}_1R_2)R_V}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)R_V} = -0,35 \text{ В.}$$

Знак « $\rightarrow$ » в ответе означает, что  $\varphi_b > \varphi_a$ , и в действительности ток в цепи вольтметра имеет направление, противоположное тому, что мы предположили, т.е. от точки  $b$  к точке  $a$ .

## Глава 15. РАСЧЕТЫ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ТОКОВ

### 15.1. Магнитное поле движущегося заряда (в вакууме)

Как было показано выше, движущийся электрический заряд создает и электрическое и магнитное поля (единое электромагнитное поле). Силовая характеристика магнитного поля – индукция  $\vec{B}$  – связана с напряженностью электрического поля  $\vec{E}$  соотношением (11.15).

Поэтому – в соответствии с формулой (11.9) – индукция магнитного поля движущегося в веществе точечного заряда

$$\vec{B} = \frac{k}{\epsilon c^2} \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}](1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} r^3}. \quad (15.1)$$

При  $\beta \rightarrow 0$

$$\vec{B} = \frac{k}{\epsilon c^2} \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon c^2} \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi\epsilon} \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (15.2)$$

Силовая линия магнитного поля строится так, чтобы в каждой точке силовой линии вектор  $\vec{B}$  был направлен по касательной к этой линии (рис. 15.1 и 15.2). Силовые линии магнитного поля замкнуты. Магнитное поле – *вихревое, непотенциальное*.

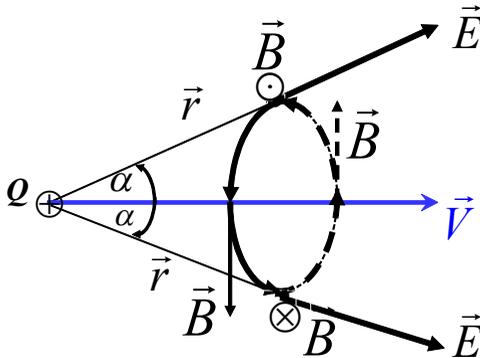


Рис. 15.1. Электромагнитное поле движущегося точечного заряда

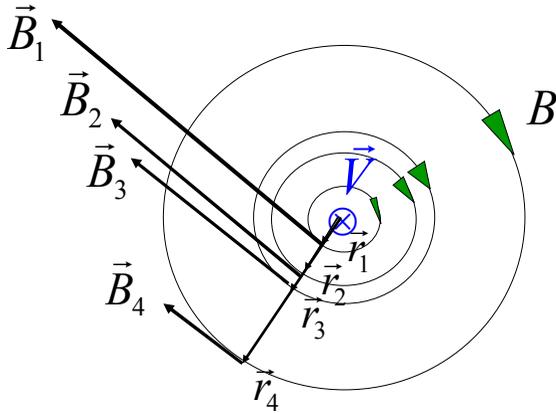


Рис. 15.2. Вихревой характер магнитного поля положительного заряда, движущегося «от читателя»

## 15.2. Закон Био – Савара – Лапласа

Закон Био – Савара – Лапласа определяет *магнитное поле элемента тока*.

Введем понятие элемента тока:

$$I \cdot d\vec{\ell} = \vec{v} \cdot dQ. \quad (15.3)$$

По аналогии с магнитным полем движущегося точечного заряда индукция магнитного поля элемента тока в вакууме (рис. 15.3) выражается:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{\ell}, \vec{r}]}{r^3}, \\ dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\ell \sin \alpha}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

– закон Био – Савара – Лапласа в векторной и скалярной формах соответственно.

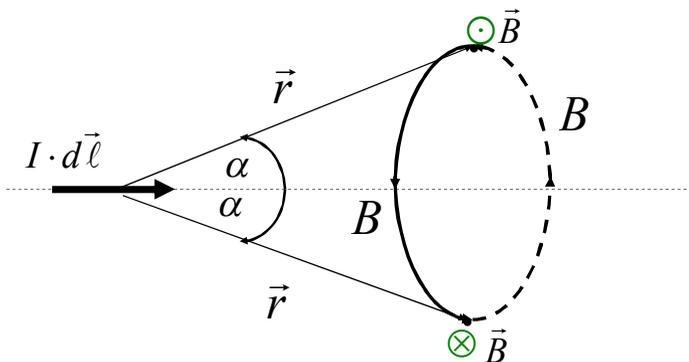


Рис. 15.3. Магнитное поле элемента тока

### 15.3. Магнитостатическое поле магнитного диполя

*Магнитным диполем* называется виток проводника с током (круговой ток) или рамка с током – из-за аналогии картины их магнитных силовых линий с картиной силовых линий поля электрического диполя (рис. 15.4).

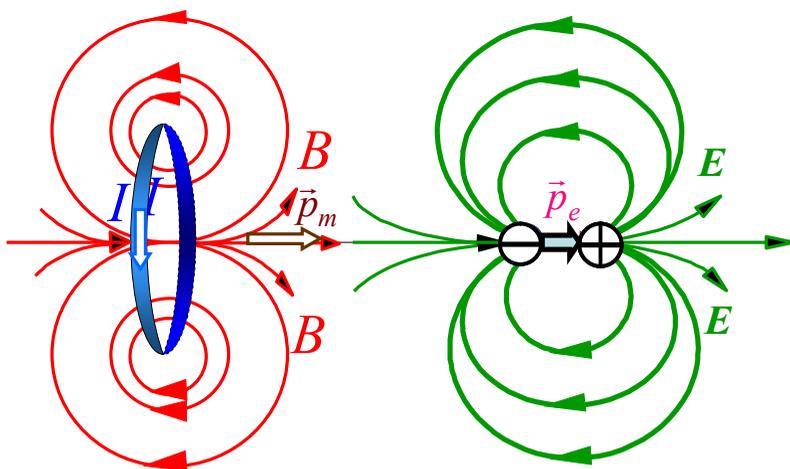


Рис. 15.4. Картины силовых линий полей магнитного (слева) и электрического (справа) диполей

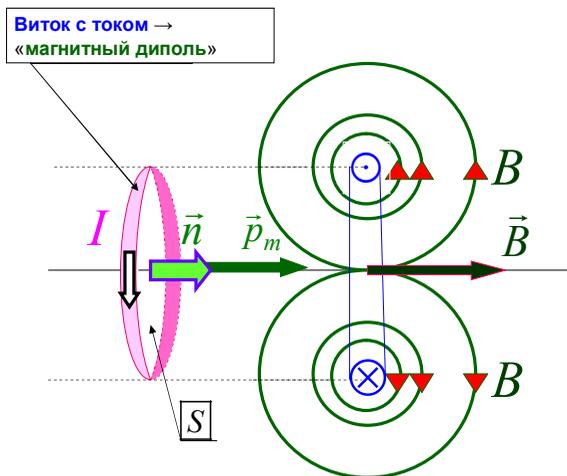


Рис. 15.5. Магнитный дипольный момент

Магнитный дипольный момент (рис. 15.5)

$$\vec{P}_m = IS\vec{n}. \quad (15.5)$$

Расчет поля магнитного диполя на оси диполя (рис. 15.6).

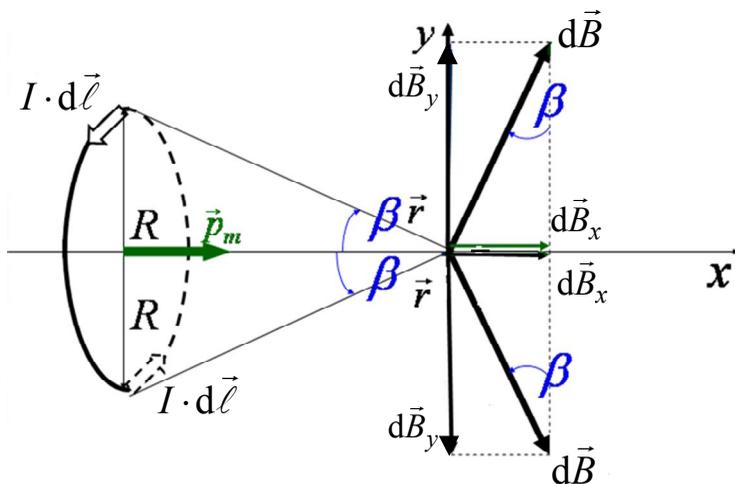


Рис. 15.6. К расчету индукции поля магнитного диполя

По закону Био – Савара – Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{\ell}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (15.6)$$

или, в скалярной форме,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\ell}{r^2}, \quad (15.7)$$

где  $d\ell$  – элемент длины витка с током.

$Y$ -компоненты всех векторов  $d\vec{B}$  компенсируют друг друга и результирующее поле будет направлено по оси  $X$ . Проекция вектора  $d\vec{B}$  на ось  $X$

$$dB_x = dB \sin\beta,$$

где  $\sin\beta = \frac{R}{r}$ .

Проинтегрировав по всей длине витка, получим

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \int_0^{2\pi R} d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2P_m}{r^3}, \quad (15.8)$$

где  $\left. \begin{array}{l} r = \sqrt{R^2 + x^2}, \\ P_m = I\pi R^2. \end{array} \right\}$

В центре витка ( $x = 0$ ) индукция магнитного поля равна

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2P_m}{R^3}. \quad (15.9)$$

#### 15.4. Магнитостатическое поле бесконечно длинного прямого проводника с током

В качестве контура  $L$  выбираем силовую линию  $B$  (рис. 15.7), тогда  $B_\tau = |\vec{B}| = \text{const}$  при  $r = \text{const}$ .

Поэтому

$$B \oint_L d\ell = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \quad (15.10)$$

так как длина контура

$$\oint_L d\ell = 2\pi r. \quad (15.11)$$

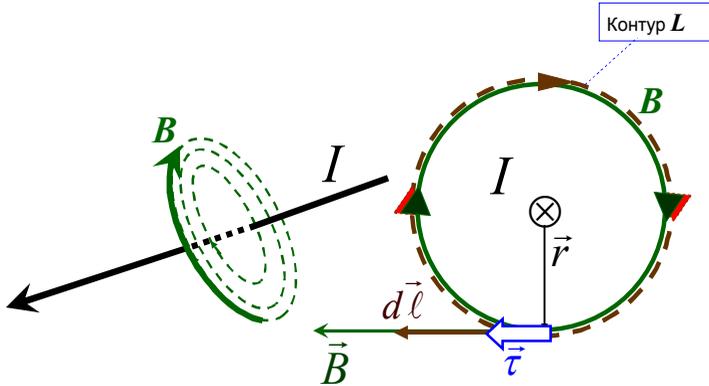


Рис. 15.7. К расчету магнитного поля прямого тока на основе теоремы о циркуляции

Модуль вектора индукции магнитного поля бесконечно длинного прямого проводника с током равен

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}. \quad (15.12)$$

### 15.5. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида

Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  вдоль замкнутого контура 1-2-3-4-1 (рис. 15.8):

$$\oint_L B_\tau d\ell = \int_1^2 B_\tau d\ell + \int_2^3 B_\tau d\ell + \int_3^4 B_\tau d\ell + \int_4^1 B_\tau d\ell = \int_3^4 B_\tau d\ell, \quad (15.13)$$

так как на участках 4-1 и 2-3  $d\vec{\ell} \perp \vec{B}$  и  $B_\tau = 0$ , а участок 1-2 (по построению) далеко от соленоида, и для него  $B \rightarrow 0$ .

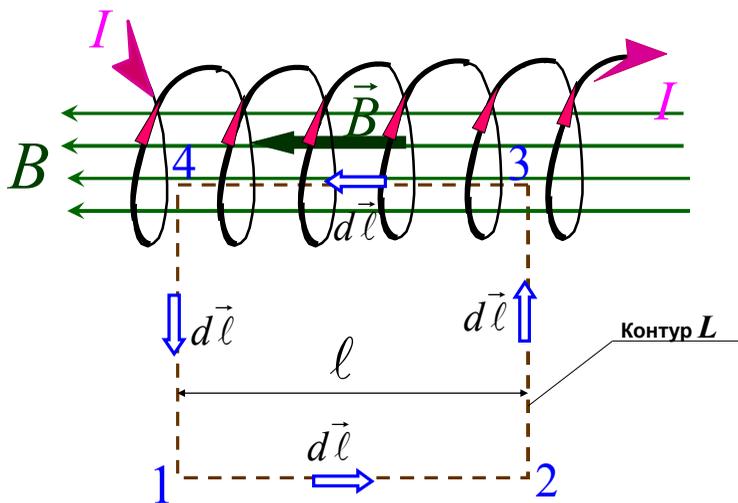


Рис. 15.8. К расчету поля соленоида

Поэтому, в соответствии с *теоремой о циркуляции*,

$$\oint_2^3 B \, d\vec{\ell} = \mu_0 NI, \quad (15.14)$$

где  $N$  – полное число витков соленоида.

Модуль вектора магнитной индукции поля бесконечного соленоида равен

$$B = \mu_0 nI, \quad (15.15)$$

где

$$n = \frac{N}{\ell} \quad (15.16)$$

– число витков на единицу длины («плотность намотки») соленоида.

### 15.6. Магнитное поле тонкого тороида

Тороидом (рис.15.9) называется провод, навитый на каркас в виде тора. «Тонким» можно считать тороид, радиус которого много больше толщины каркаса.

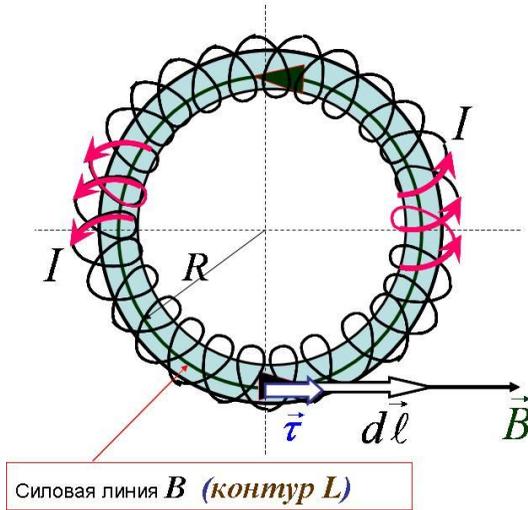


Рис. 15.9. Торойд радиуса  $R$

В соответствии с направлением тока магнитная силовая линия «закручена» против часовой стрелки. Таким же мы выбираем и направление обхода воображаемого контура. Поэтому единичный касательный вектор  $\vec{\tau}$  и вектор элемента контура  $d\vec{\ell} = \vec{\tau} d\ell$  будут параллельны вектору  $\vec{B}$ .

Следовательно, касательная проекция вектора  $B_{\tau}$  будет равна модулю вектора  $|\vec{B}|$ .

Таким образом интеграл, выражающий циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль упомянутого воображаемого контура, будет равен

$$\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = \oint_L B_{\tau} d\ell = B \oint_L d\ell = B \cdot 2\pi R. \quad (15.17)$$

Совместив результат расчета (15.17) с правой частью формулы (12.16) теоремы о циркуляции, получим

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 NI, \quad (15.18)$$

где  $I$  – ток в одном витке обмотки тороида;

$N$  – число витков с током, охватываемых выбранным контуром.

Итак, величина индукции магнитного поля, создаваемого током в тороиде

$$B = \mu_0 \frac{N}{2\pi R} I = \mu_0 n I, \quad (15.19)$$

где  $n$  – число витков на единицу длины («плотность намотки») тороида,

$$n = \frac{N}{2\pi R} \quad (15.20)$$

Контур, проходящий вне тороида, витков с током не охватывает, поэтому для него произведение  $B \cdot 2\pi R = 0$ . Следовательно, вне тороида магнитного поля не существует.

Таким образом, магнитное поле сосредоточено внутри тороида, но в отличие от поля в соленоиде, неоднородно.

### 15.7. Проводник с током в магнитном поле. Сила Ампера.

Магнитную силу, действующую на элемент тока  $I \cdot d\vec{\ell}$  (рис. 15.10), можно получить, преобразовав магнитную силу, действующую на элементарный заряд  $dq$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ ,

$$d\vec{F} = dq [\vec{v}, \vec{B}] = I [d\vec{\ell}, \vec{B}]. \quad (15.21)$$

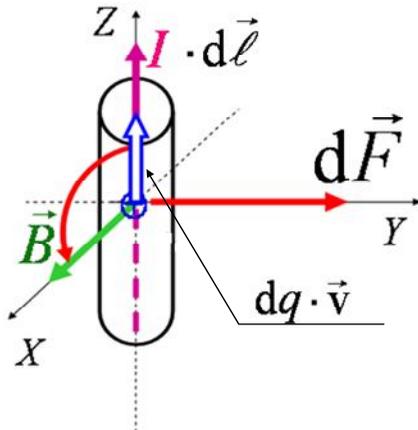


Рис. 15.10. Проводник с током в магнитном поле

Если рассматривать конечный проводник длиной  $\ell$ , то полную силу, действующую на такой проводник, можно получить интегрированием выражения (15.21):

$$|\vec{F}| = I \int_{\ell} \left| [d\vec{\ell}, \vec{B}] \right| = I \ell B \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{\ell}$  и  $\vec{B}$ . На рис. 15.10  $\alpha = 90^\circ$ .

### 15.8. Магнитное взаимодействие параллельных токов. Закон Ампера

Рассмотрим токи в металлических проводниках<sup>1</sup>. Вокруг металлического проводника нет суммарного электрического поля, так как электрические поля катионов и свободных электронов взаимно компенсируют друг друга и остается только магнитное поле, создаваемое движущимися электронами.

Магнитная сила, действующая на заряд  $q_2$  во втором проводнике со стороны магнитного поля  $B_1$  первого проводника (рис. 15.11), равна

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_M^{1 \rightarrow 2} &= q_2 [\vec{v}_2, \vec{B}_1], \\ \vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 [\vec{v}_1, \vec{r}]}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (15.22)$$

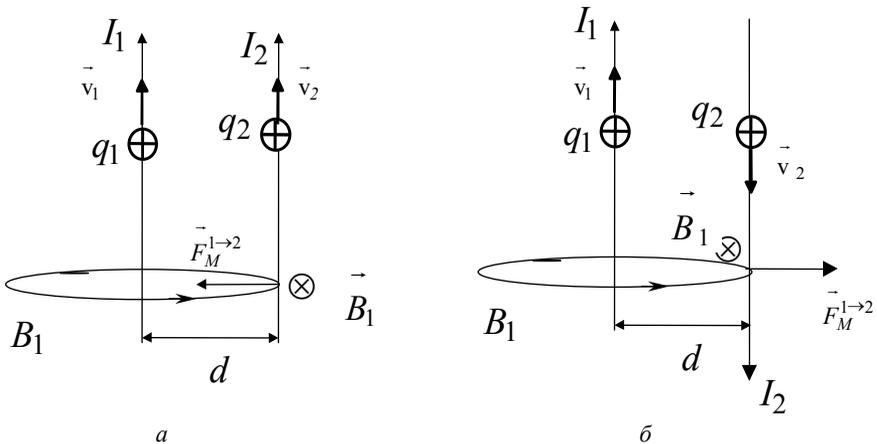


Рис. 15.11. Магнитное взаимодействие параллельных токов:  $a$  – притяжение;  $b$  – отталкивание

<sup>1</sup> За направление тока принято направление движения положительных зарядов.

Если  $|\vec{r}| = d$ , то *приведенная* магнитная сила (сила, отнесенная к единице длины проводника) равна

$$F^* = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d} \quad (15.23)$$

и измеряется в Н/м.

### 15.9. Электромагнитное взаимодействие потоков заряженных частиц (в вакууме)

Рассмотрим действие заряда  $q_1$ , движущегося со скоростью  $v_1 \ll c$ , на движущийся со скоростью  $v_2$  заряд  $q_2$ . Заряд  $q_1$  создает электрическое поле напряженностью

$$\vec{E}_1 = k \frac{q_1 \vec{r}_1}{r_1^3} \quad (15.24)$$

и магнитное поле

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} [\vec{v}_1, \vec{E}_1]. \quad (15.25)$$

Поэтому заряд  $q_2$  испытывает действие электрической силы

$$\vec{F}_3^{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1 \quad (15.26)$$

и магнитной силы

$$\vec{F}_M^{1 \rightarrow 2} = q_2 [\vec{v}_2, \vec{B}_1]. \quad (15.27)$$

В результате на заряд  $q_2$  действует электромагнитная сила Лоренца (рис. 15.12):

$$\vec{F}_{\text{эм}}^{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_3^{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_M^{1 \rightarrow 2}. \quad (15.28)$$

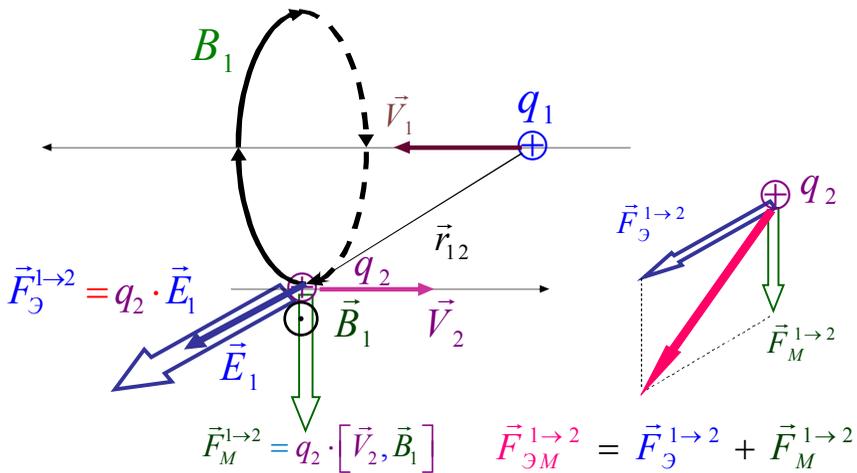


Рис. 15.12. Электромагнитное взаимодействие движущихся точечных зарядов

### Контрольные вопросы

1. Прямолинейный ток проходит по оси кругового тока. С какой силой взаимодействуют эти токи?
2. Какова главная особенность магнитного поля бесконечного соленоида?
3. Какой смысл вкладывается в понятие «магнито**статическое**» поле? Сравните с понятием «электр**статическое**» поле.
4. Как направлены магнитные силовые линии поля, созданного постоянным магнитом?
5. В чем состоит закон Ампера? Какова особенность сил электромагнитного взаимодействия?
6. Какая величина является силовой характеристикой магнитного поля? Дайте ее определение.
7. Что называется линиями магнитной индукции? Как устанавливается их направление? Нарисуйте линии магнитной индукции для простейших магнитных полей. Указывает ли силовая линия магнитного поля направление магнитной силы?
8. В чем состоит закон Био – Савара – Лапласа?
9. Как направлены силы взаимодействия между двумя длинными параллельными металлическими проводниками с током в случаях,

когда токи текут в одном направлении и в противоположных направлениях?

10. Чему равен и как направлен магнитный момент плоского контура с током?

11. От каких величин зависит магнитная индукция в точке, лежащей на оси бесконечно длинного соленоида?

12. Охарактеризуйте магнитное поле движущегося заряда.

13. Какой закон выражает вихревой характер магнитного поля? Докажите справедливость этого закона для какого-нибудь простейшего случая.

14. Найдите (в произвольной точке) результирующую индукцию магнитных полей, создаваемых тороидом и бесконечно длинным соленоидом.

### Примеры решения задач

**Пример 15.1.** Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно друг другу на расстоянии  $d = 10$  см друг от друга. По проводникам текут токи  $I_1 = 5$  А и  $I_2 = 5$  А в противоположных направлениях. Найдите числовое значение и направление вектора индукции  $\vec{B}$  магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии  $r_1 = r_2 = 10$  см от каждого проводника.

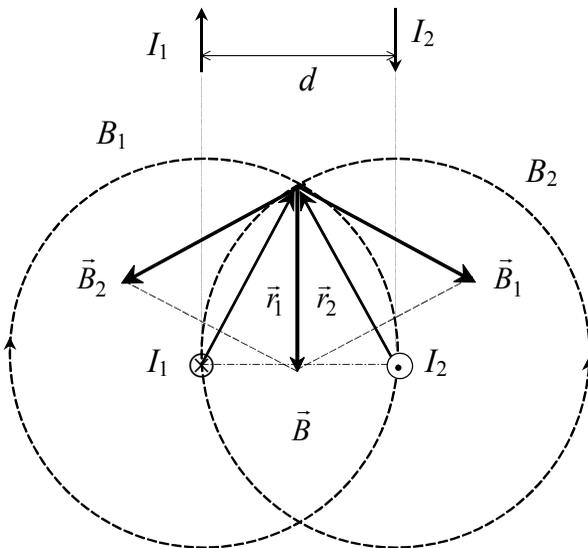


Рис. 15.13

### Решение

Токи  $I_1$  и  $I_2$ , текущие в проводниках, создают магнитные поля, силовые линии которых ( $B_1$  и  $B_2$ ) представляют собой окружности, охватывающие токи (рис. 15.13). Направления закрученности силовых линий определяются правилом правого винта. Векторы магнитной индукции  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  являются касательными к соответствующим силовым линиям, и поэтому перпендикулярны к радиусам-векторам  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ . Модули векторов магнитной индукции  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  могут быть найдены как по закону Био – Савара – Лапласа, так и с помощью теоремы о циркуляции:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{r_1} \text{ и } B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{r_2}. \quad (15.29)$$

Индукция результирующего магнитного поля определяется на основании принципа суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \quad (15.30)$$

Поскольку  $r_1 = r_2 = d$ , а токи равны между собой ( $I_1 = I_2 = I$ ), величина вектора  $\vec{B}$  равна

$$B = B_1 = B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{d}. \quad (15.31)$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot 5}{0,1} = 10^{-5} \text{ Тл}.$$

## Глава 16. ДВИЖЕНИЕ В СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

### 16.1. Движение в гравитационном поле

#### 16.1.1. Движение материальной точки в однородном гравитационном поле Земли

Напряженность гравитационного поля Земли  $\vec{G} = \vec{g} = \text{const}$  (рис. 16.1).

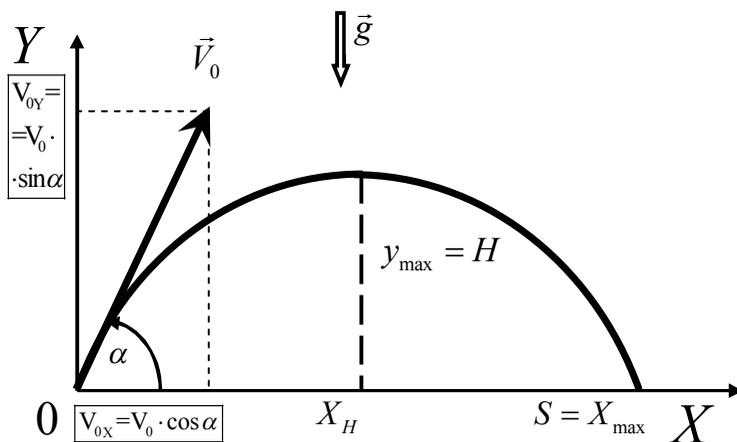


Рис. 16.1. Траектория движения материальной точки в однородном гравитационном поле

В соответствии со вторым законом Ньютона, если учитывать только силу тяжести,

$$m\vec{a} = m\vec{g}. \quad (16.1)$$

Полное ускорение материальной точки равно ускорению свободного падения (напряженности гравитационного поля Земли):

$$\vec{g} = \vec{a}. \quad (16.2)$$

В проекциях на ось  $X$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N F_{ix} = 0 &\Rightarrow ma_x = 0 \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\
 \int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x &= a_x \int_0^t dt = 0 \\
 v_x = v_{0x} &= v_0 \cos \alpha = \text{const}, \\
 x = v_{0x}t, \\
 x &= (v_0 \cos \alpha)t.
 \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

В проекциях на ось  $Y$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N F_{iy} = -mg &\Rightarrow ma_y = -mg \Rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g \\
 \int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y &= -g \int_0^t dt \\
 v_y = v_{0y} - gt &= v_0 \sin \alpha - gt \\
 v_y = \frac{dy}{dt} \\
 \int_0^t v_y dt &= \int_{y_0=0}^y dy \\
 y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}
 \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

### Анализ.

1. Уравнение траектории  $y = y(x)$ :

$$y = xt \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (16.5)$$

2. Дальность полета:

$$x_{\max} = S \text{ при } y(t_S) = 0,$$

где время полета

$$t_S = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (16.6)$$

тогда

$$x(t_S) = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = x_{\max} = S. \quad (16.7)$$

3. Высота подъема:

$$y_{\max} = H \text{ при } y'_t(t_H) = 0 \text{ (т.е. } v_y = 0),$$

где время подъема до максимальной высоты

$$t_H = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{1}{2}t_S, \quad (16.8)$$

тогда

$$y(t_H) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = y_{\max} = H. \quad (16.9)$$

4. Расчет радиусов кривизны траектории.

В наивысшей точке траектории тангенциальное ускорение (рис. 16.2)  $\vec{a}_\tau = 0$ , так как  $\sum_{i=1}^N F_{xi} = 0$ .

Поэтому нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v_{0x}^2}{R} = g. \quad (16.10)$$

Тогда радиус кривизны траектории в этой точке

$$R = \frac{v_{0x}^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}. \quad (16.11)$$

В начале координат (рис. 16.2) тангенциальное ускорение  $\vec{a}_\tau \parallel -\vec{v}_0$  и равно

$$a_\tau = g \sin \alpha. \quad (16.12)$$

Нормальное ускорение  $\vec{a}_n \perp \vec{v}_0$  и равно

$$a_n = g \cos \alpha. \quad (16.13)$$

Так как по определению  $a_n = \frac{v_0^2}{R}$ , то – с учетом (16.13) – радиус кривизны траектории в этой точке

$$R = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}. \quad (16.14)$$

В точке приземления значения  $a_n$ ,  $a_\tau$  и  $R$  те же, что и в начале координат.

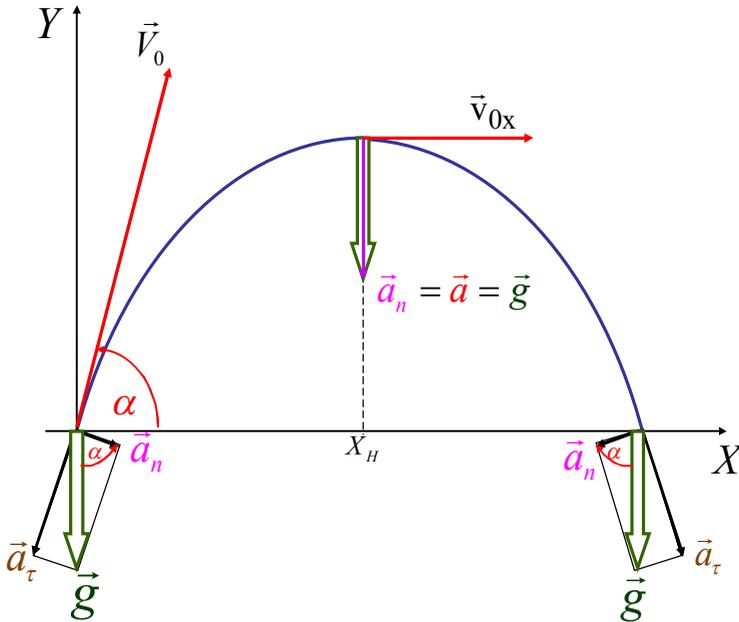


Рис. 16.2. Ускорения материальной точки

В процессе движения материальной точки в однородном поле тяготения выполняется закон сохранения энергии (рис. 16.3):

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{mv_{0x}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (16.15)$$

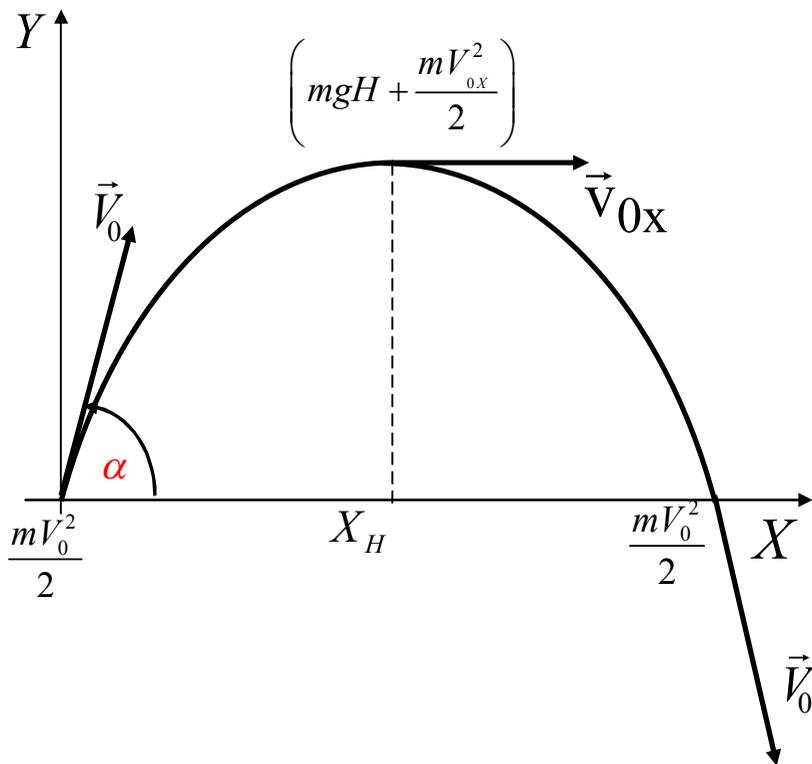


Рис. 16.3. Иллюстрация выполнения закона сохранения энергии

### **16.1.2. Движение материальной точки в центрально-симметричном гравитационном поле. Космические скорости**

Полная энергия космического аппарата на Земле:

$$E = U + K = m\varphi + K = -\gamma \frac{Mm}{R} + \frac{mV_{\text{ст}}^2}{2}, \quad (16.16)$$

где  $\varphi$  – потенциал гравитационного поля (см. табл. 9.1 и (10.8)) на поверхности Земли.

Полная энергия космического аппарата на орбите:

$$E = U + K = m\phi + K = -\gamma \frac{Mm}{r} + \frac{mv^2}{2}, \quad (16.17)$$

где  $\phi$  – потенциал гравитационного поля (см. табл. 9.1 и (10.8)) на орбите спутника Земли.

В процессе запуска космического аппарата на орбиту (16.4) выполняется закон сохранения энергии:

$$-\gamma \frac{Mm}{R} + \frac{mv_{\text{ст}}^2}{2} = -\gamma \frac{Mm}{r} + \frac{mv^2}{2}, \quad (16.18)$$

где  $m$  – масса космического аппарата;

$M$  – масса Земли;

$R$  – радиус Земли;

$v$  – орбитальная скорость;

$r$  – радиус орбиты;

$v_{\text{ст}}$  – стартовая скорость.

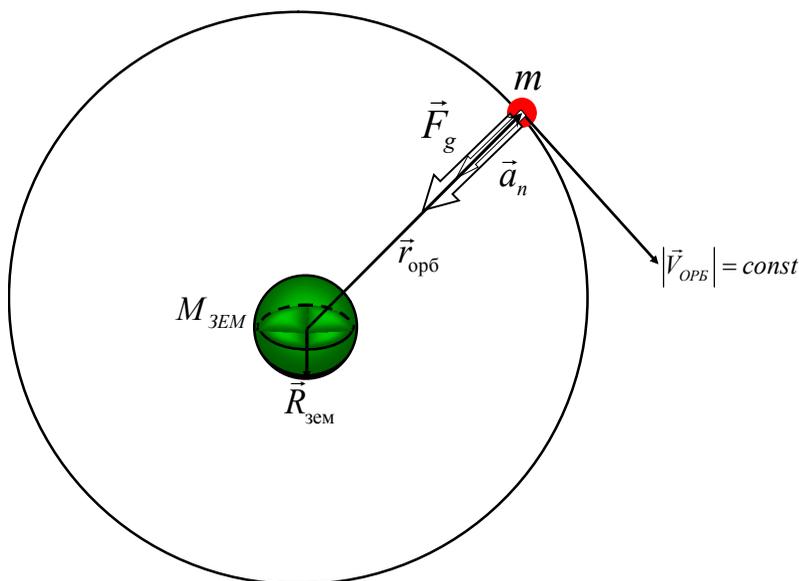


Рис. 16.4. Движение космического аппарата в поле тяготения Земли

В соответствии со вторым законом Ньютона и законом всемирного тяготения (см. табл. 8.1 и (10.4)) :

$$\left. \begin{aligned} -\gamma \frac{Mm}{r^2} &= -m \frac{v^2}{r}, \\ v^2 &= \gamma \frac{M}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (16.19)$$

После подстановки квадрата орбитальной скорости в уравнение закона сохранения энергии (16.18) получаем *стартовую* скорость космического аппарата:

$$v_{\text{ст}} = \sqrt{\gamma M \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right)}. \quad (16.20)$$

### Анализ.

1.  $v_{\text{ст}} = v_I$  – «*круговая*» космическая скорость – тело находится в поле тяготения Земли,  $r \approx R$ :

$$v_I = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{gR} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с}. \quad (16.21)$$

2.  $v_I < v_{\text{ст}} < v_{II}$  – «*эллиптическая*» скорость – тело находится в поле тяготения Земли.

3.  $v_{\text{ст}} = v_{II}$  – «*параболическая*» скорость – тело выходит из поля тяготения Земли,  $r \rightarrow \infty$ :

$$v_{II} = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{2gR} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ м/с}. \quad (16.22)$$

4.  $v_{II} < v_{\text{ст}} < v_{III}$  – «*гиперболическая*» скорость – тело находится в поле тяготения Солнца, выйдя из поля тяготения Земли.

5.  $v_{\text{ст}} = v_{III}$  – тело выходит из поля тяготения Солнца.

$$v_{III} = \sqrt{2\gamma \frac{M_{\text{С}}}{R_{\text{СЗ}}}} = 42,1 \cdot 10^3 \text{ м/с}, \quad (16.23)$$

где  $M_{\text{С}}$  – масса Солнца;

$R_{\text{СЗ}}$  – расстояние от Солнца до Земли<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> В этом случае рассматривается старт с орбиты Земли.

## 16.2. Движение в электромагнитном поле

### 16.2.1. Движение заряда в однородном электростатическом поле

Заряд  $q$  влетает со скоростью  $\vec{v}_0$  в однородное электростатическое поле  $\vec{E}$  плоского конденсатора, длина пластин которого равна  $\ell_1$  (рис. 16.5).

На заряд действует электрическая сила (см. табл. 9.1 и формулу (11.2)). Тогда по второму закону Ньютона:

$$q\vec{E} = m\vec{a}. \quad (16.24)$$

Пренебрегаем силой тяжести по сравнению с электрической силой<sup>2</sup>:  $m|\vec{g}| \ll q|\vec{E}|$ .

В проекциях на ось  $X$ :

$$\sum_{i=1}^N F_{xi} = 0 \Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow v_x = v_0 = \text{const} \Rightarrow x = v_0 t. \quad (16.25)$$

В проекциях на ось  $Y$ :

$$\sum_{i=1}^N F_{yi} = qE_y = -q|\vec{E}| \Rightarrow a_y = -\frac{qE}{m} \Rightarrow v_y = -\frac{qE}{m}t \Rightarrow y = -\frac{qE}{m} \frac{t^2}{2}. \quad (16.26)$$

После исключения времени  $t$  из уравнений движения (16.25) и (16.26) получим уравнение траектории движения тела:

$$y = \frac{qE}{m} \frac{x^2}{2v_0^2}. \quad (16.27)$$

---

<sup>2</sup> Здесь и далее в этой задаче  $E = |\vec{E}|$ .

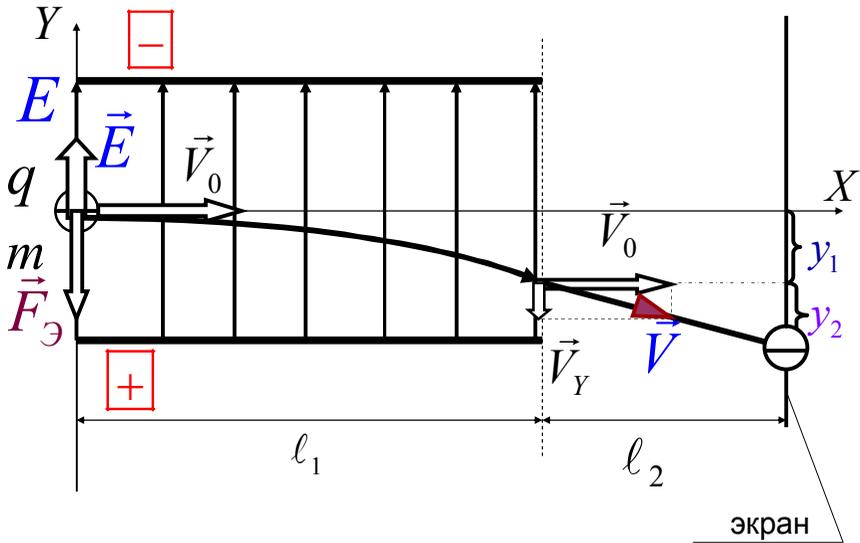


Рис. 16.5. Траектория движения заряда в поле плоского конденсатора

При  $x = \ell_1$ , т.е. на выходе из конденсатора, вертикальное отклонение заряда от первоначального направления:

$$y_1 = -\frac{qE}{m} \frac{\ell_1^2}{2v_0^2}. \quad (16.28)$$

Полное отклонение заряда (на экране, отстоящем от конденсатора на расстояние  $\ell_2$ )

$$y = y_1 + y_2,$$

где

$$y_2 = \ell_2 \frac{v_y}{v_0} = -\ell_2 \frac{qE}{m} \frac{\ell_1}{v_0^2}. \quad (16.29)$$

### 16.2.2. Захват заряда однородным магнитоэлектрическим полем

Заряд  $q$  влетает со скоростью  $\vec{v}_0$  в однородное постоянное магнитное поле  $\vec{B}$  перпендикулярно линиям магнитной индукции

(рис. 16.6). На движущийся в магнитном поле заряд действует магнитная сила (11.9):

$$\vec{F}_M = q[\vec{v}_0, \vec{B}].$$

Так как  $\vec{F}_M \perp \vec{v}_0$ , то мощность  $N = (\vec{F}_M, \vec{v}_0) = 0$ , т.е. магнитная сила не совершает работу и  $|\vec{v}_0| = \text{const}$ , а  $\vec{v}_0 \neq \text{const}$ .

Поэтому  $\vec{a}_\tau = 0$  и полное ускорение  $a \equiv a_n$ . В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\left. \begin{aligned} q[\vec{v}_0, \vec{B}] &= m\vec{a}_n, \\ qv_0B &= m\frac{v_0^2}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (16.30)$$

Радиус окружности (орбиты), по которой движется электрон, равен

$$R = \frac{mv_0}{qB}. \quad (16.31)$$

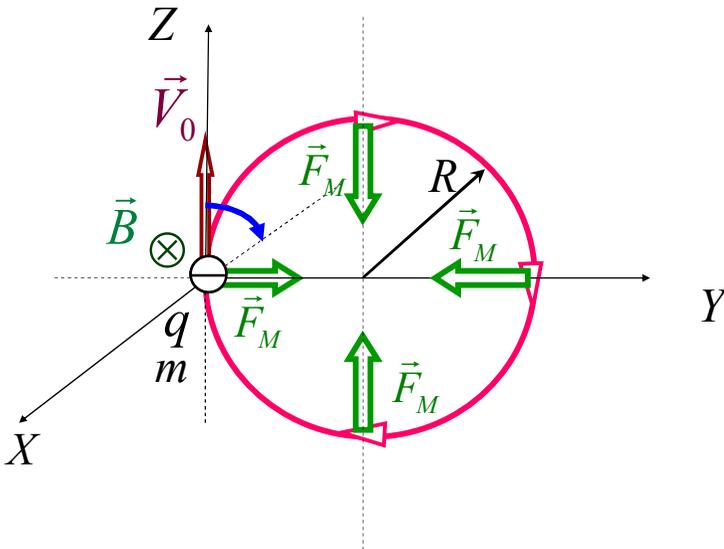


Рис. 16.6. Траектория движения заряда в однородном магнитном поле

Период движения по орбите равен

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (16.32)$$

Угловая частота равна

$$\omega = \frac{qB}{m}. \quad (16.33)$$

### 16.2.3. Движение заряда по винтовой линии в однородном магнитостатическом поле

Заряд  $q$  влетает со скоростью  $\vec{v}_0$  в однородное постоянное магнитное поле  $\vec{B}$  под углом  $\alpha$  к линиям магнитной индукции (рис. 16.7).

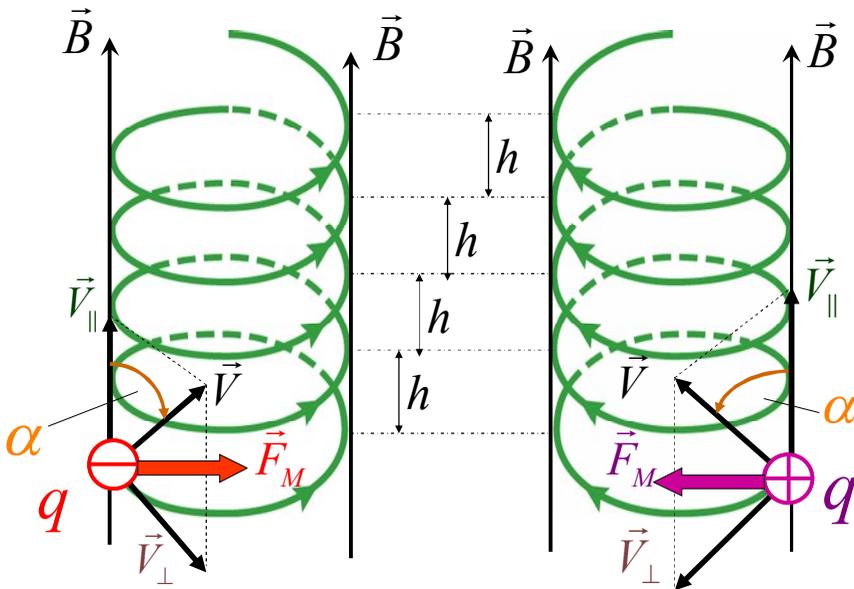


Рис. 16.7. Траектория движения заряда в магнитном поле:  
 а – отрицательный заряд; б – положительный заряд

Уравнение движения электрона определяется вторым законом Ньютона с учетом магнитной силы (11.9)

$$\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}] = m\vec{a}, \quad (16.34)$$

где  $q$  – заряд электрона.

Разложим скорость на составляющие, направленные параллельно и перпендикулярно вектору  $\vec{B}$ :

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha \text{ и } v_{\perp} = v_0 \sin \alpha. \quad (16.35)$$

При движении электрона со скоростью  $\vec{v}_{\parallel}$  вдоль силовых линий поля (вдоль вектора  $\vec{B}$ ) магнитная сила равна нулю, и поэтому движение электрона будет равномерным и прямолинейным.

При движении электрона со скоростью  $\vec{v}_{\perp}$  магнитная сила равна

$$q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}] = m\vec{a}_n, \quad (16.36)$$

или, в скалярном виде,

$$qv_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}. \quad (16.37)$$

Электрон будет двигаться по окружности радиусом

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}. \quad (16.38)$$

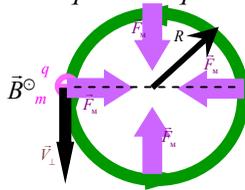


Рис.16.8. Движение отрицательного заряда в магнитном поле по винтовой линии (вид сверху)

В результате сложения этих двух движений электрон будет двигаться по винтовой линии радиусом  $R$  и шагом винта  $h$ :

$$h = v_{\parallel}T, \quad (16.39)$$

где  $T$  – период движения по окружности:

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}. \quad (16.40)$$

Таким образом получаем, что шаг винта будет равен:

$$h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}. \quad (16.41)$$

### Контрольные вопросы

1. Объясните, почему движение м.т. в однородном поле тяготения является примером частного закона сохранения импульса.
2. Объясните, почему в верхней точке траектории отсутствует тангенциальное ускорение м.т.
3. Запишите уравнение закона сохранения энергии для м.т., движущейся в однородном поле тяготения.
4. Примените закон сохранения энергии для нахождения скорости падения м.т. на Землю в задаче о движении в однородном поле тяготения.
5. Проведите сравнение задач о движении м.т. в однородном поле тяготения и в центральном поле тяготения Земли с задачами (см. 16.2) о движении заряда в однородном электрическом поле в конденсаторе и о захвате заряда однородным магнитным полем.
6. Покажите – как направлены векторы орбитального момента импульса в задачах о движении м.т. в однородном и центральном полях тяготения.
7. Как будет двигаться заряженная частица, влетевшая в однородное магнитное поле под углом к вектору  $\vec{B}$  отличным от нуля и  $\pi/2$ ?
8. Если заряженная частица, пролетая некоторую область пространства, не отклоняется от первоначального направления движения, можно ли утверждать, что магнитное поле в этой области пространства отсутствует?
9. Можно ли определить, каким полем вызвано отклонение пучка протонов, попавшего в некоторую область пространства – электрическим или магнитным?
10. Протон и электрон, имеющие одинаковую скорость, попадают в однородное магнитное поле, индукция которого  $\vec{B}$  перпендикулярна скорости зарядов. Как будут отличаться траектории заряженных частиц?
11. Чему равна работа силы, действующей на электрон, движущийся в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ ?

12. Покажите, что какой бы скоростью ни обладал электрон, влетающий в однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , и каков бы ни был угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{V}$  и  $\vec{B}$ , время  $T$ , за которое он опишет виток винтовой линии, будет одним и тем же.

13. Какова форма траектории электрона, движущегося в совпадающих по направлению электрическом и магнитном полях, в случаях, когда: 1) начальная скорость электрона направлена вдоль полей; 2) скорость электрона перпендикулярна к  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ?

### Примеры решения задач

**Пример 16.1.** Тело брошено под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Выведите кинематические уравнения движения и уравнение траектории. Определите начальную скорость  $v_0$  тела, если оно побывало на одной и той же высоте спустя  $t_1 = 1$  с и  $t_2 = 3$  с после начала движения, и величину этой высоты  $h$  (рис. 16.9). Найдите тангенциальное  $a_\tau$  и нормальное  $a_n$  ускорения в начальный момент движения.

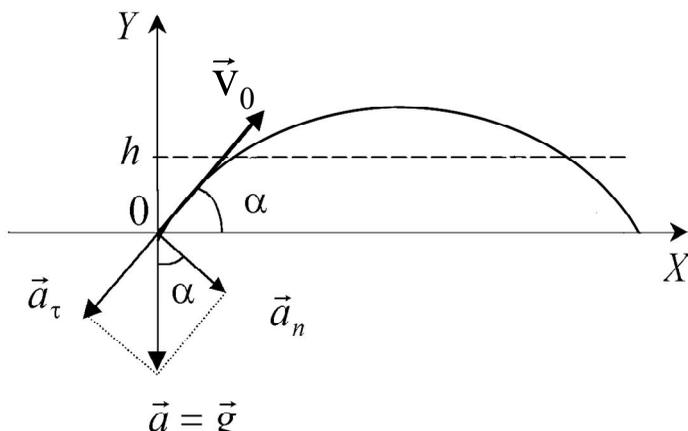


Рис. 16.9

#### Решение

По условию задачи

$$y(t_1) = y(t_2) = h. \quad (16.42)$$

Поскольку – в соответствии с (16.4) –

$$y(t) = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2},$$

то

$$(v_0 \sin \alpha)t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = (v_0 \sin \alpha)t_2 - \frac{gt_2^2}{2}. \quad (16.43)$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2 \sin \alpha}. \quad (16.44)$$

Тогда в соответствии с (2)

$$h = y(t_1) = \frac{g(t_1 + t_2)t_1}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1 t_2}{2}. \quad (16.45)$$

Нормальное и тангенциальное ускорения будут определены по (16.12) и (16.13):

$$a_n = g \cos \alpha,$$

$$a_\tau = g \sin \alpha.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$v_0 = \frac{9,81(1+3)}{2 \sin 60^\circ} = 22,7 \text{ м/с},$$

$$a_n = 9,81 \cos 60^\circ = 4,91 \text{ м/с}^2,$$

$$a_\tau = 9,81 \sin 60^\circ = 8,50 \text{ м/с}^2,$$

$$h = \frac{9,81 \cdot 1 \cdot 3}{2} = 14,7 \text{ м}.$$

**Пример 16.2.** Спутник движется по круговой орбите на высоте  $h = 500$  км над поверхностью Марса. Найдите орбитальную скорость спутника, если масса Марса равна  $M = 6,4 \cdot 10^{23}$  кг, а радиус планеты равен  $R_M = 3,4$  Мм.

**Решение**

В соответствии с условием задачи необходимо определить круговую (т.е. I космическую) скорость спутника. Используем формулу (16.20):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}},$$

где  $r = R_m + h$ .

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,4 \cdot 10^{23}}{3,4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5}} = 3,31 \text{ км/с}.$$

**Пример 16.3.** Протон влетает в плоский конденсатор со скоростью  $v = 3,3 \cdot 10^6$  м/с под углом  $\alpha = 75^\circ$  к пластинам вблизи одной из них (рис. 16.10). Напряженность поля конденсатора  $E = 6,25 \cdot 10^5$  В/м считайте постоянной. **На сколько** максимально возможная длина пластин  $\ell$  должна превышать расстояние  $d$  между ними, чтобы протон, коснувшись положительно заряженной пластины, вылетел из конденсатора вблизи отрицательно заряженной пластины?

**Решение**

Движение протона описывается уравнением второго закона Ньютона, где  $\vec{F} = q\vec{E}$ , а силой тяжести пренебрегаем по сравнению с величиной электрической силы.

Поскольку  $F_y = 0$  и  $a_x = 0$ , то движение протона вдоль оси  $X$  будет равномерным и прямолинейным (16.3).

Поскольку  $F_y = -qE$  и  $a_y = -\frac{qE}{m}$ , то движение протона вдоль оси

$Y$  будет равнопеременным, Проекции скорости на оси координат можно определить по аналогии с (12.4), где вместо силы тяжести действует электрическая сила (11.2):

$$v_y = v_0 \sin \alpha - \frac{qE}{m} t,$$

$$y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{qE}{2m} t^2.$$

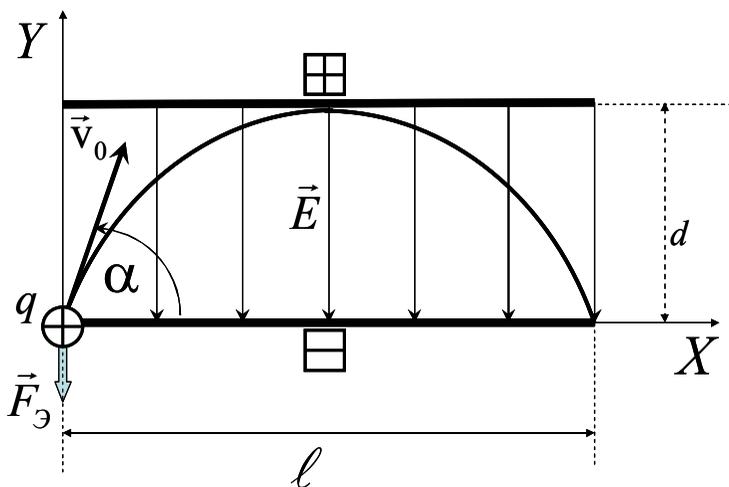


Рис. 16.10

Максимальная высота  $y_{\max} = d$  достигается при  $v_y = 0$ , т.е. когда

$$t_d = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qE}. \quad (16.46)$$

Тогда

$$y_{\max} = d = \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2qE}. \quad (16.47)$$

Дальность полета протона достигается, когда вторично  $y = 0$ , т. е. когда

$$t_\ell = \frac{2mv_0 \sin \alpha}{qE}. \quad (16.48)$$

Таким образом,

$$x_{\max} = \frac{mv_0^2}{qE} \sin 2\alpha = \ell. \quad (16.49)$$

Следовательно, искомая разность  $(\ell - d)$  равна

$$(\ell - d) = \frac{mv_0^2}{qE} \sin 2\alpha - \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2qE} = \frac{mv_0^2}{qE} \left( \sin 2\alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right). \quad (16.50)$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$(\ell - d) = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (3,3 \cdot 10^6)^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,25 \cdot 10^5} \left( \sin 150^\circ - \frac{\sin^2 75^\circ}{2} \right) = 6,09 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

**Пример 16.4.** Электрон, имеющий скорость  $v = 8 \cdot 10^8$  см/с, влетает в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 3,14 \cdot 10^{-2}$  Тл под углом  $\alpha = 30^\circ$  к вектору  $\vec{B}$  (рис. 16.7, а). Определите радиус  $R$  и шаг  $h$  винтовой линии, по которой будет двигаться электрон.

**Решение**

Разложим скорость электрона на две составляющие: параллельную линиям индукции и перпендикулярную им (16.35).

Движение заряда со скоростью  $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{B}$  – равномерное прямолинейное движение вдоль  $\vec{B}$ , так как  $F_M = 0$ . При этом  $\vec{v}_\parallel = \text{const}$ .

Движение заряда со скоростью  $\vec{v}_\perp \perp \vec{B}$  – равномерное движение по окружности.

Результатом сложения двух одновременных движений со скоростями  $\vec{v}_\perp$  и  $\vec{v}_\parallel$  является движение по винтовой линии. В соответствии с формулами (16.38) – (16.41):

шаг винтовой линии:  $h = v_\parallel T$ ,

радиус винтовой линии:  $R = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB}$ ,

период движения по окружности:  $T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}$ .

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$R = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,14 \cdot 10^{-2}} = 7,25 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$h = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^6 \cos 30^\circ}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,14 \cdot 10^{-2}} = 7,89 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

## Глава 17. ВЕЩЕСТВО В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 17.1. Проводники

Основной критерий, определяющий поведение различных веществ в электростатическом (или – в общем случае – в электрическом) поле – наличие в них зарядов и характер их возможного движения. В этой связи возможно разделить все вещества на два класса: *проводники* и *диэлектрики*. В проводниках *свободные заряды* могут передвигаться (электроны в металле), в диэлектриках *нет свободных зарядов*, и их движение возможно только в пределах молекул.

#### 17.1.1. Проводники в электростатическом поле

Поместим незаряженный проводник в однородное постоянное электрическое поле (поле двух разноименно заряженных бесконечных пластин) (рис. 17.1, *а*). Под действием сил электрического поля свободные заряды в проводнике придут в движение. Нас интересует не кратковременный ( $\sim 10^{-10}$  с) процесс их движений, а конечное равновесное состояние (рис. 17.1, *б*).

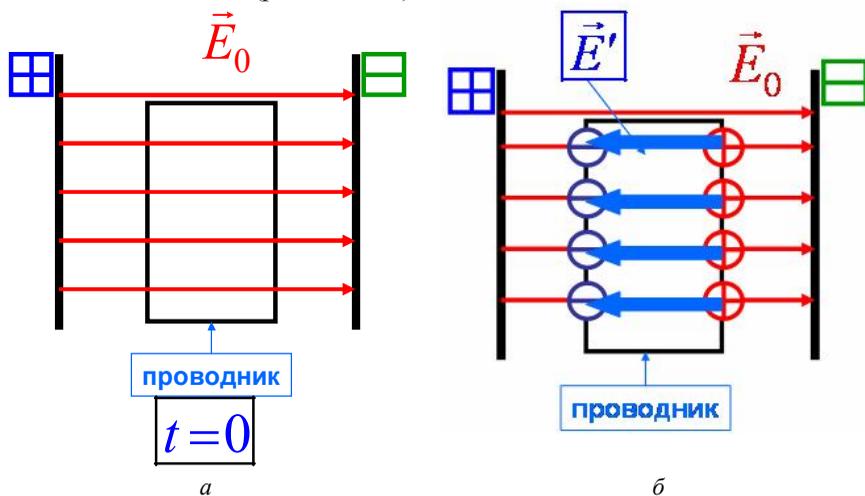


Рис. 17.1. Проводник в электрическом поле

Происходит разделение зарядов внутри проводника. Если проводник изолирован, то он, оставаясь в целом электронейтральным, приобретает свойства электрического диполя. Если соединить проводник с другим проводником (например, заземлить), то избыток заряда одного знака в силу электростатического отталкивания уйдет, и проводник станет заряженным. Явление перераспределения зарядов проводника в электрическом поле носит название *электростатической индукции*. Условие равновесия зарядов внутри проводника требует, чтобы эффективное (результатирующее) поле внутри проводника

$$\vec{E}_{\text{эфф}} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0, \quad (17.1)$$

где  $\vec{E}_0 = \text{const}$  – напряженность внешнего поля;

$\vec{E}'$  – поле внутри проводника, образующееся при разделении зарядов.

Тот же результат следует из теоремы Гаусса:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{\text{эфф}} &= 0 \\ \Phi_E &= \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV = 0, \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

так как объемная плотность  $\rho$  зарядов внутри проводника (после происшедшего разделения зарядов) равна нулю.

Таким образом, электрическое поле  $\vec{E}$  внутрь проводника не проникает. На этом основана электростатическая защита («экранирование»).

### 17.1.2. Електроємкост

Напряженность однородного электрического поля, с учетом связи напряженности и потенциала (см. табл. 9.1), равна

$$E = \frac{U}{d}, \quad (17.3)$$

где

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (17.4)$$

разность потенциалов между двумя разноименно заряженными бесконечными плоскостями.

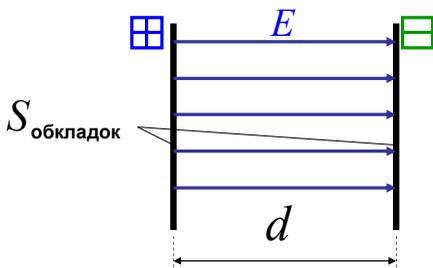


Рис. 17.2. Электрическое поле в плоском конденсаторе

Систему двух разноименно заряженных проводников называют *конденсатором*, а каждый проводник – *обкладкой*. (рис. 17.2). Тогда величину  $U$  можно назвать *падением напряжения на обкладках конденсатора*. Поле внутри *плоского* конденсатора, образованного двумя плоскостями (пластинами) можно считать *однородным* – вдали от краев пластин.

Напряжение  $U$  (падение напряжения) численно равно работе, необходимой для переноса *единицы* заряда с одной пластины на другую:

$$U = \frac{A}{Q} = \frac{Fd}{Q} = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon S} d. \quad (17.5)$$

Пропорциональность  $U \sim Q$  соблюдается для любых двух разноименно заряженных проводников в пространстве. Обычно записывают:

$$Q = CU, \quad (17.6)$$

где  $C$  называют *емкостью*. Величина емкости  $C$  численно равна заряду, сообщенному проводнику повышает его потенциал на единицу.

Понятие емкости применимо только к проводникам, так как все точки проводника имеют один и тот же потенциал ( $C = \frac{Q}{U}$  – величина постоянная для данного проводника).

Емкость *плоского* конденсатора (с диэлектриком, характеризующимся диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ) равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \quad (17.7)$$

где  $S$  – площадь пластины конденсатора;  
 $d$  – расстояние между пластинами.

Емкость *цилиндрического* конденсатора, образованного двумя цилиндрами радиусами  $R_1$  и  $R_2$  соответственно, с диэлектриком, характеризующимся диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , равна (в пересчете на единицу длины цилиндров)

$$C^* = \frac{C}{\ell} = \frac{\varepsilon}{2k \ln(R_2/R_1)} \quad (17.8)$$

Иногда говорят о емкости *уединенного* проводника. Так, емкость сферы равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad (17.9)$$

(фактически, вторая обкладка – это сфера бесконечного радиуса).

Емкость уединенного проводника зависит от его формы и размеров и не зависит ни от материала проводника, ни от его агрегатного состояния, ни от формы и размеров возможных полостей внутри проводника, так как избыточные заряды распределены только на внешней поверхности проводника.

Единица емкости в СИ:

кулон/вольт = фарад.

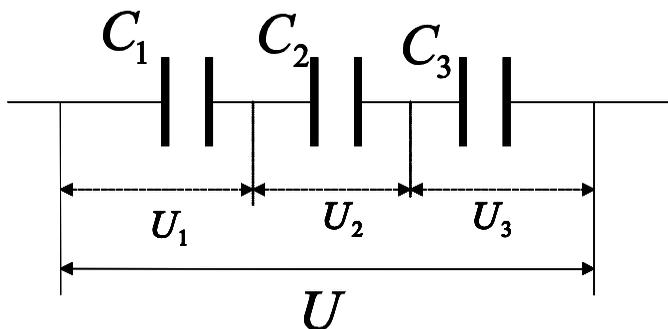


Рис. 17.3. Последовательное соединение конденсаторов

При *последовательном* соединении конденсаторов (разноименными пластинами – рис. 17.3) емкость системы конденсаторов будет равна

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}, \quad (17.10)$$

так как заряды на каждом конденсаторе равны между собой:

$$q_1 = q_2 = q_3,$$

а падение напряжения на системе конденсаторов равно сумме падений напряжения на каждом конденсаторе:

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

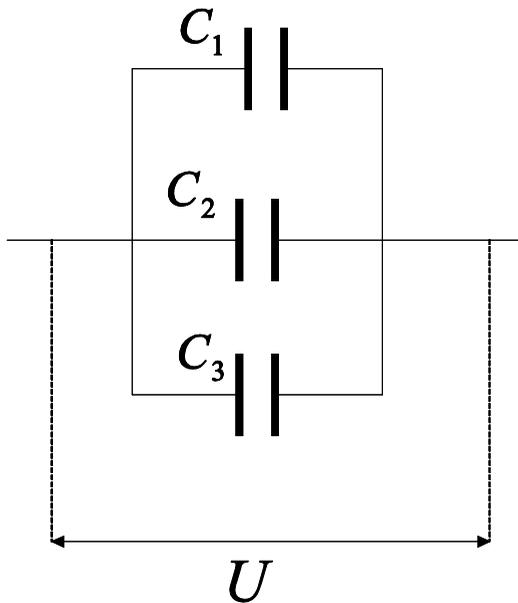


Рис. 17.4. Параллельное соединение конденсаторов

При *параллельном* соединении конденсаторов (одноименными пластинами – рис.17.4) емкость системы конденсаторов будет равна

$$C = C_1 + C_2 + C_3, \quad (17.11)$$

так как падение напряжения на каждом конденсаторе одинаково:

$$U_1 = U_2 = U_3,$$

а заряд системы конденсаторов равен сумме зарядов на каждом конденсаторе:

$$q = q_1 + q_2 + q_3.$$

## 17.2. Диэлектрики

Диэлектрики – класс веществ, в которых нет свободных носителей заряда.

В диэлектриках все заряженные частицы (в том числе и электроны) могут перемещаться только на расстояния, сравнимые с размерами атома или молекулы.

В диэлектриках заряды *связаны* – в атомах и молекулах. Разделяются диэлектрики на *полупроводники* и *изоляторы*. Структурными элементами диэлектрика являются атомы и молекулы.

Атомы и молекулы нейтральны, но могут быть представлены моделью электрического диполя.

### 17.2.1. Классификация диэлектриков

Молекулы могут быть *полярными* и *неполярными*.

#### 17.2.1.1. Неполярные диэлектрики

*Диэлектрики, в молекулах которых центры тяжести положительных зарядов (ядер) и отрицательных зарядов (электронов) при отсутствии внешнего электрического поля совпадают, называются неполярными.*

Неполярный диэлектрик есть совокупность неполярных молекул.

Центры тяжести положительного (+) и отрицательного (–) зарядов в молекуле совмещены (рис. 17.5). Молекула не является диполем в отсутствие внешнего электрического поля

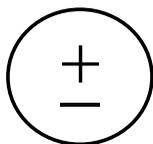


Рис. 17.5. Неполярная молекула

Дипольный электрический момент каждой молекулы равен нулю

$$\left(\vec{P}_e\right)_i = 0, \quad (17.12)$$

и векторная сумма дипольных моментов всех молекул тоже равна нулю

$$\vec{P}_e = \sum_i \left(\vec{P}_e\right)_i = 0. \quad (17.13)$$

Во внешнем электростатическом поле отличном от нуля ( $\vec{E}_0 \neq 0$ ) происходит *индуцированная* поляризация неполярного диэлектрика: наводится (индуцируется) дипольный момент  $\left(\vec{P}_e\right)_i$ , т.е. молекула становится *диполем* (рис. 17.6).

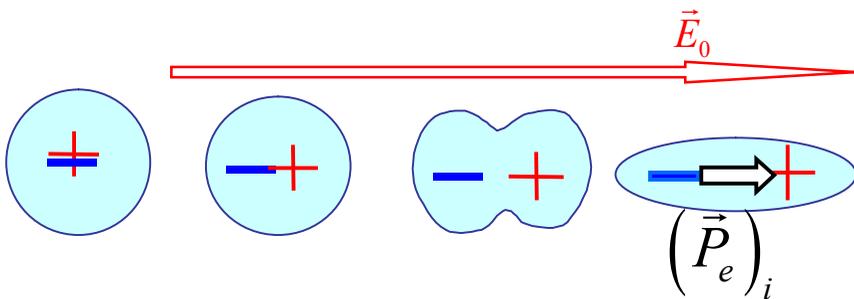


Рис. 17.6. Процесс индуцированной поляризации неполярной молекулы во внешнем поле  $E_0$

Эти диполи существуют до тех пор, пока есть внешнее поле. Сами по себе они существовать не могут.

Суммарный индуцированный дипольный момент неполярного диэлектрика выстраивается по внешнему полю (рис. 17.7).



Рис. 17.7. Индуцированный дипольный момент

Ориентация дипольных моментов не зависит от температуры (рис. 17.8), так как определяется (управляется) внешним электростатическим полем.

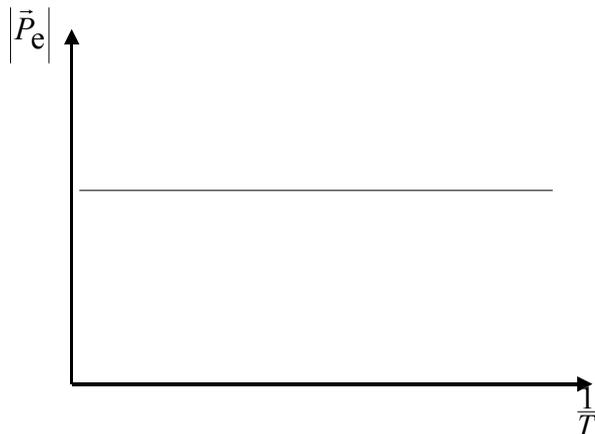


Рис. 17.8. Зависимость индуцированного дипольного момента от температуры

### 17.2.1.2. Полярные диэлектрики

Диэлектрики, в молекулах которых центры тяжести положительных зарядов (ядер) и отрицательных зарядов (электронов) при отсутствии внешнего электрического поля **не совпадают**, называются **полярными**. Полярный диэлектрик есть совокупность полярных молекул – **электрических диполей**.

Дипольный электрический момент полярной молекулы (рис. 17.9) – в отсутствие внешнего поля – отличен от нуля:

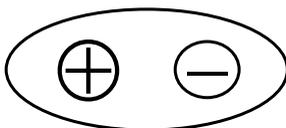


Рис. 17.9. Полярная молекула – электрический диполь

$$(\vec{P}_e)_i \neq 0. \quad (17.14)$$

Но в отсутствие внешнего электрического поля все диполи разориентированы (рис. 17.10), и поэтому векторная сумма дипольных моментов всех молекул, как в неполярных диэлектриках, равна нулю:

$$\vec{P}_e = \sum_i (\vec{P}_e)_i = 0 \quad (17.15)$$

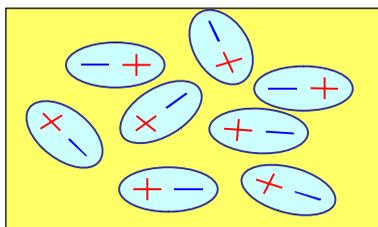


Рис. 17.10. Полярные молекулы (диполи) в полярном диэлектрике в отсутствие внешнего поля

Во внешнем однородном электростатическом поле  $\vec{E}_0$  в полярном диэлектрике происходит *ориентационная* поляризация (рис. 17.11).

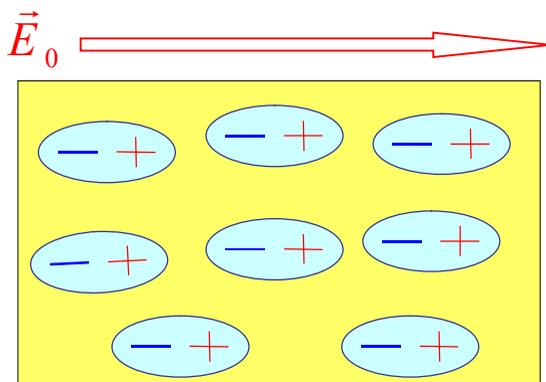


Рис. 17.11. Ориентационная поляризация полярного диэлектрика

Векторная сумма дипольных моментов всех молекул полярного диэлектрика во внешнем поле отлична от нуля:

$$\vec{P}_e = \sum_i (\vec{P}_e)_i \neq 0. \quad (17.16)$$

При нагреве полярного диэлектрика молекулы разориентируются вследствие теплового движения. Дипольные моменты молекул компенсируют друг друга, и суммарный дипольный момент полярного диэлектрика стремится к нулю (рис. 17.12).

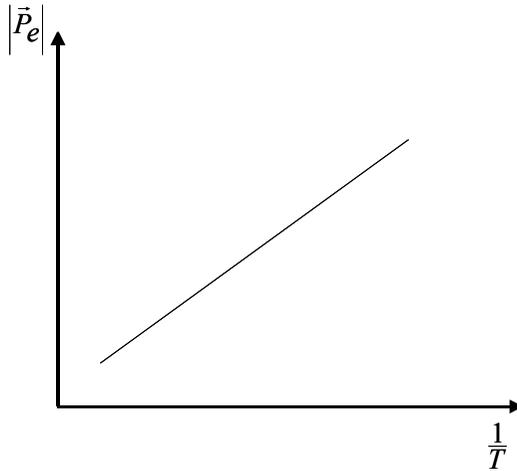


Рис. 17.12. Зависимость дипольного момента полярного диэлектрика от температуры

### **17.2.2. Электрический диполь во внешнем однородном электростатическом поле (в вакууме)**

Во внешнем однородном электрическом поле  $\vec{E}$  на заряды  $q_1$  и  $q_2$  действуют силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , образующие пару сил  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  (рис. 17.13):

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F. \quad (17.17)$$

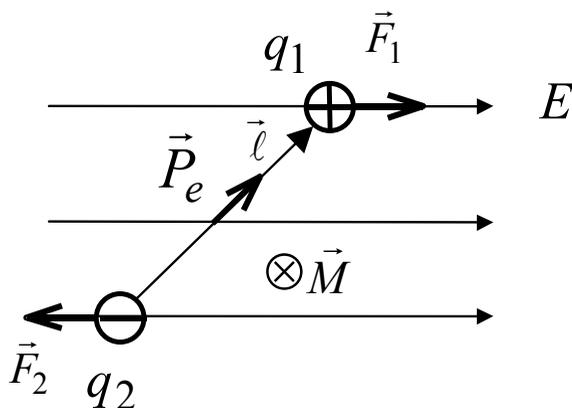
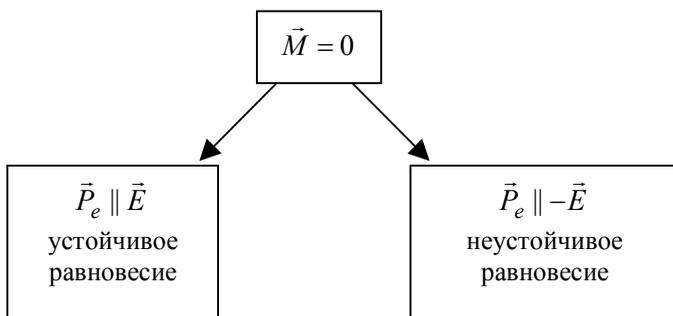


Рис. 17.13. Электрический диполь во внешнем поле  $\vec{E}$

Момент пары сил равен

$$\vec{M} = [\vec{l}, \vec{F}] = [\vec{l}, q\vec{E}] = [\vec{l}q, \vec{E}] = [\vec{P}_e, \vec{E}]. \quad (17.18)$$

Равновесие для диполя в поле наступает, когда момент пары сил равен нулю.



### 17.2.2.1. Диполь ориентирован по внешнему полю

При выводе диполя из этого состояния (рис. 17.14)  $d\varphi \parallel -\vec{M}$ ; момент сил поля

$$M_\varphi = -P_e E \sin \varphi. \quad (17.19)$$

## Момент внешних сил

$$M'_\varphi = \frac{dU}{d\varphi} = -M_\varphi. \quad (17.20)$$

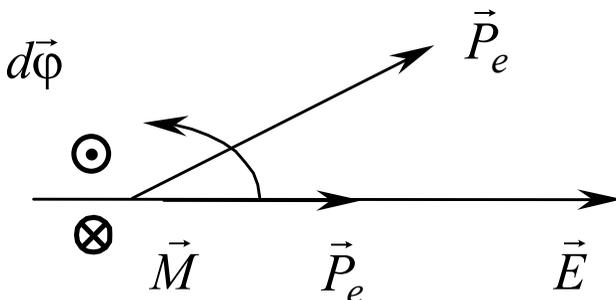


Рис. 17.14. Диполь выводится из состояния устойчивого равновесия

При повороте диполя на угол  $180^\circ$

$$\int_1^2 dU = -\int_0^\pi M_\varphi d\varphi; \quad (17.21)$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \int_0^\pi P_e E \sin \varphi d\varphi = -P_e E \cos \varphi \Big|_0^\pi = -P_e E (-1 - 1) = 2P_e E > 0. \quad (17.22)$$

Так как потенциальная энергия взаимодействия диполя и поля увеличивается, то этот процесс энергетически не выгоден и вывод диполя из состояния устойчивого равновесия возможен только за счет работы внешних сил.

### 17.2.2.2. Диполь ориентирован против внешнего поля

При выходе диполя из этого состояния (рис. 17.15)  $d\vec{\varphi} \parallel \vec{M}$ ; момент сил поля

$$M_\varphi = P_e E \sin \varphi, \quad (17.23)$$

в то же время

$$M_\varphi = \frac{dU}{d\varphi}. \quad (17.24)$$

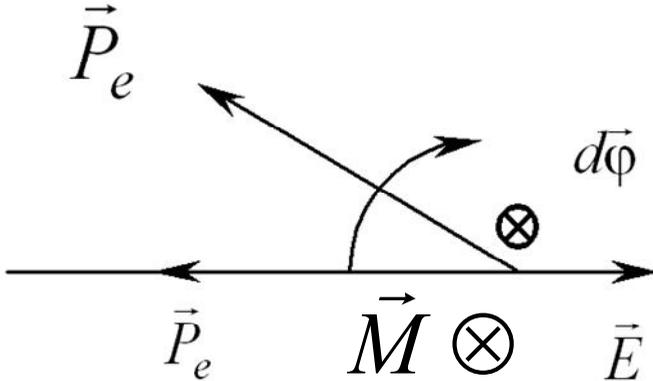


Рис. 17.15. Диполь возвращается в состояние устойчивого равновесия

При повороте диполя на угол  $180^\circ$

$$\int_1^2 dU = \int_\pi^0 M_\varphi d\varphi, \quad (17.25)$$

$$\Delta U = \int_1^2 dU = \int_\pi^0 M_\varphi d\varphi = \int_\pi^0 P_e E \sin \varphi d\varphi = -P_e E \cos \varphi \Big|_\pi^0 = -2P_e E < 0. \quad (17.26)$$

Так как потенциальная энергия взаимодействия диполя и поля уменьшается, то этот процесс энергетически выгоден, и выход диполя из состояния неустойчивого равновесия возможен за счет работы внутренних сил поля.

### 17.2.3. Поле в диэлектриках. Диэлектрическая проницаемость и восприимчивость

Рассмотрим две бесконечные параллельные разноименно заряженные плоскости. Пусть создаваемое ими в вакууме поле характеризуется напряженностью  $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность

сторонних зарядов, которые находятся за пределами диэлектрика. Внесем в это поле пластину из однородного изотропного диэлектрика и расположим ее так, как показано на рис. 17.16. Под действием поля диэлектрик поляризуется, и на его поверхностях появятся *связанные* заряды плотности  $\sigma'$ . Эти заряды создадут внутри пластины однородное поле, напряженность которого равна  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$ . Поляризация диэлектрика обусловлена полем внутри диэлектрика

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (17.27)$$

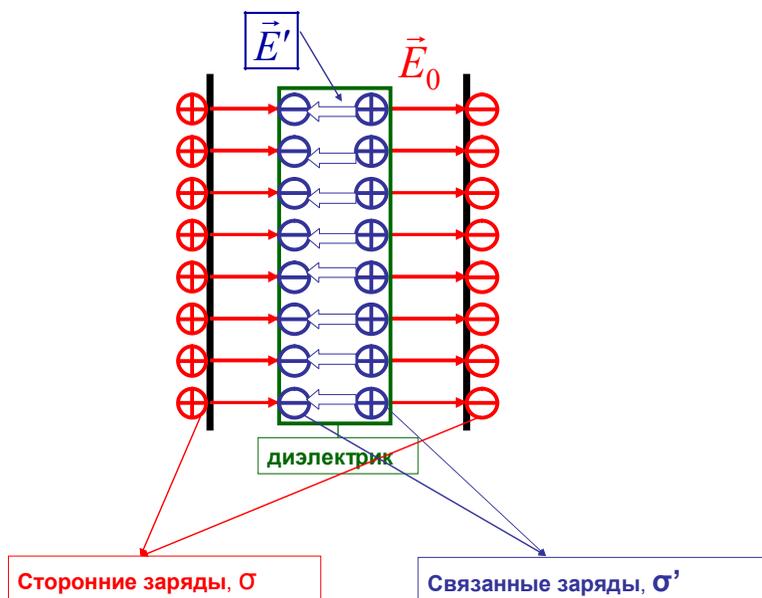


Рис. 17.16. Поле в диэлектрике

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma - \sigma'), \quad (17.28)$$

так как поля сторонних и связанных зарядов направлены навстречу друг другу.

Нам известно, что напряженность поля в диэлектрике, находящемся в плоском конденсаторе, при поверхностной плотности сторонних зарядов  $\sigma$  равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (17.29)$$

Из формул (17.28) и (17.29) следует, что – поскольку  $\vec{E}' \parallel -\vec{E}_0$  – поле в диэлектрике *ослабляется* в  $\epsilon$  раз. В рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  показывает, во сколько раз ослабляется поле.

Плотность связанных зарядов оказывается всегда меньше плотности сторонних зарядов, создающих в процессе поляризации эти связанные заряды – в соответствии с формулой (17.28) -

$$\sigma' = \sigma \frac{\epsilon - 1}{\epsilon},$$

в противном случае поле  $\vec{E}$  в диэлектрике изменило бы знак по сравнению с полем  $\vec{E}_0$ , его создающим.

Величина  $\epsilon$ , называемая *диэлектрической проницаемостью*, есть показывает отношение

$$\epsilon = \left( \frac{E_0}{E} \right). \quad (17.30)$$

Ясно, что всегда  $\epsilon \geq 1$  ( $\epsilon = 1$  в вакууме).

Диэлектрическая проницаемость диэлектрика

$$\epsilon = 1 + \chi_e, \quad (17.31)$$

где  $\chi_e$  – *диэлектрическая восприимчивость* диэлектрика.

*Удельная поляризованность* диэлектрика (*вектор поляризации*) равна

$$\vec{P}_e = \frac{\sum_i (\vec{P}_e)_i}{\Delta V} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}. \quad (17.32)$$

где  $\Delta V$  – объем диэлектрика.

### 17.2.4. Сегнетоэлектрики

Этот класс полярных диэлектриков получил свое наименование по веществу  $KNaC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$  (сегнетова соль), в котором были найдены *гистерезисные* свойства. Из-за аналогии в поведении во внешних полях ферромагнетиков и сегнетоэлектриков, последние иногда называют «*ферроэлектриками*».

В отсутствие внешнего электрического поля в сегнетоэлектрике существуют области спонтанной поляризации, называемые *доменами* (рис. 17.17).

Важной особенностью сегнетоэлектриков является зависимость диэлектрической проницаемости от величины напряженности эффективного электрического поля. При этом величина диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков может достигать очень больших значений – до 10 000.

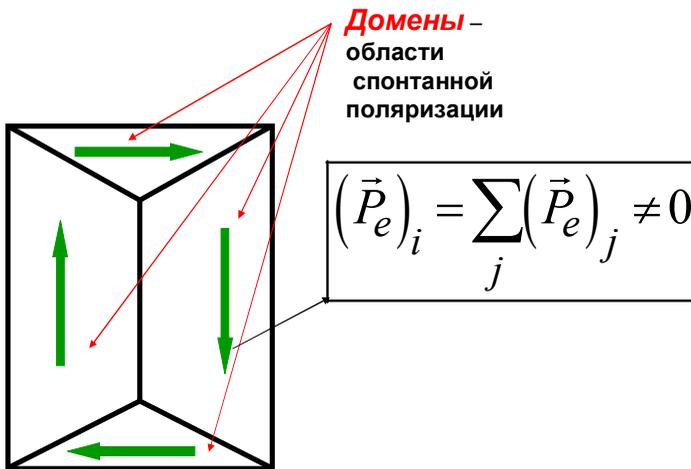


Рис. 17.17. Модель доменной структуры в сегнетоэлектрике

В каждом  $i$ -м домене *вектор поляризации*, или *поляризованность* отличен от нуля:

$$(\vec{P}_e)_i = \sum_j (\vec{P}_e)_j \neq 0, \quad (17.33)$$

(суммирование ведется по составляющим домен  $j$ -м диполям). Но в отсутствие внешнего электрического поля вектор поляризации кри-

сталла сегнетоэлектрика в целом равен нулю, так как дипольные моменты всех доменов компенсируют друг друга:

$$\vec{P}_e = \sum_i (\vec{P}_e)_i = 0. \quad (17.34)$$

Поместим сегнетоэлектрик во внешнее однородное электростатическое поле (рис. 17.19, а).

На первом этапе (I) меняется величина дипольных моментов в каждом домене, особенно в тех, которые по ориентации ближе к направлению внешнего поля. Иначе говоря, происходит смещение границ доменов (рис. 17.18 и 17.19, б).

На втором этапе (II) происходит изменение ориентации (вращение) дипольных моментов в каждом домене – они ориентируются по полю (рис. 17.18 и 17.19, в).

На третьем этапе (III) весь сегнетоэлектрик превращается в один домен, вектор поляризации которого направлен по полю. Происходит насыщение поляризованности сегнетоэлектрика (рис. 17.18 и 17.19, г).

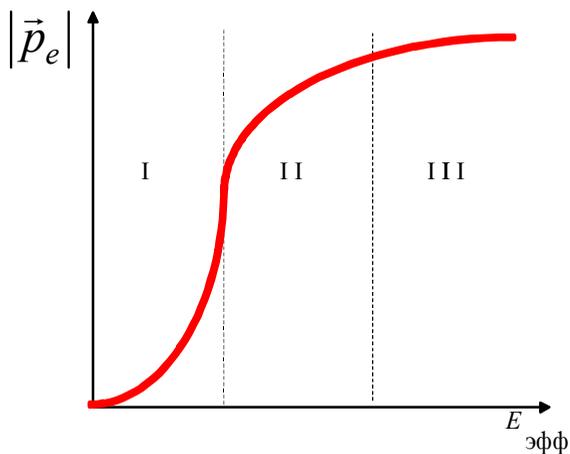


Рис. 17.18. Зависимость поляризованности (модуля вектора поляризации) кристалла диэлектрика от величины результирующего (эффективного) поля

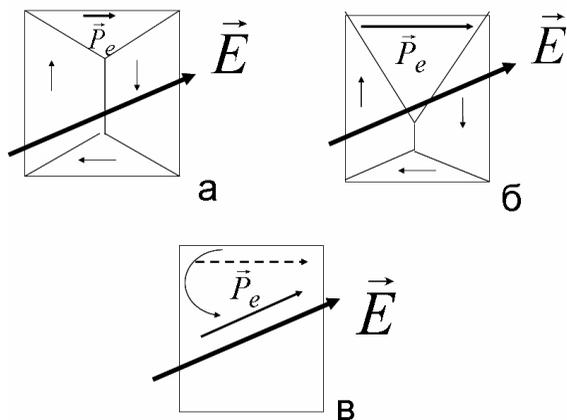


Рис. 17.19. Изменение доменной структуры сегнетоэлектрика в процессе поляризации во внешнем электрическом поле

Начнем теперь уменьшать величину внешнего электростатического поля (рис. 17.20). Величина эффективного поля одновременно тоже будет уменьшаться.

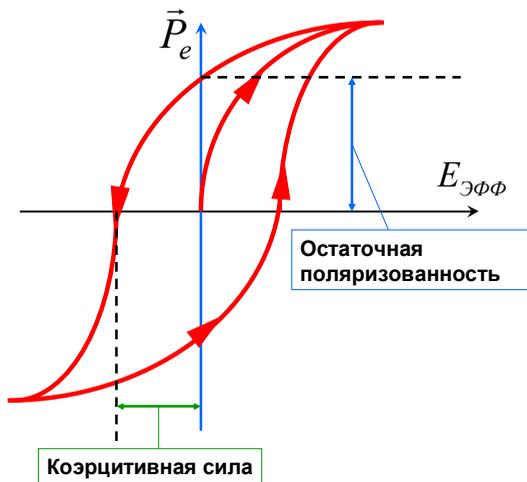


Рис. 17.20. Петля сегнетоэлектрического гистерезиса

Поляризованность кристалла сегнетоэлектрика (величина вектора поляризации) начнет падать, кривая пойдет вниз, но не по тому пути, по которому происходил рост. В результате при уменьшении напряженности поля до нуля величина поляризованности кристалла не будет равна

нулю – *остаточная поляризованность* (см. рис. 17.20). Диэлектрик станет подобным постоянному магниту. У него будут «северный» и «южный» (отрицательный и положительный) полюсы, и он будет вести себя как большой постоянный электрический диполь.

Дальнейшее поведение сегнетоэлектрика очевидно из рис. 17.20, на котором изображена *гистерезисная петля*. Чтобы «располяризовать» («разэлектризовать») кристалл диэлектрика, надо изменить направление (знак) внешнего электростатического поля. Увеличивая напряженность поля обратного направления, мы снимем поляризованность сегнетоэлектрика. Величина поля обратного знака, которое надо приложить, чтобы поляризованность стала равной нулю, называется *коэрцитивной силой* (см. рис. 17.20).

При дальнейшем увеличении поля обратного знака мы вновь поляризуем кристалл («наэлектризуем») его, но переменим местами полюсы. Наконец, опять достигнем насыщения, и далее процесс может быть повторен в обратном направлении.

Почему эти явления называются гистерезисными? В переводе с греческого «гистерезис» – запаздывание. В данном случае происходит запаздывание процесса поляризации по отношению к процессу изменения эффективности поля. Петля, изображенная на рис. 17.20, называется *петлей гистерезиса*. Площадь петли гистерезиса пропорциональна величине потерь на изменение направления вектора поляризации («переполаризацию») сегнетоэлектрика.

Для источников постоянного электрического поля применяются «жесткие» сегнетики с максимальной коэрцитивной силой (с широкой петлей гистерезиса). В переменных полях используются «мягкие» сегнетики с минимальной коэрцитивной силой (с узкой петлей гистерезиса).

При наложении внешнего электростатического поля сегнетоэлектрики изменяют свои размеры – *обратный пьезоэффект*, явление *электрострикции*. В свою очередь деформация кристалла сегнетоэлектрика приводит к его поляризации – *пьезоэлектрический эффект*.

### 17.3. Магнетики

В отличие от диэлектриков, *все* вещества в природе – без исключения – являются *магнетиками*, так как каждый атом содержит в себе *элементарный магнитный диполь* – электрон, вращающийся вокруг ядра. Ввиду отсутствия магнитных зарядов все магнитные свойства вещества определяются свойствами магнитных моментов атомов и молекул, связанных с орбитальными и спиновыми моментами импульсов.

### 17.3.1. Магнитные моменты атомов

По модели атома Бора электроны вращаются вокруг ядер по некоторым орбитам (рис. 17.21). Предположим, что эти орбиты – круговые с радиусом  $\vec{r}$ .

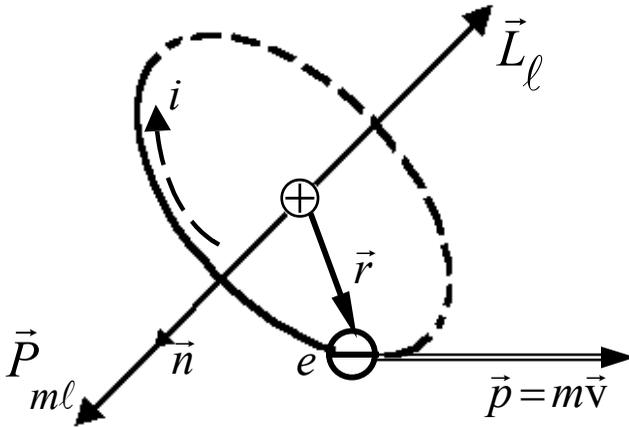


Рис. 17.21. Электрон в атоме водорода как элементарный магнитный диполь

Орбитальный механический момент (орбитальный момент импульса) такого электрона равен

$$\left. \begin{aligned} \vec{L}_e &= [\vec{r}m\vec{v}], \\ |\vec{L}_e| &= rmv. \end{aligned} \right\} \quad (17.35)$$

Орбитальный магнитный момент такого электрона равен

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_{ml} &= iS\vec{n}, \\ |\vec{P}_{ml}| &= \frac{e}{T} \pi r^2, \end{aligned} \right\} \quad (17.36)$$

где  $i$  – эффективный электрический ток – элементарный ток, созданный движущимся вокруг ядра электроном:

$$i = \frac{e}{T}; \quad (17.37)$$

$T$  – период вращения электрона;  
 $v$  – скорость движения электрона по орбите;  
 $e$  – элементарный заряд.

Отношение магнитного дипольного момента к механическому моменту называется *гиромагнитным отношением*. Орбитальное гиромагнитное отношение равно:

$$g_\ell = \frac{|\vec{P}_{m\ell}|}{|\vec{L}_\ell|} = \frac{e\pi r^2}{T\pi r v} = \frac{e}{2m}. \quad (17.38)$$

Квантовая теория доказывает, что момент импульса любой частицы – как орбитальный, так и собственный, – квантуется. Величина

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

является естественной единицей момента импульса.

Орбитальный механический момент электрона равен

$$|\vec{L}_\ell| = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}, \quad (17.39)$$

где  $\ell$  – орбитальное квантовое число ( $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$ ), здесь  $n$  – главное квантовое число).

Собственный механический момент (спин) электрона равен

$$|\vec{L}_s| = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad (17.40)$$

где  $s$  – спиновое квантовое число (для электрона  $s = 1/2$ ).

Орбитальный магнитный момент электрона равен

$$|\vec{P}_{m\ell}| = g_\ell |\vec{L}_\ell| = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{\ell(\ell+1)} \text{ Дж/Тл}, \quad (17.41)$$

Собственный магнитный момент электрона равен

$$|\vec{P}_{ms}| = g_s |\vec{L}_s| = \frac{e\hbar}{m} \sqrt{s(s+1)} = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)} \text{ Дж/Тл}, \quad (17.42)$$

где  $g_s = \frac{e}{m}$  – спиновое гиромагнитное отношение.

Величина

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \quad (17.43)$$

называется *магнетоном Бора*.

Полный магнитный момент атомов определяется суммой собственных и орбитальных магнитных моментов электронов, входящих в

состав атома. Собственный магнитный момент атомов определяется суммой собственных магнитных моментов электронов, входящих в состав атома. Для разных веществ собственный магнитный момент атомов разный, но всегда кратен целому числу магнетонов Бора. У металлов в твердом состоянии часть электронов коллективизируется – т.е. отрывается от «своих» атомов и следовательно, суммироваться должны только те электроны, которые остались на ионе. Для некоторых веществ магнитный момент атомов равен нулю, для других – не равен. Причем оказывается так, что, например, медь в атомарном (газообразном) состоянии имеет магнитный момент, равный одному магнетону Бора, а в твердом состоянии собственный магнитный момент атомов (точнее – ионов) равен нулю.

### 17.3.2. Магнитный диполь во внешнем однородном магнитостатическом поле

Представим магнитный диполь в виде рамки с током (рис. 17.22 а, б).

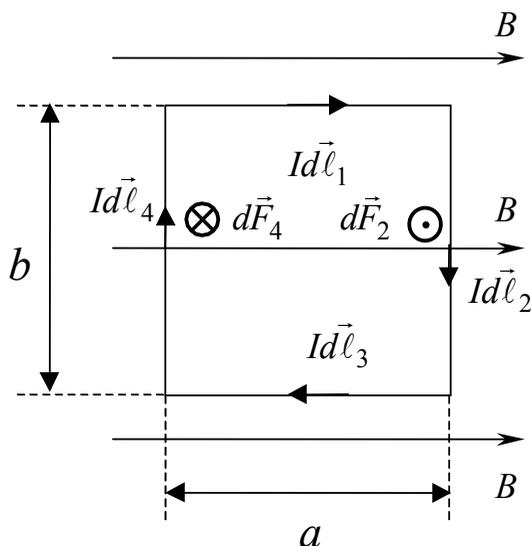


Рис. 17.22. Магнитный диполь во внешнем поле  $\vec{B}$

На элементы тока  $I d\vec{\ell}$  действуют магнитные силы (*силы Ампера*)

$$d\vec{F} = I [d\vec{\ell}, \vec{B}] . \quad (17.44)$$

Тогда:  $dF_1 = dF_3 = 0$ , так как  $d\vec{\ell}_1 \parallel \vec{B}$ , а  $d\vec{\ell}_3 \parallel -\vec{B}$ ;

$$dF_2 = dF_4 = Id_{2-4}B . \quad (17.45)$$

Параллельные и противоположно направленные силы  $dF_2$  и  $dF_4$  образуют пару сил, момент которой равен

$$M = dF \cdot a = (Id\ell) \cdot B \cdot a . \quad (17.46)$$

Тогда суммарный момент, действующий на рамку, равен

$$M = I \cdot b \cdot B \cdot a = I \cdot B \cdot S = P_m B, \quad (17.47)$$

где  $S = a \cdot b$  – площадь рамки.

В векторной форме момент равен

$$\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}] . \quad (17.48)$$

Равновесие для диполя в магнитном поле наступает, когда момент пары сил равен нулю:

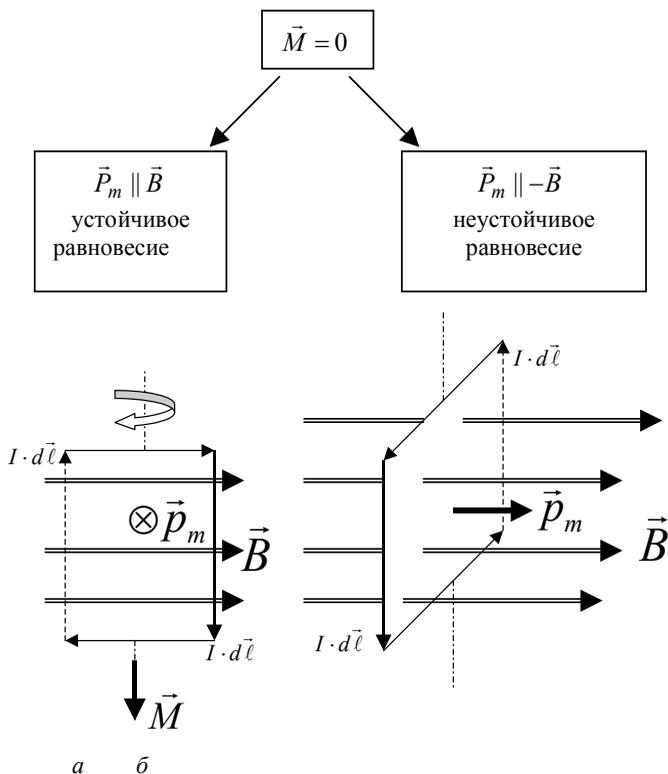


Рис. 17.23. Вращение магнитного диполя в однородном магнитном поле

На рис. 17.23 показано вращение рамки с током («магнитного диполя») в однородном магнитном поле под действием вращающего момента  $\vec{M}$  из произвольного положения (*a*) в положение устойчивого равновесия (*б*). При изменении направления тока в рамке (а следовательно, и вектора  $\vec{P}_m$ ) вращение рамки продолжится. Это явление лежит в основе работы *электромотора*.

### 17.3.2.1. Диполь ориентирован по внешнему полю

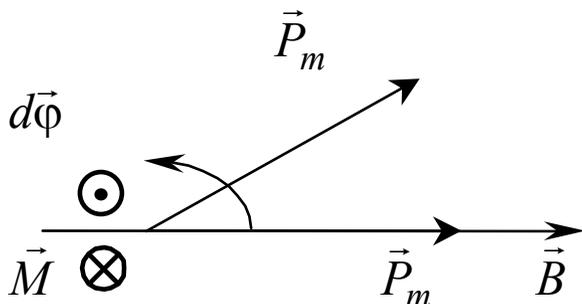


Рис. 17.24. Диполь выводят из состояния устойчивого равновесия

При выводе диполя из этого состояния (рис. 17.24)  $d\vec{\varphi} \parallel -\vec{M}$ . Момент сил поля

$$M_{\varphi} = -P_m B \sin \varphi. (17.49)$$

Момент внешних сил

$$M'_{\varphi} = \frac{dU}{d\varphi} = -M_{\varphi}. (17.50)$$

При повороте диполя на угол  $180^\circ$

$$\int_1^2 dU = -\int_0^{\pi} M_{\varphi} d\varphi, (17.51)$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_0^{\pi} (-P_m B \sin \varphi) d\varphi = -P_m B \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = -P_m B (-1 - 1) = 2P_m B > 0. (17.52)$$

Так как потенциальная энергия взаимодействия диполя и поля увеличивается, то этот процесс энергетически не выгоден, и вывод диполя из состояния устойчивого равновесия возможен только за счет работы внешних сил.

### 17.3.2.2. Диполь ориентирован против внешнего поля

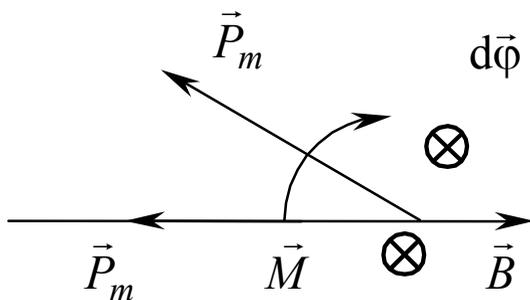


Рис. 17.25. Диполь возвращается в состояние устойчивого равновесия

При выходе диполя из этого состояния (рис. 17.25)  $d\vec{\varphi} \parallel \vec{M}$ . Момент сил поля

$$M_{\varphi} = P_m B \sin \varphi, \quad (17.53)$$

в то же время

$$M_{\varphi} = \frac{dU}{d\varphi}. \quad (17.54)$$

При повороте диполя на угол  $180^\circ$

$$\int_1^2 dU = \int_{\pi}^0 M_{\varphi} d\varphi, \quad (17.55)$$

$$\Delta U = \int_1^2 dU = - \int_{\pi}^0 M_{\varphi} d\varphi = \int_{\pi}^0 P_m B \sin \varphi d\varphi = -P_m B \cos \varphi \Big|_{\pi}^0 = -2P_m B < 0. \quad (17.56)$$

Так как потенциальная энергия взаимодействия диполя и поля уменьшается, то этот процесс энергетически выгоден, и выход диполя из состояния неустойчивого равновесия возможен за счет работы внутренних сил поля.

### 17.3.3. Поле в магнетиках. Магнитная проницаемость и восприимчивость

Для макроскопической характеристики действия магнитного поля  $\vec{B}_0$  на вещество вводится безразмерная физическая величина  $\mu$ , называемая *магнитной проницаемостью* вещества.

Если в магнитное поле поместить вещество, то оказывается, что магнитное поле внутри вещества изменится за счет поворота магнитных моментов атомов. В этом случае результирующее поле  $\vec{B}_{\text{эфф}}$  в веществе есть сумма внешнего поля  $\vec{B}_0$  и внутреннего  $\vec{B}'$ , вызванного магнитными моментами атомов:

$$\vec{B}_{\text{эфф}} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (17.57)$$

Внутреннее магнитное поле в магнетиках создается за счет упорядочения внутренних магнитных моментов, При этом в *диамагнетиках* они выстраиваются *против* внешнего поля  $\vec{B}_0$ :

$$\vec{P}_m \parallel -\vec{B}_0 \text{ и } \vec{B}' \parallel -\vec{B}_0$$

а в *пара-* и *ферромагнетиках* – по полю:

$$\vec{P}_m \parallel \vec{B}_0 \text{ и } \vec{B}' \parallel \vec{B}_0.$$

Количественной характеристикой магнитных свойств вещества является *удельная намагниченность* (вектор намагничивания):

$$\vec{P}_m = \frac{\sum_i (\vec{P}_m)_i}{\Delta V} \quad (17.58)$$

В формуле (17.57)

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{P}_m \quad (17.59)$$

Тогда результирующее поле

$$\vec{B}_{\text{эфф}} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{P}_m. \quad (17.60)$$

Следовательно, с учетом вектора намагничивания (17.59) результирующее поле можно представить как

$$\vec{B}_{\text{эфф}} = \mu \vec{B}_0 \quad (17.61)$$

Здесь величина  $\mu$  – магнитная проницаемость вещества может быть – меньше единицы – в *диамагнетиках*, – больше единицы – в *парамагнетиках*, – во много раз больше единицы – в *ферромагнетиках*. Совместим выражения (17.60) и (17.61):

$$\mu \vec{B}_0 = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{P}_m. \quad (17.62)$$

После несложных преобразований формулу (17.62) перепишем в виде

$$\chi_m \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{P}_m, \quad (17.63)$$

где величина  $\chi_m$  называется *магнитной восприимчивостью вещества* и связана с магнитной проницаемостью соотношением

$$\chi_m = \mu - 1. \quad (17.64)$$

Из соотношения (17.62) с учетом (17.63) тогда следует

$$\vec{P}_m = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \chi_m = \vec{H}_0 \chi_m. \quad (17.65)$$

Величина  $\vec{H}_0$  носит название *напряженности* магнитного поля, в то время, как  $\vec{B}_0$  называется, как было сказано выше, *индукцией* магнитного поля, или просто – *величиной магнитного поля*.

### 17.3.4. Классификация магнетиков

#### 17.3.4.1. Диамагнетики

Вращающийся по орбите электрон представляет из себя гироскоп. Под воздействием магнитной силы со стороны внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$  плоскость орбиты электрона начинает вращаться и следовательно, возникает индуцированный магнитный момент  $\vec{P}_m$ .

$$\sum \vec{P}_{ml} = 0, \sum \vec{P}_{ms} = 0 \text{ – для электронов;}$$

$$\sum \vec{P}_m = 0 \text{ – для диамагнетика в целом в отсутствие внешнего поля.}$$

Появляется индуцированное поле  $\vec{B}_{i(\text{внутр})}$ , которое всегда направлено против внешнего поля. Поле внутри вещества уменьшается и следовательно,  $\mu < 1$  и  $\chi_m < 0$ . Уменьшение поля невелико и

$\chi_m = -(10^{-9} \dots 10^{-10})$ . Поэтому диамагнетиками оказываются только вещества, атомы или ионы которых не имеют собственного магнитного момента, хотя диамагнитная составляющая присутствует во всех веществах.

#### 17.3.4.2. Парамагнетики

Если собственный магнитный момент атома или иона не равен нулю, то данное вещество увеличивает индукцию магнитного поля. Происходит это за счет того, что магнитные моменты атомов «выстраиваются по полю».

$$\sum \vec{P}_{m_i} \neq 0, \sum \vec{P}_{ms} \neq 0 \text{ – для электронов.}$$

$\sum \vec{P}_m = 0$  – для парамагнетика в целом в отсутствие внешнего поля.

При этом внутреннее поле направлено вдоль внешнего. Магнитная восприимчивость в этом случае невелика ( $\chi_m = 10^{-9} \dots 10^{-10}$ ) и положительна,  $\mu \geq 1$ . Выстраиванию магнитных моментов вдоль поля противодействует тепловое движение атомов и ионов. Поэтому магнитная восприимчивость зависит от температуры. Эта зависимость выражается законом Кюри:

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (17.66)$$

где  $T$  – абсолютная температура;

$C$  – постоянная Кюри, зависящая от магнитного момента атома (иона) и от концентрации атомов в единице объема.

Парамагнетиками, в частности, являются молекулярный кислород и окись азота, металлы – литий, натрий, стронций, барий, алюминий, кальций, магний и др.

#### 17.3.4.3. Ферромагнетики

Ферромагнетики – это такие вещества, в которых при отсутствии внешнего магнитного поля существуют магнитные домены (рис. 17.26) – области спонтанной намагниченности. В доменах спиновые магнитные моменты всех атомов сонаправлены, т.е. домены

намагничены до насыщения. (см. 17.2.4). В отсутствии внешнего магнитного поля эти области в сумме дают нулевое поле.

$$\sum \vec{P}_{ms} \neq 0 \text{ в каждом домене.}$$

$$\text{Для ферромагнетика в целом } \sum \vec{P}_{ms} = 0 .$$

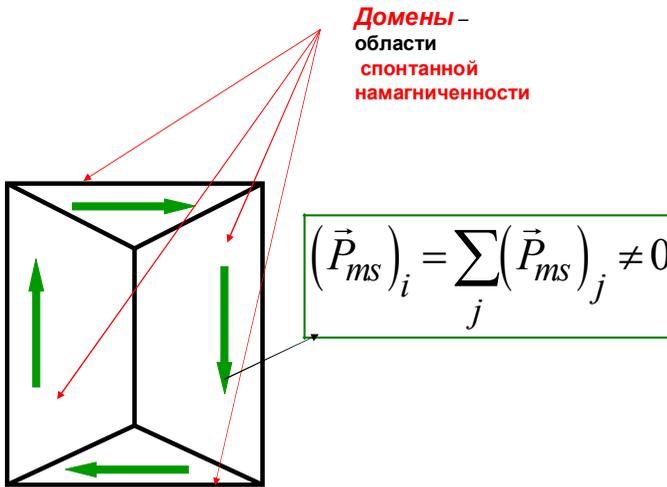


Рис. 17.26. Модель доменной структуры ферромагнетика

В каждом  $i$ -м домене суммарный спиновый магнитный момент (вектор намагничивания, или *намагниченность*) отличен от нуля:

$$(\vec{P}_{ms})_i = \sum_j (\vec{P}_{ms})_j \neq 0, \quad (17.67)$$

Но в отсутствие внешнего магнитного поля вектор намагничивания кристалла ферромагнетика в целом равен нулю, так как спиновые магнитные моменты всех доменов компенсируют друг друга:

$$\vec{P}_{ms} = \sum_i (\vec{P}_{ms})_i = 0 .$$

Поместим ферромагнетик во внешнее однородное магнитостатическое поле (рис. 17.28, а).

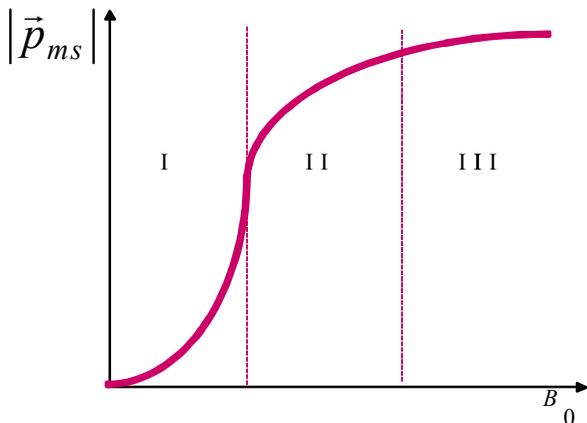


Рис. 17.27. Зависимость намагниченности (модуля вектора намагничивания) кристалла ферромагнетика от величины внешнего поля

На первом этапе (I) меняется величина дипольных моментов в каждом домене – особенно в тех, которые по ориентации ближе к направлению внешнего поля. Иначе говоря, происходит смещение границ доменов (рис. 17.27 и 17.28 б).

На втором этапе (II) происходит изменение ориентации (вращение) дипольных моментов в каждом домене – они ориентируются по полю (рис. 17.27 и 17.28, в).

На третьем этапе (III) весь кристалл превращается в один домен, вектор намагничивания которого направлен по полю. Происходит насыщение намагниченности ферромагнетика (рис. 17.27 и 17.28, г).

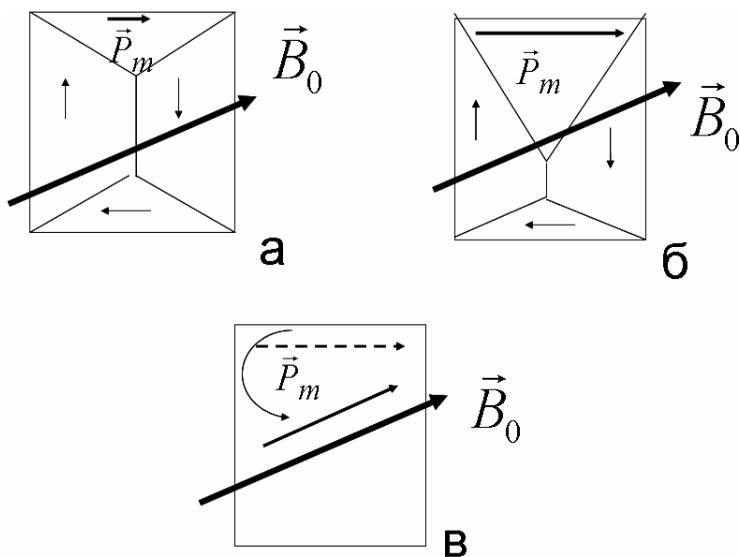


Рис. 17.28. Изменение доменной структуры ферромагнетика в процессе намагничивания во внешнем магнитном поле

Начнем теперь уменьшать величину внешнего магнитостатического поля (рис. 17.29). Намагниченность кристалла ферромагнетика (величина вектора намагничивания) начнет падать, кривая пойдет вниз, но не потому пути, по которому происходил рост. В результате при уменьшении напряженности поля до нуля величина намагниченности кристалла не будет равна нулю – остаточная намагниченность (рис. 17.29). Кристалл станет подобным постоянному магниту: у него появятся «северный» и «южный» полюсы.

Дальнейшее поведение ферромагнетика очевидно из рис. 17.29, на котором изображена гистерезисная петля. Чтобы «размагнитить» кристалл диэлектрика, надо изменить направление (знак) внешнего магнитостатического поля. Увеличивая напряженность поля обратного направления, мы снимем намагниченность ферромагнетика. Величина поля обратного знака, которое надо приложить, чтобы намагниченность стала равной нулю, называется коэрцитивной силой (см. рис. 17.30).

При дальнейшем увеличении поля обратного знака мы вновь намагнитим кристалл его, но переменим местами полюсы. Наконец, опять достигнем насыщения, и далее процесс может быть повторен в обратном направлении.

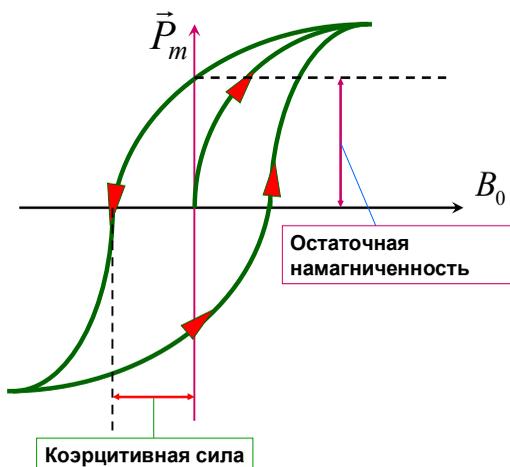


Рис. 17.29. Петля ферромагнитного гистерезиса

Площадь петли гистерезиса пропорциональна величине потерь на изменение направления вектора намагничивания («перемагничивание») ферромагнетика.

Для источников постоянного магнитного поля применяются «жесткие» ферромагнетики с максимальной коэрцитивной силой (с широкой петлей гистерезиса). В переменных полях (например, в сердечниках трансформаторов) используются «мягкие» ферромагнетики с минимальной коэрцитивной силой (с узкой петлей гистерезиса).

### Контрольные вопросы

1. Что называется электроемкостью уединенного проводника и от чего она зависит?
2. Что называется взаимной электроемкостью двух проводников и от чего она зависит?
3. В каких случаях следует применять те или иные способы соединения конденсаторов?
4. При соблюдении каких условий заряды на проводнике будут находиться в равновесии?
5. В чем заключается сущность электростатической защиты?
6. Что такое поляризованность диэлектрика?
7. При какой взаимной ориентации электрического диполя и электрического поля  $\vec{E}$  вращающий момент, действующий на диполь, будет максимальным?

8. Электрический диполь помещен на некотором расстоянии от точечного заряда. Как будет вести себя диполь после того, как будет предоставлен самому себе?

9. Могут ли быть в ориентационно-поляризованном диэлектрике молекулы, дипольные моменты которых образуют с направлением поля углы, близкие к  $\pi/2$ ?

10. В чем состоит различие в поляризации диэлектриков с полярными и неполярными молекулами?

11. Какова размерность диэлектрической восприимчивости?

12. Какова размерность магнитной восприимчивости?

13. Укажите – какая из приведенных на рис.17.30 гистерезисных петель

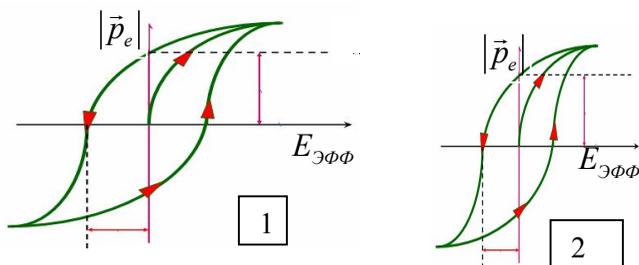


Рис.17.30

соответствует сегнетоэлектрику, применяемому в высокочастотных полях (для выбранной петли следует показать величины коэрцитивной силы и остаточной намагниченности). Масштабы по осям абсцисс и ординат для обоих рисунков считайте одинаковыми.

14. Укажите – какая из приведенных на рис17.31 гистерезисных петель

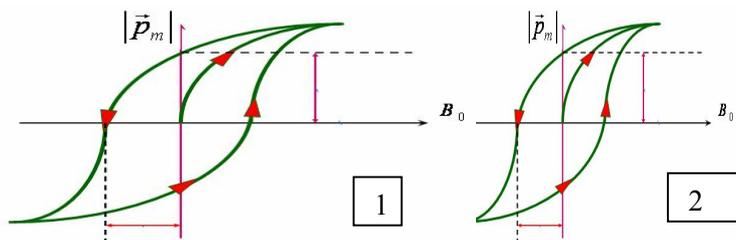


Рис.17.31

соответствует ферромагнетику, применяемому в качестве сердечников трансформаторов (для выбранной петли следует показать величины коэрцитивной силы и остаточной намагниченности). Масштабы по осям абсцисс и ординат для обоих рисунков считайте одинаковыми.

15. Какой физический смысл имеет площадь петли гистерезиса?

16. При какой ориентации магнитного диполя во внешнем магнитном поле поворот диполя на  $180^\circ$  производится без совершения работы?

17. Какое явление лежит в основе работы электромоторов?

## Глава 18. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

### 18.1. Электромагнитная индукция

#### 18.1.1. Закон Фарадея

**Закон Фарадея:** во всяком замкнутом проводящем контуре  $L$  при изменении магнитного потока через поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром (рис. 18.1), возникают ЭДС  $\mathcal{E}_i$  и ток индукции  $I_i$  :

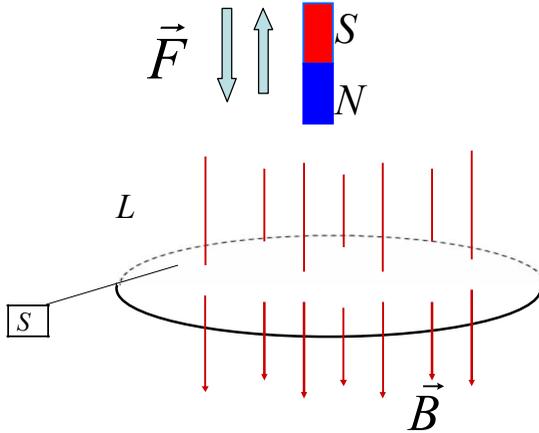


Рис. 18.1. К возникновению электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}, \quad (18.1)$$

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{1}{R} \left( -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \right), \quad (18.2)$$

где  $R$  – активное сопротивление контура;

$\mathcal{E}_i$  – ЭДС (электродвижущая сила), есть работа *сторонних* сил по

перемещению единичного заряда по замкнутому контуру<sup>1</sup>.

Если ЭДС возникает в катушке с одним витком, то

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}, \quad (18.3)$$

Если в катушке  $N$  витков, то

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial\Psi_B}{\partial t} = -N\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial(N\Phi_B)}{\partial t}, \quad (18.4)$$

где

$$N\Phi_B = \Psi_B \quad (18.5)$$

– потокосцепление.

### 18.1.2. Правило Ленца

**Правило Ленца** (выражает закон сохранения энергии): индуцированный (индукционный) ток должен иметь такое направление, чтобы создаваемое им магнитное поле  $\vec{B}_i$  (индуцированное магнитное поле) своим направлением противодействовало причине его вызывающей, т.е. изменению магнитного потока.

Правило Ленца имеет весьма принципиальный характер – оно обеспечивает выполнение закона сохранения энергии: внешние силы,двигающие магнит (т.е. создающие переменный магнитный поток), встречают сопротивление со стороны проводящего контура. Собственное (индуцированное) магнитное поле контура таково, что при приближении магнита (т.е. при увеличении магнитного потока) северный полюса контура обращен к северному полюсу магнита – контур и магнит отталкиваются, а при удалении к северному полюсу магнита будет обращен южный полюс контура и они будут притягиваться. Во всех случаях внешние силы должны будут выполнять работу, которая превращается, в конечном счете, в работу тока.

---

<sup>1</sup> Для возникновения ЭДС силы должны быть не электростатического (не кулоновского) происхождения, а «сторонними» – например, магнитными. Работа кулоновских сил по замкнутому контуру:  $A_{\text{кул}} = \oint_L F_\ell d\ell = q \oint_L E d\ell = 0$ .

**Пример 1.** Если поток нарастает

$$\left(\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} > 0\right),$$

то  $\vec{B}_i \parallel -\vec{B}$  (рис. 18.2, а).

**Пример 2.** Если поток убывает

$$\left(\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} < 0\right),$$

то  $\vec{B}_i \parallel \vec{B}$  (рис. 18.2, б).

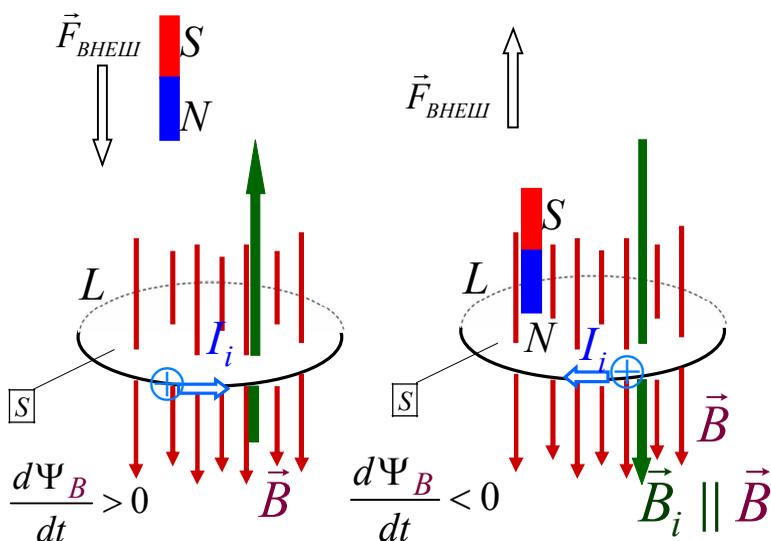


Рис. 18.2. Возникновение тока индукции при изменении магнитного потока: а – при увеличении; б – при уменьшении

### 18.1.3. Вихревое электрическое поле

Как известно, циркуляция вектора напряженности *электростатического* поля равна нулю (как и работа электростатических сил по замкнутому контуру) –

$$\oint_L \vec{E}_\tau d\ell = 0. \quad (18.6)$$

Выше было показано (см. 15.3, (15.10)), что ЭДС представляет собой работу *сторонних* сил по перемещению единичного заряда по замкнутому контуру:

$$\mathcal{E}_i = \frac{A}{q} = \frac{1}{q} \oint_L F_{\tau}^* d\ell = \oint_L E_{\tau}^* d\ell. \quad (18.7)$$

Из сопоставления формул (18.7) и (18.1) следует, что возникающее при изменении магнитного потока электрическое поле является не *электростатическим*, а **вихревым** – циркуляция вектора его напряженности отлична от нуля:

$$\oint_L E_{\tau}^* d\ell = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}. \quad (18.8)$$

В дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{E}^* = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (18.9)$$

Направление закрученности силовых линий вихревого электрического поля определяется направлением вектора  $\text{rot} \vec{E}^*$  (рис. 18.3 и 18.4).

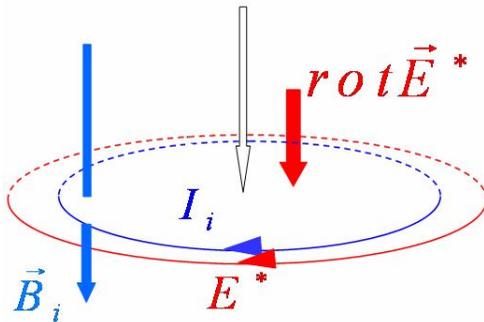


Рис. 18.3. Возникновение вихревого электрического поля при уменьшении индукции магнитного поля

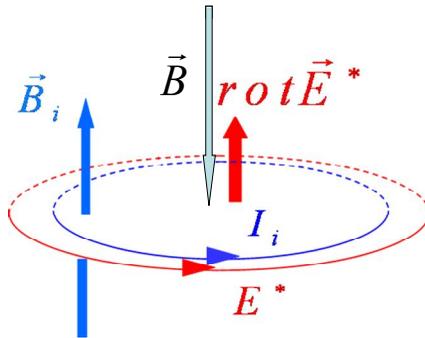


Рис. 18.4. Возникновение вихревого электрического поля при увеличении индукции магнитного поля

## 18.2. Механизм возникновения тока индукции

### Опыт 1

Условия (рис. 18.5):

- 1) поле – постоянное  $B \neq B(t)$  и однородное  $B \neq B(x, y, z)$ ;
- 2) проводящий контур (отрезок проводника длиной  $\ell$  перемещается относительно наблюдателя).

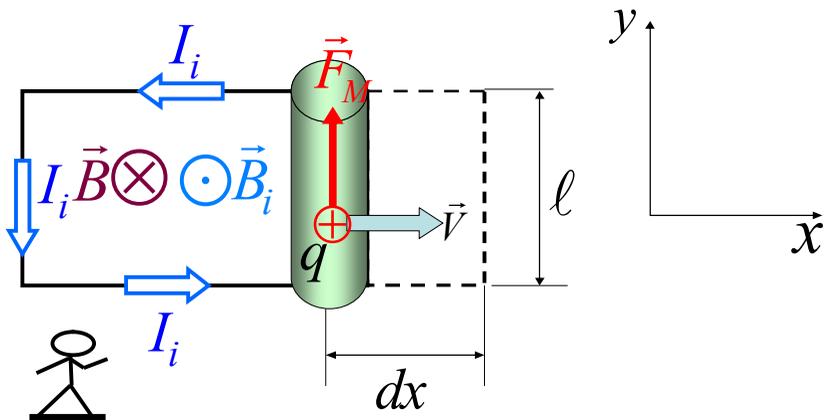


Рис. 18.5. Действие магнитной силы на заряд в движущемся проводнике

Направление индукционного тока  $I_i$  определяется правилом Ленца и соответствует перемещению проводника вправо, при котором  $\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} > 0$ .

С точки зрения наблюдателя, относительно которого контур движется, движущей силой, т.е. силой, действующей на заряды, является магнитная сила Лоренца, являющаяся *сторонней* силой (рис. 18.6).

Тогда

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{A}{q} = \frac{q \int_0^\ell |\vec{v}, \vec{B}| dy}{q} = vBl \sin \alpha. \quad (18.10)$$

Если  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , то

$$\mathcal{E}_i = Blv. \quad (18.11)$$

С другой стороны

$$|\mathcal{E}_i| = Blv \frac{dt}{dt} = \frac{B \ell dx}{dt} = \frac{B dS}{dt} = \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (18.12)$$

что соответствует закону Фарадея.

### Опыт 2.

Условия (рис. 18.6):

- 1) поле – постоянное  $B \neq B(t)$  и однородное  $B \neq B(x, y, z)$ ;
- 2) проводящий контур неподвижен относительно наблюдателя.

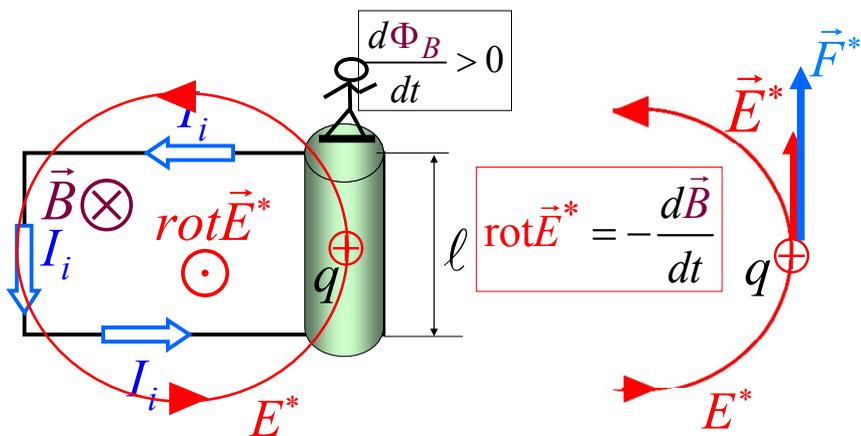


Рис. 18.6. Действие силы вихревого электрического поля на заряд в неподвижном проводнике

С точки зрения наблюдателя, относительно которого контур неподвижен (т.е. наблюдатель движется вместе с проводником), через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ , магнитный поток увеличивается:

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} > 0,$$

что является причиной возникновения вихревого электрического поля. Движущей силой, т.е. силой, действующей на заряд в проводнике, является сила вихревого электрического поля  $\vec{F}^* = q\vec{E}^*$ , являющаяся *сторонней* силой. Тогда

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{A}{q} = \frac{q \int_0^l E^* dy}{q}. \quad (18.13)$$

И в том, и в другом опыте направления действия сил соответствуют направлениям тока индукции, найденным по правилу Ленца.

В этих опытах подтверждается **принцип относительности Эйнштейна**: в любой инерциальной системе отсчета одно и то же

физическое явление выражается одними и теми же физическими законами, хотя механизмы этого явления могут быть различными.

### 18.3. Вихревые токи

#### 18.3.1. Бетатрон

Возникновение в пространстве вихревого электрического поля под влиянием переменного магнитного поля было использовано для создания индукционного ускорителя электронов – *бетатрона*.

Основными элементами бетатрона являются сильный электромагнит с коническими полюсными наконечниками  $A$  и  $C$  и вакуумная ускорительная камера  $D$ , имеющая форму замкнутого кольца (рис. 18.7). Ось камеры совпадает с осью симметрии  $00'$  полюсных наконечников. Изменение силы тока в обмотке электромагнита вызывает в пространстве между его полюсами изменение магнитного поля и возникновение вихревого электрического поля. Магнитное поле симметрично относительно оси  $00'$ . Поэтому силовые линии *вихревого* электрического поля  $E^*$  в плоскости  $MN$ , перпендикулярной оси  $00'$  и проходящей через середину зазора между полюсами, имеют вид окружностей, центры которых лежат в точке  $K$ . Числовые значения напряженности  $E^*$  вихревого электрического поля во всех точках каждой окружности одинаковы. Циркуляция вектора  $E^*$  вдоль окружности радиуса  $r$  равна

$$\oint_L \vec{E}^* d\vec{\ell} = \oint_L E_{\tau}^* d\ell = 2\pi r E_{\tau}^*, \quad (18.14)$$

где  $E_{\tau}^*$  – проекция вектора  $\vec{E}^*$  на касательную к окружности.

С другой стороны,

$$\oint_L \vec{E}^* d\vec{\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (18.15)$$

где  $S = \pi r^2$  – площадь круга радиуса  $r$ ;

$\vec{B}$  – вектор магнитной индукции. Из условия симметрии ясно, что во всех точках круга вектор  $\vec{B}$  параллелен оси  $00'$ .

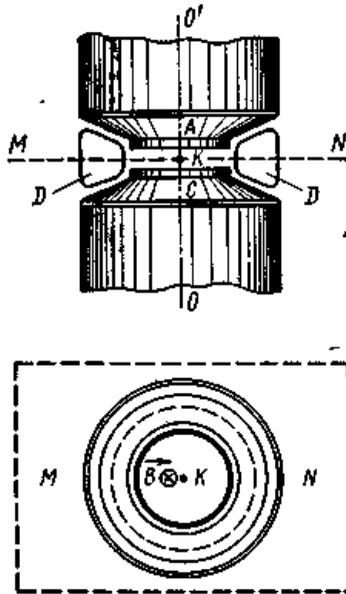


Рис. 18.7. Принципиальная схема бетатрона

Введем в камеру  $D$  электрон таким образом, чтобы его скорость  $\vec{v}$  была направлена по касательной к рассмотренной выше окружности – силовой линии электрического поля. На электрон действует электрическая сила, направленная по касательной к силовой линии в сторону, противоположную вектору  $\vec{E}^*$ . Изменение числового значения импульса электрона под действием этой силы за малое время  $dt$  равно

$$d(mv) = -eE_{\tau}^* dt. \quad (18.16)$$

Если индукция магнитного поля бетатрона линейно зависит от времени, то  $(dB/dt) = \text{const}$  и напряженность  $E^*$  тоже постоянна во всех точках окружности радиуса  $r$ .

Предположим, что электрон непрерывно движется по одной и той же окружности радиуса  $r$  и что его начальной кинетической энергией можно пренебречь. Если даже энергия, приобретаемая электроном за один оборот невелика, то за большое число оборотов она может сильно возрасти. Пусть, например, равномерное изменение магнитного поля таково, что при однократном обходе окружности радиуса  $r = 0,4$  м электрон приобретает энергию 20 эВ. Тогда за время  $8,45 \cdot 10^{-8}$  с электрон пройдет путь 2520 км, сделает  $10^6$  оборотов и накопит энергию 20 МэВ. При этой энергии масса электрона будет

примерно в 40 раз больше его массы покоя, но это возрастание массы не повлияет на процесс ускорения электрона. В бетатроне в отличие от ускорителей синхрофазотронов, не существует проблемы синхронизации. Единственным условием ускорения электрона является его непрерывное движение по одной и той же орбите.

### 18.3.2. Токи Фуко

Если между полюсами электромагнита  $AB$  (рис. 18.8) перпендикулярно к ним поместить массивную металлическую пластинку, вихревое индукционное поле вызовет в ней токи той же конфигурации. Поскольку силовые линии  $E^*$  представляют собой окружности, таковы же будут линии тока. *Вихревые токи* («токи Фуко») могут достигать больших величин даже при небольшой напряженности поля, так как сопротивление массивного проводника мало.

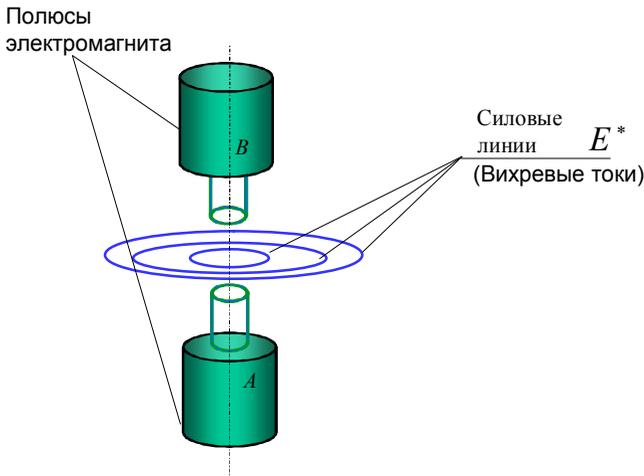


Рис. 18.8. Возникновение вихревого электрического поля и вихревых токов

### 18.4. Физический принцип действия генератора переменного тока

Рассмотрим жесткий проводящий контур (рамка), вращающийся в постоянном и однородном магнитном поле (рис. 18.9).

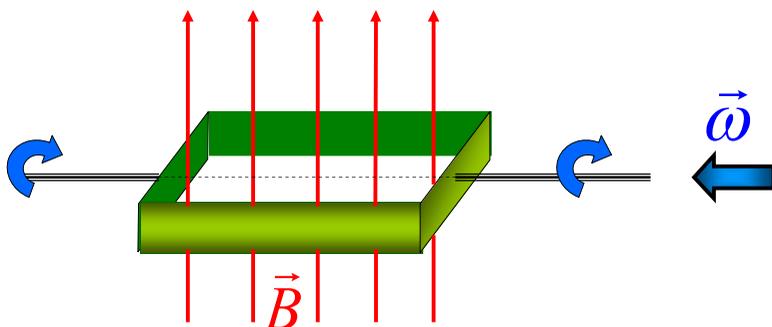


Рис. 18.9. Рамка вращается в магнитном поле

При вращении контура (например, рамки) в магнитном поле магнитный поток  $\Phi_B = (\vec{B}, \vec{S})$  изменяется от максимального значения при  $\alpha = 0^\circ$  (рис. 18.10) до нуля при  $\alpha = 90^\circ$  (рис. 18.11), где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$ .

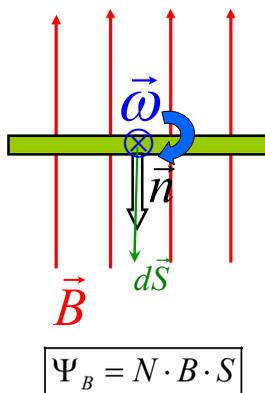
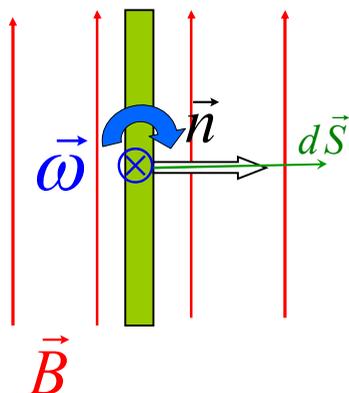


Рис. 18.10. Магнитный поток сквозь рамку максимален



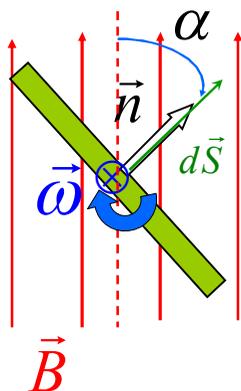
$$\Psi_B = N \cdot (\vec{B}, \vec{S}) = 0$$

Рис. 18.11. Магнитный поток сквозь рамку отсутствует

Для произвольного момента времени  $t$  (рис. 18.12) угол  $\alpha = \omega t$  и магнитный поток

$$\Phi_B = (\vec{B}, \vec{S}) = BS \cos \omega t, \quad (18.17)$$

если число витков  $N = 1$ .



$$\Psi_B = N \cdot B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Рис. 18.12. Магнитный поток сквозь рамку при угле поворота  $\alpha$

ЭДС индукции, наведенная в рамке, равна

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} = BS\omega\sin(\omega t), \quad (18.18)$$

где  $BS\omega = \mathcal{E}_i^{\max}$  – амплитудное значение ЭДС.

Ток индукции – переменный, синусоидальный (рис. 18.13):

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{BS\omega}{R}\sin\omega t, \quad (18.19)$$

где  $I_i^{\max}$  – амплитуда индукционного тока:

$$I_i^{\max} = \frac{BS\omega}{R} = \frac{\mathcal{E}_i^{\max}}{R} \quad (18.20)$$

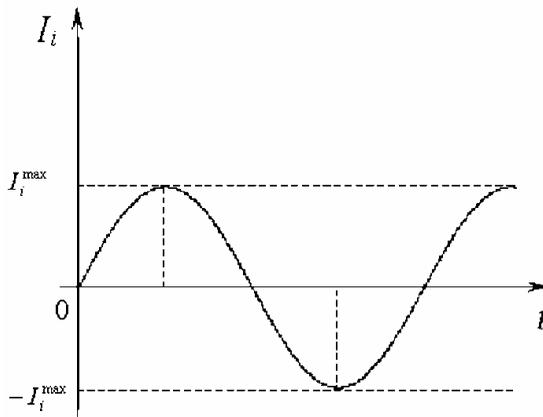


Рис. 18.13. Переменный ток (ток индукции)

Если рамка содержит  $N$  витков, то

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial\Psi_B}{\partial t} = -N\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} = NBS\omega\sin(\omega t), \quad (18.21)$$

и ток индукции равен

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = N\frac{BS\omega}{R}\sin(\omega t). \quad (18.22)$$

## 18.5. Явление самоиндукции

ЭДС и ток индукции могут возникать в проводящем контуре, в котором уже течет первичный ток  $I$ . Если величина этого тока изменяется со временем и таким образом создаваемые им магнитное поле  $\vec{B}_0$  и магнитный поток  $\Phi_B$  являются переменными, то в этом самом контуре возникают ЭДС и ток индукции (рис. 18.14). Такое явление называется *самоиндукцией*.

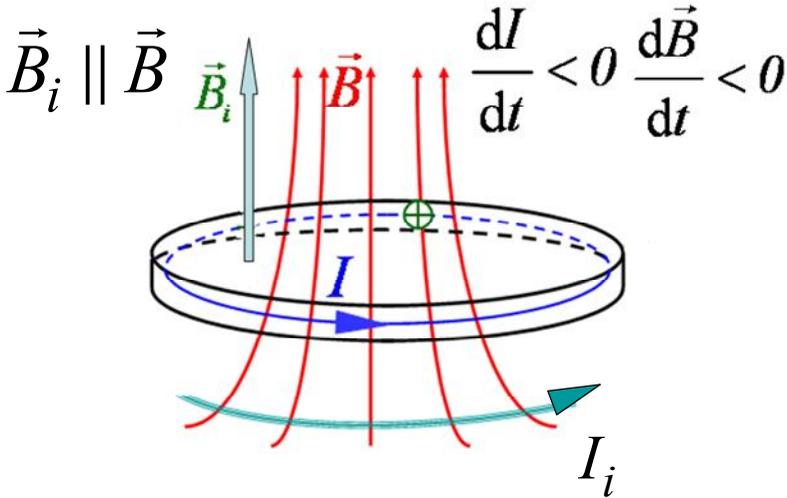


Рис. 18.14. К явлению самоиндукции

Если охарактеризовать проводящий контур величиной *индуктивности*  $L$ , то потокосцепление будет равно  $\Psi = LI$ , где  $I$  – первичный ток в контуре.

Тогда закон электромагнитной индукции Фарадея для явления самоиндукции может быть записан в следующем виде:

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (18.23)$$

При изменении магнитного потока сквозь контур возникает вихревое электрическое поле  $\vec{E}^*$ , ротор которого

$$\text{rot} \vec{E}^* = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (18.24)$$

Силы вихревого электрического поля являются движущими силами, вызывающими ток самоиндукции.

Когда первичный ток в контуре выключают (размыкание цепи) и  $\frac{\partial B}{\partial t} < 0$ , то индуцированное магнитное поле  $\vec{B}_i \parallel \vec{B}$ , а  $\text{rot} \vec{E}^* \parallel \vec{B}_i \parallel \vec{B}$ .

Таким образом, когда магнитное поле уменьшается, первичный ток и ток индукции (*экстраток размыкания*) суммируются (см. рис. 18.14), поэтому результирующий ток спадает постепенно (рис. 18.15):

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (18.25)$$

где  $R$  – активное сопротивление цепи;  
 $L$  – индуктивность цепи.

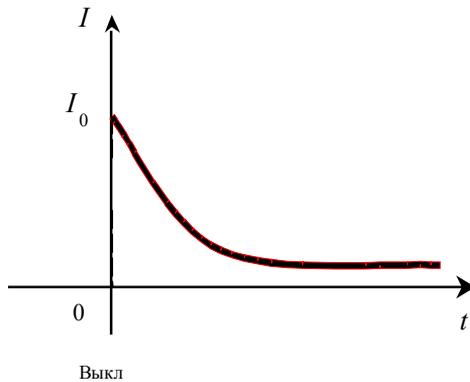


Рис. 18.16. Изменение тока при размыкании цепи

Когда первичный ток в контуре включают (замыкание цепи), то магнитное поле увеличивается  $\frac{dB}{dt} > 0$  (рис. 18.16), индуцированный ток (*экстраток замыкания*) будет направлен навстречу первичному току в контуре, поэтому результирующий ток нарастает постепенно (рис. 18.17):

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (18.26)$$

где  $\varepsilon$  – ЭДС источника тока.

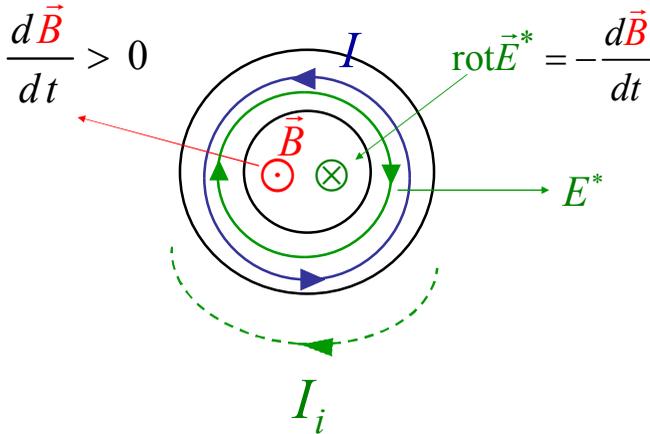


Рис. 18.15. Вихревое электрическое поле и ток самоиндукции при увеличении тока в контуре (вид на контур сверху)

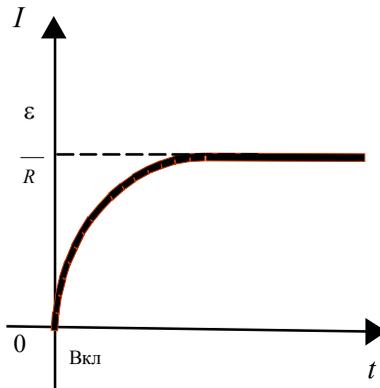


Рис. 18.17. Изменение тока при замыкании цепи

## 18.6. Явление взаимной индукции. Физический принцип действия трансформатора

При изменении тока  $I_1$  в первом контуре (рис. 18.18) возникает переменное магнитное поле  $\vec{B}_1$ . Переменный магнитный поток  $\Phi_{B_1}$ , создаваемый полем  $\vec{B}_1$ , пронизывает второй контур, и в последнем, в соответствии с законом Фарадея, возникают ЭДС и ток *взаимной индукции*  $I_2$ .

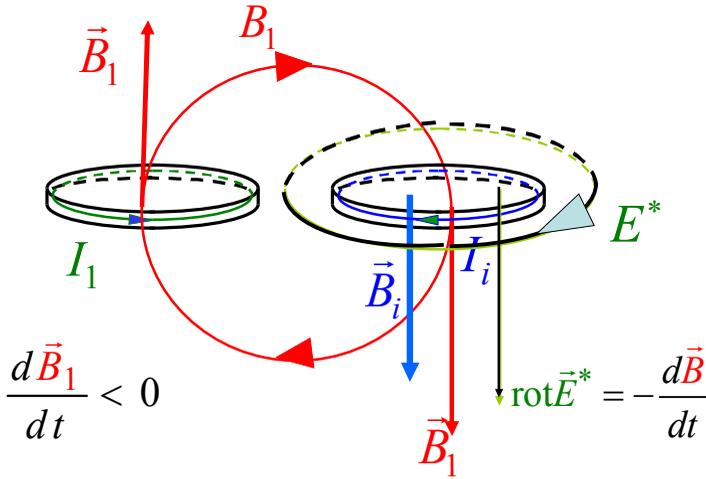


Рис. 18.18. Возникновение тока взаимной индукции

В рассмотренном на рис. 18.19 примере ток  $I_1$  и поле  $B_1$  – убывают. Поэтому индуцированное магнитное поле  $\vec{B}_i \parallel \vec{B}_1$ .

ЭДС взаимной индукции во втором контуре:

$$\mathcal{E}_i = -M_{21} \frac{\partial I_1}{\partial t}, \quad (18.27)$$

где  $M_{21}$  – взаимная индуктивность контуров.

На явлении взаимной индукции основано действие трансформаторов, служащих для повышения или понижения напряжения переменного тока. Трансформатор состоит из двух соленоидальных обмоток, укрепленных на общем замкнутом сердечнике из магнитомягкого материала («трансформаторного железа») – с низким значением коэрцитивной силы. Сердечник набирается из отдельных пластин – для уменьшения возможных вихревых токов. Концы первой обмотки присоединены к источнику переменного тока, а концы второй включены в цепь потребителей электрической энергии. Переменное магнитное поле тока в первой (первичной) обмотке трансформатора вызывает появление ЭДС взаимной индукции во второй обмотке. Магнитное поле первичной обмотки практически полностью локализовано в сердечнике, играющем роль магнитной цепи, для увеличения потока взаимной индукции этих обмоток и их взаимной индуктивности.

## 18.7. Еще один источник вихревого магнитного поля (в электродинамике). Ток смещения

Точно так же, как переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля, переменное электрическое поле является источником вихревого магнитного поля.

В интегральной форме циркуляция вектора магнитной индукции равна

$$\oint_L \vec{B}_\tau d\ell = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \mu_0 \left( I + \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) = \mu_0 (I + I_{\text{см}}), \quad (18.28)$$

где *первое* слагаемое в этом уравнении есть *ток проводимости*  $I$ , связанный с движением зарядов и создающий магнитное поле; а *второе* слагаемое – есть «*ток смещения в вакууме*»:

$$I_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}, \quad (18.29)$$

т.е. скорость изменения потока вектора  $\vec{E}$ , умноженная на электрическую постоянную, так как

$$\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0. \quad (18.30)$$

Таким образом, в электродинамике появляется еще один источник вихревого магнитного поля – переменный поток вектора  $\vec{E}$ .

В дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}), \quad (18.31)$$

где  $\vec{j}$  – вектор плотности тока проводимости,

$\vec{j}_{\text{см}}$  – вектор плотности тока смещения в вакууме.

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (18.32)$$

**Пример 1.** Рассмотрим процесс зарядки конденсатора.

В процессе зарядки конденсатора:  $\frac{\partial q}{\partial t} > 0$  и  $\frac{\partial E}{\partial t} > 0$ .

Тогда, в соответствии с уравнением (18.28), переменное электрическое поле, т.е. ток смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$ , создает магнитное поле, ротор которого параллелен вектору напряженности электрического поля, а, следовательно, и вектору  $\vec{j}_{\text{см}}$  (рис. 18.19).

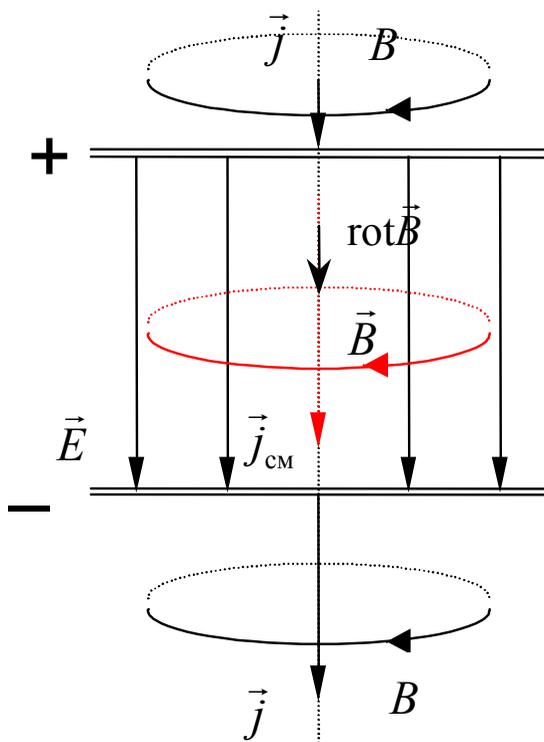


Рис. 18.19. Появление тока смещения при зарядке конденсатора

**Пример 2.** Рассмотрим процесс разрядки конденсатора.

В процессе разрядки конденсатора:  $\frac{\partial q}{\partial t} < 0$  и  $\frac{\partial E}{\partial t} < 0$ .

Тогда, в соответствии с уравнением (18.28), переменное электрическое поле, т. е. ток смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$ , создает магнитное поле, ротор которого направлен в сторону, противоположную вектору напряженности электрического поля (рис. 18.20).

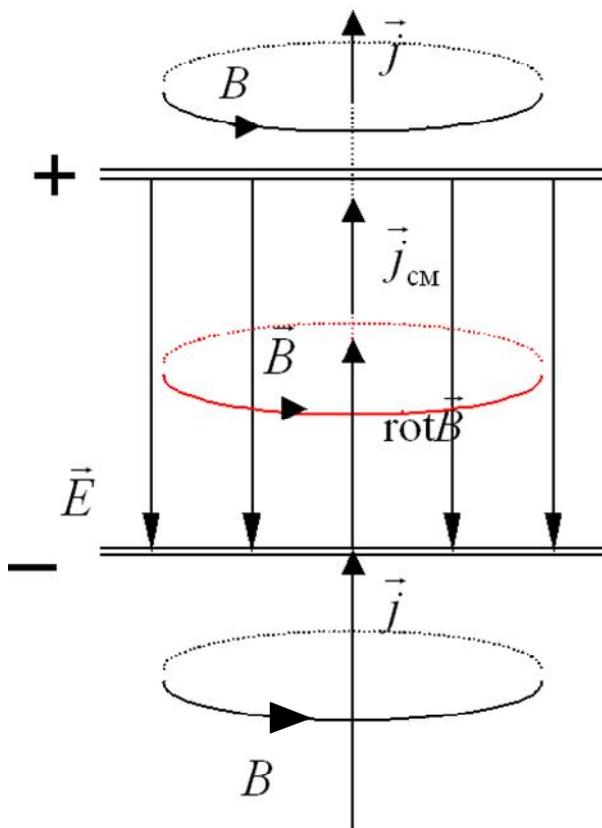


Рис. 18.20. Появление тока смещения при разрядке конденсатора

В этих примерах ток смещения замыкает через конденсатор ток проводимости и, наряду с током проводимости, создает вихревое магнитное поле.

### Контрольные вопросы

1. Покажите, что правило Ленца соответствует закону сохранения энергии для процесса электромагнитной индукции.
2. Покажите, что явление электромагнитной индукции, рассмотренное в различных инерциальных системах отсчета, подтверждает принцип относительности Эйнштейна.
3. Каков принцип получения переменной ЭДС в электрических машинах?

4. Почему сердечники трансформаторов собирают из тонких, изолированных друг от друга листов трансформаторной стали?
5. Всегда ли стремятся уменьшить вихревые токи Фуко? Приведите примеры использования токов Фуко.
6. Какое явление лежит в основе работы трансформаторов?
7. Что является источником *вихревого электрического* поля? Источником *вихревого магнитного* поля?
8. Почему можно сказать, что индуктивность контура характеризует его инерционные свойства?
9. Что такое по своей сути «ток смещения в вакууме»? Сравните его с током проводимости.

### Примеры решения задач

**Пример 18.1.** В однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 5$  Тл, вращается стержень длиной  $\ell = 1$  м с постоянной угловой скоростью  $\omega = 20$  рад/с. Ось вращения перпендикулярна стержню, проходит через его конец и параллельна силовым линиям магнитного поля (рис. 18.21). Найдите разность потенциалов  $(\varphi_0 - \varphi_c)$ , возникающую между концами стержня.

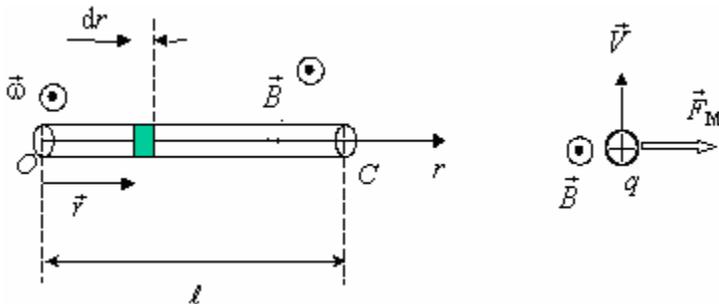


Рис. 18.21

#### Решение

Перераспределение зарядов в стержне происходит под действием магнитной составляющей силы Лоренца

$$\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}] , \quad (18.33)$$

являющейся в данном случае сторонней. Если стержень вращается так, как показано на рис. 18.21 (ось вращения проходит через точку  $O$ ), то электроны будут накапливаться на закрепленном конце стержня.

Заряды разных знаков накапливаются на концах стержня до тех пор, пока электрическая сила созданного ими кулоновского поля не уравновесит магнитную силу:

$$\vec{F}_Э + \vec{F}_М = 0, \quad (18.34)$$

или

$$q\vec{E}_к + q[\vec{v}, \vec{B}] = 0. \quad (18.35)$$

Вращающийся стержень пронизывается переменным магнитным потоком, и, в соответствии с законом электромагнитной индукции, в нем наводится (индуцируется) ЭДС индукции, и между двумя любыми точками стержня возникает разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}_к, d\vec{r}). \quad (18.36)$$

Подставив в формулу (18.36) величину  $\vec{E}_к$  из уравнения (18.35) получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = - \int_1^2 \left( [\vec{v}, \vec{B}], d\vec{r} \right). \quad (18.37)$$

Для проведения расчета введем радиус-вектор  $\vec{r}$ , направленный от оси вращения вдоль стержня. Вектор линейной скорости  $\vec{v}$  любой точки стержня перпендикулярен вектору  $\vec{B}$ . Вектор  $[\vec{v}, \vec{B}]$  направлен по стержню от оси вращения. Это направление сохранится в любом положении стержня. Таким образом, вектор  $[\vec{v}, \vec{B}]$  коллинеарен радиусу-вектору  $\vec{r}$ .

Учитывая коллинеарность векторов  $[\vec{v}, \vec{B}]$  и  $d\vec{r}$  и выражая линейную скорость, различную для разных точек стержня, через угловую ( $v = \omega r$ ), получаем:

$$\left( [\vec{v}, \vec{B}], d\vec{r} \right) = vBdr = B\omega r dr. \quad (18.38)$$

При интегрировании от т.О до т.С  $r$  изменяется от 0 до  $\ell$ . Таким образом, подставляя (18.37) в (18.36) и учитывая пределы интегрирования, получаем:

$$\varphi_O - \varphi_C = -\omega B \int_0^{\ell} r dr = -\frac{\omega B \ell^2}{2}. \quad (18.39)$$

Подставим численные значения и выполним вычисления:

$$\varphi_O - \varphi_C = -\frac{20 \cdot 5 \cdot 1^2}{2} = -50 \text{ В}.$$

**Пример 18.2.** В однородном магнитостатическом поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл равномерно вращается рамка, содержащая  $N = 1000$  витков, с частотой  $n = 10$  Гц. Площадь рамки равна  $S = 150$  см<sup>2</sup>. Определите мгновенное значение ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$ , соответствующее углу поворота рамки  $\alpha = 30^\circ$ , где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$  (рис. 18.12), а также максимальное и среднее значения ЭДС за минимальное время  $\tau$ , в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения.

**Решение**

1. Мгновенное значение ЭДС индукции определяется формулой закона Фарадея (18.4):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Psi_B}{\partial t} = -N \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial (N \Phi_B)}{\partial t}.$$

При вращении рамки магнитный поток изменяется по закону

$$\Phi_B = (\vec{B}, \vec{S}) = BS \cos \omega t, \text{ где } \omega = 2\pi n - \text{угловая частота.}$$

Найдем мгновенное значение ЭДС индукции: подставив значение  $\omega t = \alpha$ .

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Psi_B}{\partial t} = -N \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = NBS\omega \sin \omega t, \quad (18.40)$$

Произведя вычисления по формуле (18.40), получим:

$$\mathcal{E}_i = 47,1 \text{ В}.$$

2. Максимальное значение ЭДС индукции равно амплитудному значению согласно формуле

$$\mathcal{E}_i^{\max} = NBS\omega = NBS \cdot 2\pi n \quad (18.41)$$

Произведя вычисления по формуле (18.41), получим:

$$\mathcal{E}_i^{\max} = 94,2 \text{ В.}$$

3. Среднее значение ЭДС за минимальное время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения, т.е. за  $\tau = \frac{1}{4}T$ , где  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{n}$  (поскольку поток изменяется по косинусоидальному закону):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_i \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \mathcal{E}_i(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} NBS\omega \sin \omega t dt = \\ &= \frac{4}{T} NBS(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2}) = 4nNBS. \end{aligned} \quad (18.42)$$

Произведя вычисления по формуле (18.42), получим:

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = 60 \text{ В.}$$

## Глава 19. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ – УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

В предыдущих главах были рассмотрены экспериментально установленные основные законы электромагнитных явлений: теорема Гаусса, закон полного тока Ампера и закон электромагнитной индукции Фарадея – Ленца.

*Законы электромагнитного поля сформулированы Дж.К. Максвеллом как обобщение экспериментальных фактов.* Они позволяют решать основную задачу, возникающую при изучении электромагнитных явлений: по заданному распределению зарядов и токов отыскать созданные ими в каждой точке пространства электрические и магнитные поля.

Математическая запись этих законов – *уравнений Максвелла* – в современном виде сделана Г. Герцем и О. Хевисайдом.

**Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах для статических полей (в вакууме):**

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \oiint_S E_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{II. } \oint_L E_\tau dl = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = [\nabla \vec{E}] = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{III. } \oiint_S B_n dS = 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{IV. } \oint_L B_\tau dl = \mu_0 I, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = [\nabla \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}. \end{array} \right\}$$

**Уравнения I и II** характеризуют электростатическое поле и указывают на существование электрических зарядов, на которых начинаются и кончаются силовые линии электрического поля. Равенство нулю циркуляции  $\vec{E}$  указывает на потенциальный характер электростатического поля (силовые линии поля не замкнуты – либо расходятся, либо сходятся).

**Уравнения III и IV** характеризуют магнитостатическое поле и указывают на источник магнитостатического поля – постоянные электрические токи. Равенство нулю потока вектора  $\vec{B}$  указывает на отсутствие магнитных зарядов: силовые линии магнитного поля замкнуты, т.е. магнитное поле – вихревое.

**Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах для переменных полей (в вакууме):**

$$\left. \begin{array}{l} \text{II. } \oint_L \vec{E}_\tau d\ell = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}, \\ \text{rot}\vec{E} = [\nabla\vec{E}] = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{IV. } \oint_L \vec{B}_\tau d\ell = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi_E}{\partial t} = \mu_0 \left( I + \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial\Phi_E}{\partial t} \right) = \mu_0 (I + I_{\text{см}}), \\ \text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}). \end{array} \right\}$$

**Уравнение II** указывает на *новый* источник электрического поля – переменное магнитное поле, и возникающее электрическое поле оказывается тоже *новым* – *вихревым*.

**Уравнение IV** указывает на *новый* источник магнитного поля – переменное электрическое поле, но возникающее при этом магнитное поле оказывается таким же, как и в статике, – *вихревым*.

## Выводы

### Электрическое поле

1. *Потенциальное* – создается зарядами – неподвижными и движущимися:

$$\text{div}\vec{E} \neq 0 \text{ и } \text{rot}\vec{E} = 0.$$

2. *Вихревое* – создается переменным магнитным полем:

$$\text{rot}\vec{E} \neq 0.$$

**Асимметрия:** нет такого источника вихревого  $E$ -поля как «движущиеся «магнитные» заряды», чтобы

$$\text{div}\vec{E} = 0 \text{ и } \text{rot}\vec{E} \neq 0$$

Электрическое поле существует всегда и всюду, когда и где есть электрические заряды или (и) переменное магнитное поле.

## Магнитное поле

1. Потенциальное – не существует.

**Асимметрия:** нет «магнитных» зарядов, т.е. нет сходящихся и расходящихся магнитных полей – таких, чтобы

$$\operatorname{div}\vec{B} \neq 0 \text{ и } \operatorname{rot}\vec{B}=0.$$

2. Вихревое создается:

а) движущимися электрическими зарядами:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \text{ и } \operatorname{rot}\vec{B} \neq 0;$$

б) переменным электрическим полем:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \text{ и } \operatorname{rot}\vec{B} \neq 0.$$

**Магнитное поле существует всегда и всюду, когда и где есть движущиеся электрические заряды или (и) переменное электрическое поле.**

Очевидна математическая асимметрия уравнений Максвелла:

Физически это означает, что электрическое поле имеет источником электрические заряды и переменное магнитное поле, а магнитное поле имеет источником те же электрические заряды (но движущиеся) и переменное электрическое поле, т.е. уравнениями Максвелла утверждается отсутствие магнетизма как самостоятельного явления. В 1931 году П.А.М. Дирак предположил существование магнитных монополей – «магнитных зарядов», т.е. изолированных северных и южных магнитных полюсов, которые должны были быть полным магнитным эквивалентом зарядов электрических. Тогда электрические явления могли бы стать следствием движения зарядов магнитных. Заряд монополя должен превосходить примерно в

$$\frac{\sqrt{137}}{2} : \frac{1}{\sqrt{137}} \approx 68,5 \text{ раза заряд электрона. Масса монополя должна}$$

быть примерно в три раза больше массы протона. (По другим предположениям масса монополя должна превосходить массу протона в  $10^{16}$  раз (!)). Согласно теории Великого объединения, монополи должны были образоваться через  $10^{-35}$  с после Большого взрыва. Однако, до сих пор они экспериментально не обнаружены.

## Контрольные вопросы

1. В чем состоит асимметричность электрического и магнитного полей?
2. Является ли магнитное поле потенциальным?
3. Каковы условия возникновения вихревого электрического поля?
4. Может ли существовать электрическое поле без магнитного?
5. Что называется током смещения? Каково его магнитное действие и как его можно обнаружить?
6. Может ли существовать магнитное поле без электрического?
7. Каковы условия возникновения вихревого магнитного поля?
8. Какова взаимосвязь между переменными электрическим и магнитным полями?
9. Напишите полную систему уравнений Максвелла для постоянных и переменных электромагнитных полей.

## ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

### 11. Постоянное электромагнитное поле элементарных источников

#### *Напряженность электрического поля точечных зарядов*

11.1.1. Точечные заряды  $q_1, q_2, q_3, q_4$  находятся в вершинах квадрата со стороной 1 м, а  $q_5$  – в его середине. Определите величину силы, действующей на заряд  $q_5$ , если  $q_2 = q_3 = q_4 = -1$  мкКл,  $q_1 = q_5 = +1$  мкКл.

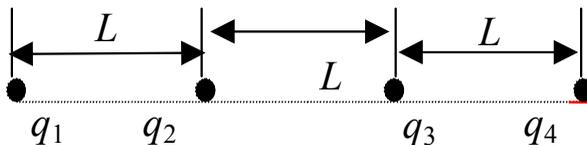
11.1.2. Расстояние между двумя точечными зарядами 8 нКл и  $(-5,3)$  нКл равно 40 см. Вычислите напряженность поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему равна напряженность в той же точке, если второй заряд положительный?

11.1.3. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами 10 нКл и  $(-20)$  нКл, находящимися на расстоянии 20 см друг от друга. Определите напряженность поля в точке, удаленной на 30 см от первого заряда и на 50 см от второго.

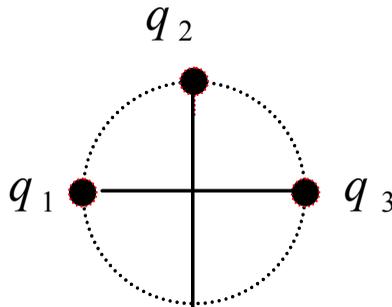
11.1.4. Расстояние между двумя точечными зарядами  $9Q$  и  $Q$  равно 8 см. На каком расстоянии от первого заряда находится точка, в которой напряженность поля равна нулю? Где находилась бы эта точка, если бы второй заряд был отрицательным?

11.1.5. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами 40 нКл и  $(-10)$  нКл, находящимися на расстоянии 10 см друг от друга. Определите напряженность поля в точке, удаленной на 12 см от первого заряда и на 6 см от второго.

11.1.6. На одной прямой на равном расстоянии  $L = 0,15$  м друг от друга расположены 4 точечных заряда  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 10^{-5}$  Кл так, как показано на рисунке. Определите величину результирующей силы, действующей на заряд  $q_3$ .



11.1.7. Три одноименных точечных заряда по 1 мкКл расположены так, как изображено на рисунке. Радиус окружности равен 0,03 м. Определите величину силы, действующей на заряд  $q_3$ .



11.1.8. На окружности на одинаковом расстоянии друг от друга расположены 3 точечных заряда по 3 нКл каждый. Диаметр окружности 0,1 м. Какая результирующая сила действует на заряд  $(-2)$  нКл, расположенный в центре окружности?

### *Потенциал электрического поля точечных зарядов*

11.2.1. Электрическое поле создано положительным точечным зарядом. Потенциал поля в точке, удаленной от заряда на 12 см, равен 24 В. Определите градиент потенциала и его направление в этой точке.

11.2.2. Определите потенциальную энергию системы четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной 10 см. Заряды одинаковы по модулю и равны 10 нКл, но два из них отрицательны. Рассмотрите два возможных случая расположения зарядов.

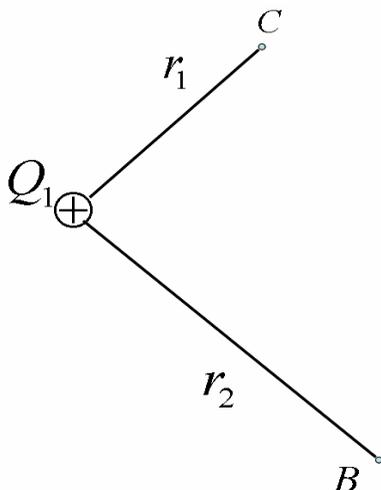
11.2.3. Два заряда  $+400$  нКл и  $-600$  нКл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Найдите потенциал той точки поля, где результирующая напряженность поля равна нулю.

11.2.4. Точечный заряд 10 нКл, находясь в некоторой точке поля, обладает потенциальной энергией 10 мкДж. Найдите потенциал этой точки поля.

11.2.5. Два заряда  $q_1 = +4 \cdot 10^{-7}$  Кл и  $q_2 = -6 \cdot 10^{-7}$  Кл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Найдите напряженность поля зарядов в той точке, где потенциал поля равен нулю. (Точку считайте расположенной на прямой, проходящей через заряды.)

11.2.6. Электрическое поле создано точечным зарядом  $Q_1 = 50$  нКл. Определите изменение потенциальной энергии системы зарядов, изо-

браженной на рисунке, при перемещении точечного заряда  $Q_2 = -2$  нКл из точки  $C$  в точку  $B$ , если  $r_1 = 10$  см,  $r_2 = 20$  см.



11.2.7. Поле создано точечным зарядом 1 нКл. Определите потенциал поля в точке, удаленной от заряда на расстояние 20 см.

11.2.8. Какой полной энергией обладает электрон в атоме водорода, если исходить из теории Бора и принять радиус первой орбиты атома водорода  $5,3 \cdot 10^{-9}$  см?

11.2.9. Определить потенциал электрического поля в точке, удаленной от зарядов  $Q_1 = -0,2$  мкКл и  $Q_2 = +0,5$  мкКл на расстояния 15 см и 25 см соответственно.

11.2.10. Определите изменение потенциальной энергии системы зарядов 50 нКл и  $(-2)$  нКл, если расстояние между ними изменяется от 10 см до 20 см.

11.2.11. Заряды  $Q_1 = 1$  мкКл и  $Q_2 = -1$  мкКл находятся на расстоянии 10 см. Определите потенциал поля в точке, удаленной на расстояние 10 см от первого заряда и лежащей на линии, проходящей через первый заряд перпендикулярно направлению от  $Q_1$  к  $Q_2$ .

11.2.12. Точечный заряд 10 нКл, находясь в некоторой точке поля, обладает потенциальной энергией 10 мкДж. Найдите потенциал этой точки поля.

11.2.13. Два одноименных заряда по 1,0 нКл каждый находятся на некотором расстоянии друг от друга. Определите потенциал точки, лежащей на расстоянии 9,0 см от каждого из зарядов. Как изменится этот

потенциал, если все пространство, в котором находятся заряды, заполнить керосином? Диэлектрическая проницаемость керосина равна 2,0.

11.2.14. Вычислите потенциальную энергию системы двух точечных зарядов  $Q_1 = 100$  нКл и  $Q_2 = 10$  нКл, находящихся на расстоянии 10 см друг от друга.

11.2.15. Определите разность потенциалов между точками, отстоящими от заряда  $4,0$  мкКл на расстояние 16 см и 20 см.

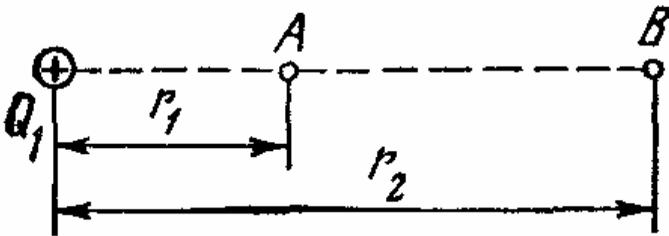
11.2.16. Какова потенциальная энергия системы четырех одинаковых точечных зарядов  $Q = 10$  нКл, расположенных в вершинах квадрата со стороной 10 см?

### Работа в электростатическом поле

11.3.1. При перемещении заряда 20 нКл между двумя точками поля внешними силами была совершена работа  $(-4)$  мкДж. Определить работу сил поля и разность потенциалов этих точек поля.

11.3.2. Точечные заряды  $Q_1 = 1$  мкКл и  $Q_2 = 0,1$  мкКл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Какую работу совершат силы поля, если второй заряд, отталкиваясь от первого, удалится от него на расстояние: 1) 10 м; 2)  $\infty$ ?

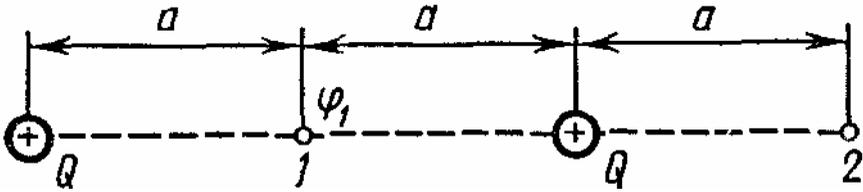
11.3.3. Электростатическое поле создано точечным положительным зарядом 6 нКл. Положительный заряд  $Q$  переносится из точки  $A$  этого поля в точку  $B$ . Каково изменение потенциальной энергии, приходящееся на единицу переносимого заряда, если  $r_1 = 20$  см и  $r_2 = 50$  см?



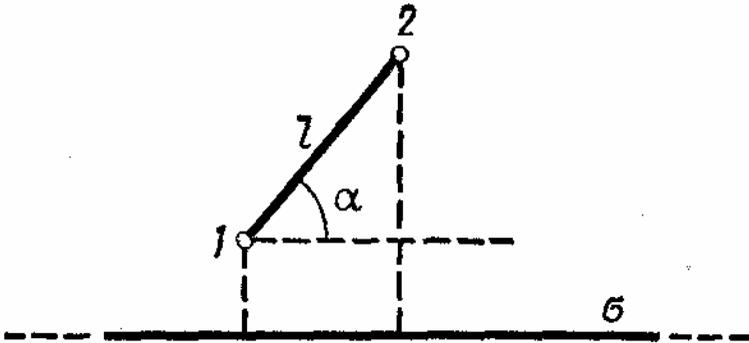
11.3.4. Два заряда по  $1,0$  мкКл каждый находятся на расстоянии 50 см друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до 5,0 см?

11.3.5. Заряды  $0,15$  мкКл и  $3,0$  нКл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Какую работу совершат силы поля, если второй заряд, отталкиваясь от первого, удалится от него на расстояние 10 м?

11.3.6. Электростатическое поле создано двумя одинаковыми положительными точечными зарядами  $Q$ . Найти работу сил поля по перемещению заряда ( $Q_1 = 10$  нКл из точки 1 с потенциалом 300 В в точку 2.



11.3.7. Электрическое поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда  $2 \text{ мкКл/м}^2$ . В этом поле вдоль прямой, составляющей угол  $60^\circ$  с плоскостью, из точки 1 в точку 2, расстояние между которыми равно  $20 \text{ см}$ , перемещается точечный электрический заряд  $10 \text{ нКл}$ . Определить работу  $A$  сил поля по перемещению заряда.



### **Магнитное поле точечных движущихся зарядов**

11.3.8. Найдите значение индукции магнитного поля, создаваемого прямолинейно движущимся электроном, который прошел ускоряющую разность потенциалов  $10 \text{ В}$ , в точке, **отстоящей от электрона на  $10 \text{ нм}$  и лежащей на линии его движения.**

11.3.9. Определите индукцию магнитного поля, создаваемого релятивистским электроном, движущимся прямолинейно со скоростью  $10 \text{ Мм/с}$ , в точке, находящейся на расстоянии  $1 \text{ нм}$  от электрона на перпендикуляре к линии его движения.

11.3.10. В точке, находящейся на расстоянии  $10 \text{ нм}$  от траектории прямолинейно движущегося релятивистского электрона, максимальное значение магнитной индукции  $160 \text{ мТл}$ . Определите скорость электрона.

11.3.11. Электрон движется равномерно вдоль прямой линии со скоростью  $0,99 \cdot c$ . Определите индукцию магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии  $10 \text{ нм}$  от электрона на линии его движения.

11.3.12. Электрон движется равномерно вдоль прямой линии со скоростью  $0,99c$ . Определите индукцию магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии  $10 \text{ нм}$  от электрона на перпендикуляре к линии его движения.

11.3.13. Определите скорость равномерного прямолинейного движения электрона, если известно, что максимальное значение **индукции** создаваемого им магнитного поля на расстоянии  $100 \text{ нм}$  от траектории его движения равно  $251 \text{ нТл}$ .

11.3.14. Найдите максимальное значение индукции магнитного поля, создаваемого прямолинейно движущимся электроном, который прошел ускоряющую разность потенциалов  $10 \text{ В}$ , в точке, отстоящей от его траектории на  $10 \text{ нм}$  и лежащей на перпендикуляре к вектору скорости, проходящем через мгновенное положение электрона.

11.3.15. Электрон движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $3 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ . Найдите индукцию магнитного поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии  $1 \cdot 10^{-9} \text{ м}$  от него и лежащей на перпендикуляре к вектору скорости, проходящем через мгновенное положение электрона.

## 13. Расчеты электростатических полей

### *Поле заряженной плоскости*

13.1.1. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими одинаковый равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma = 1 \text{ нКл/м}^2$ . Определите напряженность поля между пластинами и снаружи пластин.

13.1.2. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный заряд с поверхностными плотностями  $2 \text{ нКл/м}^2$  и  $(-5) \text{ нКл/м}^2$ . Определите напряженность поля между пластинами и снаружи пластин.

13.1.3. Электрическое поле создано двумя параллельными бесконечными равномерно заряженными плоскостями с поверхностными плотностями заряда  $0,4 \text{ мкКл/м}^2$  и  $0,1 \text{ мкКл/м}^2$ . Определите напряженность поля между пластинами.

### *Поле заряженной нити*

13.2.1. Расстояние между двумя очень длинными прямыми проволоками, расположенными параллельно друг другу, равно  $16 \text{ см}$ . Проволоки равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью, модуль которой равен  $150 \text{ мкКл/м}$ . Какова напряженность поля в точке, удаленной от обеих проволок на  $10 \text{ см}$ ?

13.2.2. Заряд очень длинной тонкой прямой проволоки равномерно распределен по всей ее длине. Вычислите линейную плотность этого заряда, если напряженность поля на расстоянии 0,5 м от проволоки напротив ее середины равна 200 В/м.

13.2.3. В точке, расположенной на расстоянии 5 см от бесконечно длинной равномерно заряженной нити, напряженность электрического поля равна 1500 В/см. Найдите линейную плотность заряда на нити.

13.2.4. Две длинные одноименно заряженные нити расположены на расстоянии 10 см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях равна  $10^{-7}$  Кл/см. Найдите направление и численное значение напряженности результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии 10 см от каждой нити.

13.2.5. Расстояние между двумя параллельными длинными проволоками 14 см. Проволоки заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью, модуль которой равен  $10^{-8}$  Кл/м. Определите напряженность поля в точке, равноудаленной на 10 см как от первой, так и от второй проволочек.

### *Поле заряженной сферы (металлического шара)*

13.3.1. Металлический шар радиусом 2 см окружен сферической металлической оболочкой радиусом 4 см, центры шара и оболочки совпадают. На шаре находится заряд  $+2 \cdot 10^{-8}$  Кл, на оболочке – заряд  $(-4 \cdot 10^{-8})$  Кл. Определите напряженность поля на расстоянии 3 см от центра шара.

13.3.2. Металлический шар радиусом 2 см окружен сферической металлической оболочкой радиусом 4 см, центры шара и оболочки совпадают. На шаре находится заряд  $(+2 \cdot 10^{-8})$  Кл, на оболочке – заряд  $(-4 \cdot 10^{-8})$  Кл. Определите напряженность поля на расстоянии 5 см от центра шара.

13.3.3. Две металлические сферы расположены концентрически. Заряд меньшей сферы 2 нКл, а большей 5 нКл. Найдите напряженность поля в точке, которая удалена на расстояние 7 см от общего центра и находится между сферами.

13.3.4. Две металлические сферы расположены концентрически. Заряд меньшей сферы 2 нКл, а большей 5 нКл. Найдите напряженность поля в точке, которая удалена на расстояние 15 см от общего центра и находится вне обеих сфер.

### *Поле диэлектрического шара*

13.4.1. Заряд полого эбонитового шара равномерно распределен по объему шара. Его объемная плотность  $100$  нКл/м<sup>3</sup>. Внутренний радиус

шара равен 5 см, наружный – 10 см. Вычислите напряженность электрического поля в точках отстоящих от центра шара на 6 см. Диэлектрическая проницаемость эбонита равна 3.

13.4.2. Заряд полого эбонитового шара равномерно распределен по объему шара. Его объемная плотность  $100 \text{ нКл/м}^3$ . Внутренний радиус шара равен 5 см, наружный 10 см. Вычислите напряженность электрического поля в точках, отстоящих от центра шара на 12 см.

13.4.3. Заряд стеклянного сплошного шара радиусом 5 см равномерно распределен с объемной плотностью  $10 \text{ нКл/м}^3$ . Определите напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстоянии 3 см от центра шара. Диэлектрическая проницаемость стекла равна 7.

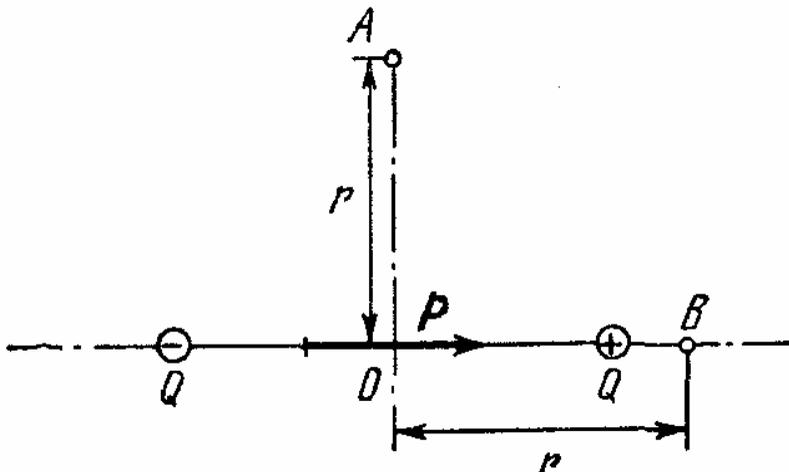
13.4.4. Заряд стеклянного сплошного шара радиусом 5 см равномерно распределен с объемной плотностью  $10 \text{ нКл/м}^3$ . Определите напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстоянии 10 см от центра шара.

### *Поле электрического диполя*

13.5.1. Вычислите электрический момент диполя, образованного зарядами, модуль которых равен 10 нКл. Плечо диполя равно 0,5 см.

13.5.2. Диполь образован зарядами, модуль которых равен 3,2 нКл, плечо диполя равно 12 см. Найдите напряженность и потенциал поля, созданного диполем в точке, удаленной на 8 см как от первого, так и от второго заряда.

13.5.3. Диполь с электрическим моментом  $0,12 \text{ нКл}\cdot\text{м}$  образован двумя точечными зарядами, модуль которых равен 1 нКл. Найдите напряженность и потенциал электрического поля в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $r = 8 \text{ см}$  от центра диполя.



13.5.4. Определите напряженность и потенциал поля, создаваемого диполем с электрическим моментом  $p = 4$  пКл·м на расстоянии 10 см от центра диполя, в направлении, составляющем угол  $60^\circ$  с вектором электрического момента.

13.5.5. Определите напряженность и потенциал поля, созданного диполем в точках  $A$  и  $B$  (рис. 8). Его электрический момент равен 1 пКл·м, а расстояние от точек  $A$  и  $B$  до центра диполя равно  $r = 10$  см.

13.5.6. Определите напряженность поля, создаваемого точечным диполем с электрическим моментом  $2,0 \cdot 10^{-12}$  Кл·м, на расстоянии 10 см от центра диполя в направлении, перпендикулярном оси диполя.

13.5.7. Диполь с электрическим моментом 0,12 нКл·м образован двумя точечными зарядами, модуль которых равен 1 нКл (см. рисунок к задаче 13.5.3). Найдите напряженность и потенциал электрического поля в точке  $B$ , находящейся на расстоянии  $r = 8$  см от центра диполя.

13.5.8. Расстояние между зарядами диполя 1,0 мкм. Найдите величину зарядов диполя, если напряженность в точке, удаленной от обоих зарядов на 2,0 см, равна 1,8 В/м.

## 14. Постоянный ток

### Закон Ома для участка цепи

14.1.1. Какое количество электричества переносится, если ток убывает от 18 А до нуля, причем за каждые 0,01 с он убывает вдвое? Закон убывания тока:  $I = 18 \cdot 2^{-100t}$  (А).

14.1.2. Чему равна сила тока в проводнике, если за 1 мин через сечение проводника протекает 30 мКл электричества?

14.1.3. Принимая, что на каждый атом меди и вольфрама приходится один свободный электрон, определите для этих металлов отношение: а) концентраций свободных электронов; б) средних скоростей упорядоченного движения электронов при одинаковой плотности тока.

14.1.4. В медном проводнике длиной 2 м и площадью поперечного сечения  $0,4 \text{ мм}^2$  идет ток. Мощность, выделяющаяся в проводнике, 0,35 Вт. Определите число электронов, проходящих за 1 с через поперечное сечение этого проводника.

14.1.5. По железному проводнику течет ток с плотностью  $10 \text{ А/м}^2$ . Считая, что на каждый атом металла приходится один свободный электрон, определите среднюю скорость упорядоченного движения электронов (дрейфовую скорость).

14.1.6. Как изменится сопротивление медной проволоки, если ее растянуть на 0,1 %? Удельное сопротивление меди равно  $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

14.1.7. Чему равна сила тока в проводнике, если за 1 мин через сечение проводника протекает 30 мКл электричества?

14.1.8. По проводу течет ток 10 А. Найдите массу электронов, проходящих через поперечное сечение этого провода за время 1,0 час.

14.1.9. Вольтметр сопротивлением 10 Ом рассчитан на силу тока 30 мА. Какое добавочное сопротивление надо взять, чтобы можно было включать вольтметр в сеть с напряжением до 150 В?

14.1.10. Параллельно амперметру, имеющему сопротивление 0,020 Ом, включен медный проводник длиной 20 см и сечением  $3,4 \text{ мм}^2$ . Определите величину тока в цепи, если амперметр показывает 0,30 А. Удельное сопротивление меди равно  $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

14.1.11. Вольтметр, включенный последовательно с сопротивлением 70 Ом, показывает напряжение 100 В при напряжении в цепи 240 В. Что покажет вольтметр, если его включить последовательно с сопротивлением 35 кОм в ту же сеть?

14.1.12. Зашунтированный амперметр измеряет токи до 10 А. Какой наибольший ток может измерить этот прибор без шунта, если сопротивление амперметра 0,02 Ом и сопротивление шунта 0,005 Ом?

14.1.13. Имеется миллиамперметр с сопротивлением 9,9 Ом, предназначенный для измерения токов не более 10 мА. Каким должно быть сопротивление шунта для того, чтобы этим прибором измерять токи до 1 А?

## Закон Ома для полной цепи

14.3.1. Какие сопротивления резисторов можно получить, имея в своем распоряжении три резистора сопротивлением 60 Ом каждый?

14.3.2. При последовательном подключении к сети двух проводников сила тока в 6,25 раза меньше, чем при параллельном подключении этих проводников. Во сколько раз отличаются сопротивления проводников?

14.3.3. Электродвижущая сила элемента и его внутреннее сопротивление равны соответственно 1,6 В и 0,5 Ом. Чему равен КПД элемента при токе 2,4 А?

14.3.4. Батарея состоит из 5 последовательно соединенных элементов с ЭДС 1,4 В и внутренним сопротивлением 0,3 Ом каждый. Определите ток, при котором полезная мощность батареи равна 8 Вт.

14.3.5. Каково внутреннее сопротивление одного аккумулятора, если при смешанном соединении аккумуляторов в две группы по четыре последовательно соединенных аккумулятора в каждой группе, на сопротивлении 3 Ом выделяется такая же мощность, как и в случае последовательного соединения аккумуляторов, замкнутых на то же сопротивление?

14.3.6. Батарея гальванических элементов замкнута на внешнее сопротивление 10 Ом и дает ток 3 А. Если вместо этого сопротивления включить сопротивление 20 Ом, то ток станет равным 1,6 А. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

14.3.7. К батарейке с ЭДС 4,5 В и внутренним сопротивлением 1,0 Ом подключили резистор сопротивлением 8,0 Ом. Какой силы ток потечет в цепи? Чему равно напряжение на внешнем сопротивлении?

14.3.8. В цепи, состоящей из источника тока с ЭДС 6,0 В, внутренним сопротивлением 2,0 Ом и внешним сопротивлением, идет ток 1,0 А. Какой ток пойдет по цепи, если внешнее сопротивление увеличить в 2,0 раза?

14.3.9. Когда к источнику тока подключили резистор сопротивлением 5,0 Ом, величина тока стала 1,0 А, а когда подключили резистор сопротивлением 15 Ом, то ток стал равным 0,50 А. Определите ЭДС источника тока и его внутреннее сопротивление.

14.3.10. К генератору подключено 100 ламп, соединенных параллельно, имеющих сопротивление 1,2 кОм каждая. Напряжение на лампах 220 В. Внутреннее сопротивление генератора 6,0 Ом. Определите ЭДС генератора.

14.3.11. В сеть с напряжением 24 В подключили два последовательно соединенных резистора. При этом величина тока стала равной 0,60 А. Когда резисторы подключили параллельно, суммарная величина тока стала равной 3,2 А. Определите сопротивления резисторов.

## *Работа и мощность тока*

14.4.1. Какую работу произвел электрический ток, если через сечение проводника прошел заряд 1,5 Кл и падение напряжения на проводнике 2,0 В?

14.4.2. За время 10 с через проводник, падение напряжения на котором 12 В, прошел заряд 24 Кл. Определите работу, совершенную током, мощность тока, сопротивление проводника.

14.4.3. Прибор имеет три нагревательные спирали по 120 Ом каждая. Какие мощности можно получить, используя различные соединения спиралей? Напряжение в сети 120 В.

14.4.4. Мощность, выделяемая на резисторе, подключенном к источнику тока с ЭДС 3,0 В и внутренним сопротивлением 1,0 Ом, равна 2,0 Вт. Определите величину тока в цепи.

14.4.5. ЭДС источника тока 2,0 В, внутреннее сопротивление 1,0 Ом. Определите сопротивление внешней цепи, если в ней выделяется мощность 0,75 Вт.

14.4.6. Две лампочки сопротивлениями 180 Ом и 360 Ом **подключили** параллельно к сети с напряжением 120 В. Какая мощность выделяется в каждой из лампочек? Какая будет выделяться мощность, если лампочки подключить последовательно?

14.4.7. Перегоревшую спираль электрического утюга мощностью 300 Вт укоротили на  $\frac{1}{4}$ . Какой стала при этом его мощность?

14.4.8. При изменении внешнего сопротивления с 6,0 Ом до 21 Ом КПД схемы увеличился вдвое. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока?

## **15. Расчеты магнитостатических полей**

### *Магнитное поле прямого тока*

15.1.1. Два длинных параллельных провода находятся на расстоянии 5 см один от другого. По проводам текут в противоположных направлениях одинаковые токи по 10 А каждый. Найдите индукцию магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии 2 см от одного и 3 см от другого провода.

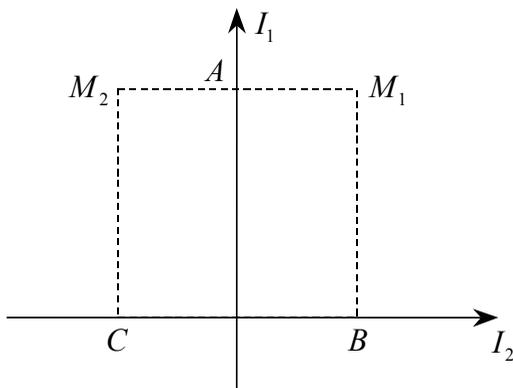
15.1.2. Два длинных параллельных провода находятся на расстоянии 5 см один от другого. По проводам текут в одном направлении одинаковые токи по 30 А каждый. Найдите индукцию магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии 4 см от одного и 3 см от другого провода.

15.1.3. Два бесконечно длинных провода скрещены под прямым углом. По проводам текут токи 80 А и 60 А. Расстояние между проводами равно 10 см. Найдите индукцию магнитного поля в точке, равноудаленной от обоих проводов на 5 см.

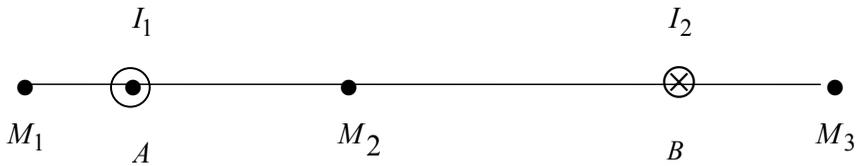
15.1.4. Два длинных параллельных провода находятся на расстоянии 10 см один от другого. По проводам текут в одном направлении токи 20 А и 30 А. Найдите индукцию магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии 10 см от обоих проводов.

15.1.5. Два бесконечно длинных провода скрещены под прямым углом. По проводам текут токи 30 А и 40 А. Расстояние между проводами равно 20 см. Найдите индукцию магнитного поля в точке, равноудаленной от обоих проводов на расстояние 20 см.

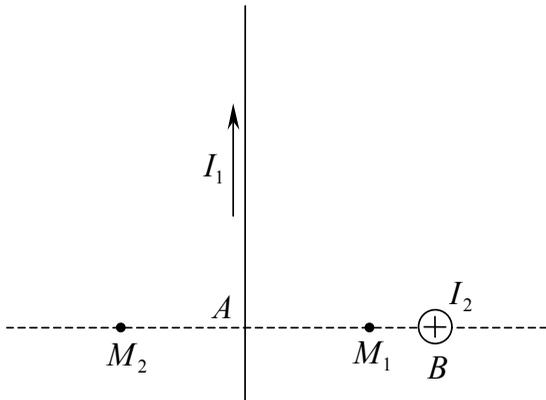
15.1.6. Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг другу и находятся в одной плоскости. Найдите индукцию магнитного поля в точках  $M_1$  и  $M_2$ , если  $I_1 = 2$  А и  $I_2 = 3$  А. Расстояния  $AM_1 = AM_2 = 1$  см,  $BM_1 = CM_2 = 2$  см.



15.1.7. На рисунке изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводником с током. Расстояние  $AB$  между проводниками равно 10 см,  $I_1 = 20$  А и  $I_2 = 30$  А. Найдите индукцию магнитного поля, создаваемого токами  $I_1$  и  $I_2$  в точках  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ . Расстояние  $M_1A = 2$  см,  $AM_2 = 4$  см и  $BM_3 = 3$  см.



15.1.8. Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг другу и находятся во взаимно перпендикулярных плоскостях. Найдите индукцию магнитного поля в точках  $M_1$  и  $M_2$ , если  $I_1 = 2$  А и  $I_2 = 3$  А. Расстояния  $AM_1 = AM_2 = 1$  см и  $AB = 2$  см.



**Силы, действующие на проводник с током в магнитном поле**

15.2.1. В однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл равномерно со скоростью 20 см/с движется проводник длиной 10 см. По проводнику течет ток 2 А. Скорость движения проводника направлена перпендикулярно вектору индукции поля. Найдите работу перемещения проводника за 10 с.

15.2.2. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии 10 см друг от друга. По проводникам текут в одном направлении токи 20 и 30 А. Какую работу (на единицу длины проводника) надо совершить, чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния 20 см?

15.2.3. Между полюсами электромагнита создается однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл. По проводу длиной 70 см, помещенному перпендикулярно магнитным силовым линиям, течет ток 70 А. Найдите силу, действующую на единицу длины проводника.

15.2.4. Прямой провод, по которому течет ток 1 кА, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции. С какой силой действует поле на отрезок провода длиной 1 м, если магнитная индукция равна 1 Тл?

15.2.5. Прямой провод длиной 10 см, по которому течет ток 20 А, находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл. Найти угол между направлениями вектора  $\vec{B}$  и тока, если на провод действует сила 10 мН.

15.2.6. Двухпроводная линия состоит из длинных параллельных прямых проводов, находящихся на расстоянии 4 мм друг от друга. По проводам текут одинаковые токи 50 А. Определить силу взаимодействия токов, приходящуюся на единицу длины провода.

15.2.7. Шины генератора представляют собой две параллельные медные полосы длиной 2 м каждая, отстоящие друг от друга на расстоянии 20 см. Определить силу взаимного отталкивания шин в случае короткого замыкания, когда по ним течет ток 10 кА.

15.2.8. По двум параллельным проводам длиной 1 м каждый текут одинаковые токи. Расстояние между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой 1 мН. Найти величину тока в проводах.

### *Магнитное поле кругового тока (магнитного диполя)*

15.3.1. По обмотке очень короткой катушки радиусом 16 см течет ток 5 А. Сколько витков проволоки намотано на катушку, если индукция магнитного поля в ее центре равна  $4\pi \cdot 800$  мкТл?

15.3.2. По витку радиусом 5 см течет ток 10 А. Определите магнитный момент кругового тока.

15.3.3. Найдите индукцию магнитного поля в центре тонкого кольца, по которому течет ток 10 А. Радиус кольца равен 5 см.

15.3.4. Очень короткая катушка содержит 1000 витков тонкого провода. Катушка имеет квадратное сечение со стороной длиной 10 см. Найдите магнитный момент катушки при величине тока 1 А.

15.3.5. Индукция магнитного поля в центре витка с током радиусом 8 см равна 0,01 Тл. Определите индукцию магнитного поля в точке, лежащей на оси витка на расстоянии 6 см от его центра.

15.3.6. Напряженность магнитного поля в центре кругового витка равна 200 А/м. Магнитный момент витка равен  $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Вычислите величину тока в витке и радиус витка.

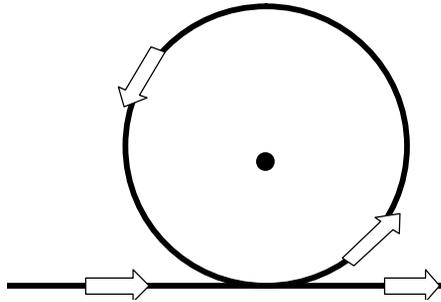
15.3.7. При какой величине тока, текущего по тонкому проводящему кольцу радиусом 0,2 м, магнитная индукция в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние 0,3 м, будет равна 20 мкТл?

15.3.8. По кольцу радиусом  $R$  течет ток. На оси кольца на расстоянии 1 м от его плоскости магнитная индукция равна 10 нТл. Определите магнитный момент кольца с током. Считайте радиус кольца много меньшим расстояния до исследуемой точки.

15.3.9. По проводнику в виде тонкого кольца радиусом 10 см течет ток. Чему равна величина тока, если магнитная индукция в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии 0,567 м от его центра, равна 1 мкТл?

15.3.10. Электрон в невозбужденном атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом 53 пм. Вычислите магнитный момент эквивалентного кругового тока и индукцию магнитного поля в центре орбиты.

15.3.11. Бесконечно длинный тонкий проводник, изготовленный из *неизолированного* провода, образует плоскую «мертвую петлю» радиусом 10 см (рис.11). Определите индукцию магнитного поля, создаваемого током 50 А в центре петли.



15.3.12. Магнитный момент витка с током равен 0,2 Дж/Тл. Определите величину тока в витке, если его диаметр равен 10 см.

15.3.13. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите некоторого радиуса. Найдите отношение магнитного момента эквивалентного кругового тока к моменту импульса орбитального движения электрона. Заряд электрона и его массу следует считать известными. Укажите направления векторов магнитного и орбитального моментов.

## **16. Движение в силовых полях**

### **Движение в гравитационном поле**

#### *Движение в однородном гравитационном поле*

16.1.1. Пуля вылетает с поверхности Земли с начальной скоростью  $200 \text{ м/с}$  под углом  $60^\circ$  к горизонту. Выведите кинематические уравнения движения пули и уравнение траектории. Определите максимальную высоту подъема, дальность полета и радиус кривизны траектории в ее наивысшей точке.

16.1.2. Миномет установлен на крыше здания, высота которого  $40 \text{ м}$ , и стреляет вверх под углом  $60^\circ$  к горизонту. Начальная скорость мины равна  $50 \text{ м/с}$ . Запишите кинематические уравнения движения и выведите уравнение траектории мины. Определите время и дальность полета мины, максимальную высоту подъема и скорость мины в момент падения на Землю.

16.1.3. Снаряд вылетает с поверхности Земли под углом  $30^\circ$  к горизонту. Запишите кинематические уравнения движения и выведите уравнение траектории. Определите начальную скорость снаряда, если он был на одной и той же высоте спустя  $10 \text{ с}$  и  $50 \text{ с}$  после начала движения, и эту высоту. Найдите тангенциальное и нормальное ускорения в момент начала движения.

16.1.4. Камень брошен с вышки горизонтально с начальной скоростью  $30 \text{ м/с}$ . Запишите кинематические уравнения движения и выведите уравнение траектории. Определите скорость, тангенциальное и нормальное ускорения камня в конце второй секунды после начала движения.

16.1.5. Тело брошено с поверхности Земли под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту. Запишите кинематические уравнения движения и выведите уравнение траектории. Найдите значение угла  $\alpha$ , если горизонтальная дальность полета тела в четыре раза больше максимальной высоты подъема тела над Землей.

16.1.6. С башни высотой  $19,6 \text{ м}$  в горизонтальном направлении брошено тело со скоростью  $10 \text{ м/с}$ . Запишите кинематические уравнения движения и выведите уравнение траектории этого тела. Чему равна скорость тела в момент падения? Какой угол образует вектор скорости тела с осью  $X$ ?

16.1.7. Тело брошено с поверхности Земли под углом  $45^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $20 \text{ м/с}$ . Запишите кинематические уравнения движения и выведите уравнение траектории этого тела. На

какой высоте вектор скорости этого тела будет составлять с горизонтом угол  $30^\circ$ ?

16.1.8. Камень брошен с поверхности Земли со скоростью 20 м/с под углом  $60^\circ$  к горизонту. Запишите кинематические уравнения движения и выведите уравнение траектории камня. Определите радиус кривизны его траектории: а) в верхней точке; б) в момент падения на Землю.

### *Движение в центрально-симметричном гравитационном поле*

16.2.1. Период вращения искусственного спутника Земли равен 2 ч. Считая орбиту спутника круговой, найдите, на какой высоте над поверхностью Земли движется спутник.

16.2.2. Стационарный искусственный спутник движется по окружности в плоскости земного экватора, оставаясь все время над одним и тем же пунктом земной поверхности. Определите угловую скорость спутника и радиус его орбиты.

16.2.3. Планета Нептун в 30 раз дальше от Солнца, чем Земля. Определите период обращения (в годах) Нептуна вокруг Солнца.

16.2.4. Искусственный спутник вращается вокруг Земли по окружности на высоте 3600 км над поверхностью Земли. Определите орбитальную скорость спутника.

16.2.5. Зная среднюю скорость движения Земли вокруг Солнца (30 км/с), определите, с какой средней скоростью движется малая планета вокруг Солнца, если радиус орбиты планеты в 4 раза больше радиуса орбиты Земли.

16.2.6. С какой орбитальной скоростью движется Земля вокруг Солнца? Считайте орбиту Земли круговой.

16.2.7. Определите скорость движения Луны вокруг Земли, считая, что Луна движется по круговой орбите. Расстояние между Луной и Землей 384,4 Мм.

16.2.8. Две планеты обращаются вокруг Солнца по орбитам, принимаемым приближенно за круговые с радиусами  $150 \cdot 10^6$  км (Земля) и  $108 \cdot 10^6$  км (Венера). Во сколько раз линейная скорость Земли больше линейной скорости Венеры?

## *Космические скорости*

16.3.1. На какую максимальную высоту над поверхностью Земли поднимется ракета, запущенная вертикально вверх, если начальная скорость ракеты равна первой космической скорости?

16.3.2. Вычислите значения первой и второй космических скоростей вблизи поверхности Луны. Масса Луны  $7,33 \cdot 10^{22}$  кг, радиус Луны  $1,74 \cdot 10^6$  м.

16.3.3. Ракета запущена с Земли с начальной скоростью 15 км/с. К какому предельному значению будет стремиться скорость ракеты, если расстояние ракеты от Земли бесконечно растет? Притяжение других небесных тел, кроме Земли, не учитывайте.

16.3.4. Радиус малой планеты равен 100 км, средняя плотность вещества планеты равна  $3 \text{ г/см}^3$ . Определите вторую космическую скорость у поверхности этой планеты.

16.3.5. Определите скорость ракеты на высоте, равной радиусу Земли, если ракета запущена с Земли с начальной скоростью 10 км/с?

16.3.6. Вычислите радиус круговой орбиты стационарного спутника Земли, который остается неподвижным относительно ее поверхности. Каковы его скорость и ускорение в инерциальной системе отсчета, связанной с центром Земли? Считайте орбитальное движение спутника равномерным.

16.3.7. Найдите угловую и линейную скорости орбитального движения искусственного спутника Земли, если его период обращения вокруг Земли равен 4 ч.

16.3.8. Спутник равномерно движется в экваториальной плоскости Земли по круговой орбите радиусом 10000 км. Найдите орбитальную скорость спутника и его ускорение.

## ***Движение в электромагнитном поле***

### *Движение в однородном электростатическом поле*

16.4.1. Электрон с начальной скоростью 3 Мм/с влетел в однородное электрическое поле напряженностью 150 В/м. Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Найдите: 1) силу, действующую на электрон; 2) ускорение, приобретаемое электроном; 3) скорость электрона через 0,1 мкс.

16.4.2. Электрон влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью 10 Мм/с, вектор которой направлен параллельно пластинам. На какое расстояние приблизится электрон к поло-

жительно заряженной пластине за время движения внутри конденсатора, если расстояние между пластинами равно 16 мм, разность потенциалов 30 В, а длина пластин 6 см?

16.4.3. Электрон влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, имея скорость 10 Мм/с, направленную параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составляло угол  $35^\circ$  с первоначальным направлением скорости. Определите разность потенциалов между пластинами, если длина пластин 10 см, а расстояние между пластинами 2 см.

16.4.4. Электрон влетел в плоский конденсатор, находясь на одинаковом расстоянии от каждой пластины и имея скорость 10 Мм/с, с вектором направленным параллельно пластинам, расстояние между которыми равно 2 см. Длина каждой пластины – 10 см. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить к пластинам, чтобы электрон не вылетел из конденсатора?

16.4.5. Электрон, летевший горизонтально со скоростью 1,6 Мм/с, влетел в однородное электрическое поле с напряженностью 90 В/см (вектор напряженности направлен вертикально). Какова будет по модулю скорость электрона через 1 нс? На какой угол от первоначального направления отклонится электрон за это время?

16.4.6. Пучок протонов, одна часть которых имеет скорость  $10^7$  м/с, а другая – скорость  $10^6$  м/с, попадает в однородное электрическое поле с напряженностью 9000 В/м; вектор скорости протонов перпендикулярен линиям напряженности поля. На флюоресцирующем экране, расположенном из расстоянии 20 см от места входа протонов в поле, получают два пятна. Определите расстояние между пятнами. Зависимость массы протонов от скорости не учитывайте.

16.4.7. Электрон, получивший скорость под действием разности потенциалов 5 кВ, попадает в середину между пластинами плоского конденсатора параллельно пластинам. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить к конденсатору, чтобы электрон не вылетел из него? Длина конденсатора 5 см, расстояние между пластинами 1 см.

16.4.8. Поток электронов отклоняется однородным электрическим полем, направленным перпендикулярно начальной скорости. Во сколько раз возрастёт смещение электронного луча на выходе из поля, если напряжённость поля увеличится в 3,6 раза ?

### *Движение в однородном магнитном поле*

16.5.1. В однородном магнитном поле с индукцией 100 мкТлл движется электрон по винтовой линии. Определите скорость электрона, если шаг винтовой линии равен 20 см, а радиус – 5 см.

16.5.2. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле со скоростью  $0,8 \cdot c$ . Магнитная индукция поля равна  $0,01$  Тл. Определите радиус окружности в двух случаях: 1) не учитывая зависимость массы от скорости и 2) учитывая эту зависимость.

16.5.3. В однородном магнитном поле с индукцией  $2$  Тл движется по винтовой линии протон. Радиус траектории –  $10$  см, шаг –  $60$  см. Определите кинетическую энергию протона.

16.5.4. Электрон движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом  $2$  см. Индукция магнитного поля равна  $0,01$  Тл. Определите кинетическую энергию электрона в двух случаях: 1) не учитывая зависимость массы от скорости и 2) учитывая эту зависимость.

16.5.5. В однородном магнитном поле с индукцией  $9$  мТл движется электрон по винтовой линии. Определите период обращения электрона и его скорость, если шаг винтовой линии равен  $7,8$  см; радиус –  $1$  см.

16.5.6. В магнитном поле с индукцией  $1,2$  Тл по круговой орбите радиусом  $45$  см движется  $\alpha$ -частица. Определите скорость  $\alpha$ -частицы и ее кинетическую энергию.  $\alpha$ -частица состоит из двух протонов и двух нейтронов. Считайте массу нейтрона равной массе протона.

16.5.7. Протон описал окружность радиусом  $5,0$  см в однородном магнитном поле с индукцией  $20$  мТл. Определите скорость протона.

16.5.8. Электрон и протон ускоряются электрическим полем напряженностью  $3 \cdot 10^4$  В/м, действующим на протяжении  $10$  см, затем они попадают в однородное магнитное поле с индукцией  $1$  Тл, действующее в плоскости, перпендикулярной электрическому полю. Определите: а) отношение циклических частот вращения этих частиц в магнитном поле; б) отношение радиусов кривизны траектории этих частиц.

Движение в совместных электрическом и магнитном полях

16.6.1. Перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией  $0,1$  Тл возбуждено однородное электрическое поле напряженностью  $100$  кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислите скорость частицы.

16.6.2. Заряженная частица, двигаясь перпендикулярно однородным, скрещенным под прямым углом электрическому (напряженность  $400$  кВ/м) и магнитному (индукция  $0,25$  Тл) полям, не испытывает отклонения при определенной скорости. Определите эту скорость.

16.6.3. Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $800$  В, влетает в однородные, скрещенные под прямым углом, магнитное (индукция  $50$  мТл) и электрическое поля. Определите напряженность элек-

трического поля, если протон движется в скрещенных полях равномерно и прямолинейно.

16.6.4. Протон влетает со скоростью 100 км/с в область пространства, где имеются однородные электрическое (напряженность 210 В/м) и магнитное (индукция 3,3 мТл) поля. Векторы напряженности  $\vec{E}$  и индукции  $\vec{B}$  совпадают по направлению. Определите ускорение протона для начального момента движения в полях, если направление вектора скорости *параллельно* векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

16.6.5. Протон влетает со скоростью 100 км/с в область пространства, где имеются однородные электрическое (напряженность 210 В/м) и магнитное (индукция 3,3 мТл) поля. Векторы напряженности  $\vec{E}$  и индукции  $\vec{B}$  совпадают по направлению. Определите ускорение протона для начального момента движения в полях, если направление вектора скорости *перпендикулярно* векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

16.6.6. Магнитное поле с индукцией  $1,01 \cdot 10^{-2}$  Тл и электрическое поле напряженностью 10 В/см направлены одинаково. Электрон влетает в такое электромагнитное поле со скоростью  $10^5$  м/с. Найдите полное ускорения электрона. Скорость электрона направлена *параллельно* силовым линиям полей.

16.6.7. Магнитное поле с индукцией  $1,01 \cdot 10^{-2}$  Тл и электрическое поле напряженностью 10 В/см направлены одинаково. Электрон влетает в такое электромагнитное поле со скоростью  $10^5$  м/с. Найдите полное ускорения электрона. Скорость электрона направлена *перпендикулярно* силовым линиям полей.

16.6.8. Однородное магнитное поле, индукция которого 10 мТл, направлено *перпендикулярно* однородному электрическому полю напряженностью 17 кВ/м. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов 15 кВ и влетев в область, занятую полями, со скоростью, перпендикулярной обоим полям, движется равномерно и прямолинейно. Определите удельный заряд  $\frac{q}{m}$  этого иона.

## 17. Вещество в постоянном электромагнитном поле

### Емкость

17.1.1. Два проводящих шара диаметром 0,1 мм и 0,3 м каждый соединяются проводником. До соединения на шарах находились заряды

$2 \cdot 10^{-8}$  Кл и  $3 \cdot 10^{-8}$  Кл. Каким будет потенциал шаров после их соединения?

17.1.2. Определите емкость плоского слюдяного конденсатора, площадь пластин которого равна  $100 \text{ см}^2$ , а расстояние между ними равно  $0,1 \text{ мм}$ . Диэлектрическая проницаемость слюды равна  $7$ .

17.1.3. На капельке ртути радиусом  $10^{-3} \text{ м}$  находится заряд  $0,7 \cdot 10^{-13}$  Кл. Десять таких капелек сливаются в одну большую каплю. Определите потенциал этой капли.

17.1.4. Между пластинами заряженного плоского конденсатора находятся два слоя диэлектриков: стекла толщиной  $7 \text{ мм}$  и эбонита толщиной  $3 \text{ мм}$ . Площадь каждой пластины конденсатора равна  $200 \text{ см}^2$ . Найдите емкость конденсатора. Диэлектрическая проницаемость стекла равна  $7$ , эбонита –  $3$ .

17.1.5. Два металлических шара – большой и маленький – заряжаются одинаковым количеством электричества. Будут ли одинаковыми потенциалы шаров? Что произойдет, если шары соединить проволокой?

17.1.6. Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно  $1,33 \text{ мм}$ , площадь пластин равна  $20 \text{ см}^2$ . В пространстве между пластинами конденсатора находятся два слоя диэлектриков: слюды толщиной  $0,7 \text{ мм}$  и эбонита толщиной  $0,3 \text{ мм}$ . Определите емкость конденсатора. Диэлектрическая проницаемость слюды равна  $7$ , эбонита –  $3$ .

17.1.7. Два металлических шара – большой и маленький – заряжаются до одинакового потенциала. На каком шаре при этом будет большой заряд? В какую сторону будет перетекать заряд, если шары соединить проволокой?

17.1.8. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $0,2 \text{ мкКл/м}^2$ . Расстояние между пластинами равно  $1 \text{ мм}$ . На сколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния между пластинами до  $3 \text{ мм}$ ?

17.1.9. Два металлических заряженных шара соединяют проволокой. Показать, что после соединения поверхностные плотности зарядов на шарах будут обратно пропорциональны их радиусам.

17.1.10. Определите емкость плоского конденсатора, между обкладками которого находится стеклянная пластинка толщиной  $100 \text{ мкм}$ , покрытая с обеих сторон слоями парафина толщиной  $0,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$  каждый. Площадь обкладок конденсатора равна  $0,02 \text{ м}^2$ . Диэлектрическая проницаемость стекла –  $7$ , парафина –  $2$ .

17.1.11. Каким должен быть радиус шара, чтобы его емкость была равна  $1,0 \text{ Ф}$ ?

17.1.12. Емкость плоского конденсатора равна  $1,5 \text{ мкФ}$ . Расстояние между пластинами равно  $5 \text{ мм}$ . Какова будет емкость

конденсатора, если на нижнюю пластину положить лист эбонита толщиной 3 мм? Диэлектрическая проницаемость эбонита равна 3.

17.1.13. Металлический шар диаметром 18 см заряжают до потенциала 10 кВ. Определить величину заряда шара.

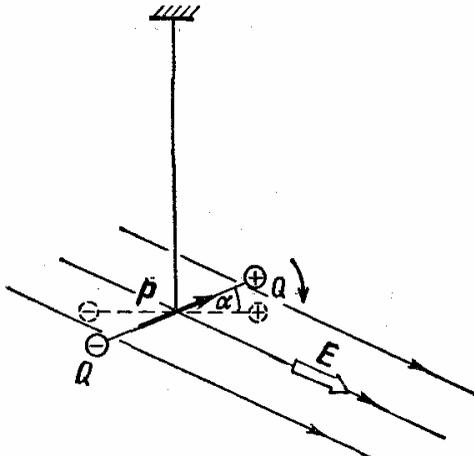
17.1.14. Между пластинами плоского конденсатора находится плотно прилегающая стеклянная пластинка. Конденсатор заряжен до разности потенциалов 100 В. Какова будет разность потенциалов, если вытащить стеклянную пластинку из конденсатора? Диэлектрическая проницаемость стекла равна 7.

17.1.15. Заряженный до потенциала 300 В шар радиуса 15 см соединяется с незаряженным шаром длинной тонкой проволокой. После соединения потенциал шара оказался 100 В. Каков радиус второго шара?

17.1.16. Плоский конденсатор образован двумя квадратными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии 1,0 мм. Какой должна быть ширина каждой из этих пластин, чтобы емкость конденсатора была равна 1,0 мкФ? Чему будет равна сторона пластины для получения такой же емкости, если между ними поместить эбонит? Диэлектрическая проницаемость эбонита равна 3.

### *Электрический диполь в однородном электростатическом поле*

17.2.1. Диполь с электрическим моментом 100 пКл·м прикреплен к упругой нити. Когда в пространстве, где находится диполь, было создано электрическое поле напряженностью 3 кВ/м перпендикулярно плечу диполя и нити, диполь повернулся на угол  $30^\circ$ . Определите постоянную кручения нити, то есть момент силы, которая вызывает закручивание нити на 1 рад.



17.2.2. Диполь с электрическим моментом  $20 \text{ нКл}\cdot\text{м}$  находится в однородном электрическом поле напряженностью  $50 \text{ кВ/м}$ . Вектор электрического момента составляет угол  $60^\circ$  с линиями поля. Какова потенциальная энергия диполя?

Указание. За нулевую потенциальную энергию следует принять энергию, соответствующую такому расположению диполя, когда вектор электрического момента диполя перпендикулярен линиям поля.

17.2.3. Диполь с электрическим моментом  $100 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью  $150 \text{ кВ/м}$ . Вычислите работу, необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол  $180^\circ$ .

17.2.4. Диполь с электрическим моментом  $100 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью  $10 \text{ кВ/м}$ . Определите изменение потенциальной энергии диполя при повороте его на угол  $60^\circ$ .

17.2.5. Перпендикулярно плечу диполя с электрическим моментом  $12 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  возбуждено однородное электрическое поле напряженностью  $300 \text{ кВ/м}$ . Под действием сил поля диполь начинает поворачиваться относительно оси, проходящей через его центр. Найдите угловую скорость диполя в момент прохождения им положения равновесия. Момент инерции диполя относительно оси, перпендикулярной плечу и проходящей через его центр, равен  $2 \cdot 10^{-9} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

### ***Круговой ток (магнитный диполь) в однородном магнитном поле***

17.3.1. Магнитное поле создано бесконечно длинным проводником с током  $100 \text{ А}$ . На расстоянии  $10 \text{ см}$  от проводника находится точечный диполь, вектор магнитного момента которого, по модулю равный  $1 \text{ мА}\cdot\text{м}^2$ , лежит в одной плоскости с проводником и перпендикулярен ему. Определите силу, действующую на магнитный диполь.

17.3.2. Электрон в невозбужденном атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом  $53 \text{ пм}$ . Вычислить магнитный момент эквивалентного кругового тока и механический момент, действующий на круговой ток, если атом помещен в магнитное поле, линии индукции которого параллельны плоскости орбиты электрона. Магнитная индукция поля равна  $0,1 \text{ Тл}$ .

17.3.3. Два круговых витка радиусом  $4 \text{ см}$  каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии  $5 \text{ см}$  друг от друга. По виткам текут токи  $I_1$  и  $I_2 = 4 \text{ А}$ . Найдите индукцию магнитного поля в центре одного из витков. Токи в витках текут в противоположных направлениях.

17.3.4. Два круговых витка радиусом 4 см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии 0,1 м друг от друга. По виткам текут токи  $I_1 = I_2 = 2$  А. Найдите индукцию магнитного поля на оси витков в точке, находящейся на равном расстоянии от них. Задачу решите для случаев: 1) токи в витках текут в одном направлении, 2) токи в витках текут в противоположных направлениях.

17.3.5. Два круговых витка радиусом 4 см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии 5 см друг от друга. По виткам текут токи  $I_1$  и  $I_2 = 4$  А. Найдите индукцию магнитного поля в центре одного из витков. Токи в витках текут в одном направлении.

17.3.6. Проволочный виток радиусом 5 см находится в однородном магнитном поле напряженностью 2 кА/м. Плоскость витка образует угол  $60^\circ$  с направлением поля. По витку течет ток 4 А. Найдите механический момент, действующий на виток.

17.3.7. Виток диаметром 20 см может вращаться около вертикальной оси, совпадающей с одним из диаметров витка. Виток установили в плоскости магнитного меридиана и пустили по нему ток 10 А. Найдите механический момент, который нужно приложить к нитку, чтобы удерживать его в начальном положении. Горизонтальную составляющую магнитной индукции поля Земли принять равной 20 мкТл.

17.3.8. Рамка гальванометра длиной 4 см и шириной 1,5 см, содержащая 200 витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найдите: 1) механический момент, действующий на рамку, когда по нитку течет ток 1 мА; 2) магнитный момент рамки при этом токе.

17.3.9. Магнитное поле создано кольцевым проводником радиусом 20 см, по которому течет ток 100 А. На оси кольца расположено другое кольцо малых размеров с магнитным моментом  $10 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$ . Вектор магнитного момента второго контура перпендикулярен оси. Вычислите механический момент, действующий на второй контур, если расстояние между центрами колец равно 1 см.

17.3.10. Короткая катушка площадью поперечного сечения, равной  $150 \text{ см}^2$ , содержит 200 витков провода, по которому течет ток 4 А. Катушка помещена в однородное магнитное поле напряженностью 8 кА/м. Определите магнитный момент катушки, а также вращающий момент, действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол  $60^\circ$  с линиями индукции.

17.3.11. На оси контура с током, магнитный момент которого равен  $10 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$ , находится другой такой же контур. Вектор магнитного момента второго контура перпендикулярен оси. Вычислите механический момент, действующий на второй контур. Расстояние между контурами

равно 50 см. Размеры контуров малы по сравнению с расстоянием между ними.

## 18. Электродинамика

### *ЭДС индукции*

18.1.1. Магнитный поток 40 мВб пронизывает замкнутый контур. Определите среднее значение ЭДС индукции, возникающей в контуре, если магнитный поток равномерно изменяется до нуля за 2 мс.

18.1.2. Прямой провод длиной 40 см движется в однородном магнитном поле со скоростью 5 м/с перпендикулярно линиям индукции. Разность потенциалов, возникающая между концами провода, равна 0,6 В. Вычислите индукцию магнитного поля.

18.1.3. В однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл находится прямой провод длиной 20 см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление всей цепи равно 0,1 Ом. Найдите силу, которую нужно приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно вектору магнитной индукции с постоянной скоростью 2,5 м/с.

18.1.4. Прямой провод длиной 10 см помещен в однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл. Концы его замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи равно 0,4 Ом. Какая мощность потребуется для того, чтобы двигать провод перпендикулярно вектору магнитной индукции со скоростью 20 м/с?

18.1.5. В однородном магнитном поле с индукцией 0,4 Тл в плоскости, перпендикулярной вектору индукции поля, вращается стержень длиной 10 см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определите разность потенциалов на концах стержня при частоте вращения 16 Гц.

18.1.6. Определите разность потенциалов, возникшую в проводнике длиной 20 см, движущемся в однородном магнитном поле с индукцией 10 мТл со скоростью 1,0 м/с под углом  $30^\circ$  к вектору магнитной индукции.

18.1.7. В однородном магнитном поле, индукция которого 0,1 Тл, движется проводник длиной 10 см. Скорость движения проводника равна 15 м/с, вектор скорости перпендикулярен вектору индукции магнитного поля. Чему равна индуцированная в проводнике разность потенциалов?

18.1.8. Скорость самолета с реактивным двигателем равна 950 км/ч. Найдите разность потенциалов, возникающую на концах крыльев самолета, если вертикальная составляющая индукции земного магнитного поля равна 50 мкТл и размах крыльев самолета 12,5 м.

### *ЭДС индукции во вращающейся рамке*

18.2.1. Рамка площадью  $200 \text{ см}^2$  равномерно вращается с частотой 10 Гц относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной вектору индукции однородного магнитного поля ( $B = 0,2 \text{ Тл}$ ). Каково среднее значение ЭДС индукции за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения?

18.2.2. В однородном магнитном поле с индукцией  $0,35 \text{ Тл}$  равномерно с частотой 8 Гц вращается рамка площадью  $50 \text{ см}^2$ , содержащая 500 витков. Ось вращения лежит в плоскости рамки, перпендикулярно вектору индукции. Определите максимальную ЭДС индукции, возникающую в рамке.

18.2.3. В однородном магнитном поле, индукция которого  $0,1 \text{ Тл}$ , равномерно вращается короткая катушка, состоящая из 100 витков проволоки. Площадь поперечного сечения катушки  $100 \text{ см}^2$ . Катушка вращается с частотой 5 Гц вокруг оси, лежащей в плоскости катушки и проходящей через ее центр инерции. Ось катушки параллельна вектору индукции магнитного поля и перпендикулярна оси вращения. Найдите максимальную ЭДС индукции во вращающейся катушке.

18.2.4. Короткая катушка, содержащая 1000 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией  $0,04 \text{ Тл}$  с угловой скоростью  $5 \text{ рад/с}$  относительно оси, проходящей через центр инерции катушки перпендикулярно вектору магнитной индукции поля. Определите мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость витка катушки составляет угол  $60^\circ$  с вектором магнитной индукции поля. Площадь каждого витка катушки равна  $100 \text{ см}^2$ .

18.2.5. Магнитная индукция поля между полюсами двухполюсного генератора равна  $0,8 \text{ Тл}$ . Ротор имеет 100 витков площадью  $400 \text{ см}^2$  каждый. Определите частоту вращения ротора, если максимальное значение ЭДС индукции равно  $200 \text{ В}$ .

18.2.6. Круговой проволочный виток площадью  $100 \text{ см}^2$  находится в однородном магнитном поле, индукция которого  $1 \text{ Тл}$ . Плоскость витка перпендикулярна вектору индукции магнитного поля. Чему будет равно среднее значение ЭДС индукции, возникающей в витке при равномерном уменьшении поля в течение  $0,01 \text{ с}$ ?

18.2.7. В однородном магнитном поле, индукция которого  $0,8 \text{ Тл}$ , равномерно вращается рамка с угловой скоростью  $15 \text{ рад/с}$ . Площадь рамки  $150 \text{ см}^2$ . Ось вращения лежит в плоскости рамки и составляет угол  $30^\circ$  с направлением силовых линий магнитного поля. Найдите максимальную ЭДС индукции во вращающейся рамке.

18.2.8. При вращении рамки площадью  $200 \text{ см}^2$  в однородном магнитном поле в ней индуцируется ЭДС, максимальное значение которой равно  $0,2 \text{ В}$ . Частота вращения рамки равна 50 Гц. Число витков в рамке

равно 150. Ось вращения лежит в плоскости рамки и составляет угол  $15^\circ$  с направлением вектора индукции магнитного поля. Определите величину индукции магнитного поля.

### Самоиндукция

18.3.1. С помощью реостата равномерно увеличивают ток в катушке на 0,1 А за 1 с. Индуктивность катушки равна 0,01 Гн. Найдите среднее значение ЭДС самоиндукции.

18.3.2. Индуктивность катушки равна 2 мГн. Ток частотой 50 Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определите среднюю ЭДС самоиндукции, возникающую за интервал времени, в течение которого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения. Амплитудное значение тока 10 А.

18.3.3. По катушке индуктивностью 0,03 мГн течет ток 0,6 А. При размыкании цепи величина тока равномерно изменяется до нуля за время 120 мкс. Определите среднюю ЭДС самоиндукции, возникающую в контуре.

18.3.4. Соленоид содержит 1000 витков. Площадь каждого витка равна  $10 \text{ см}^2$ . По обмотке течет ток, создающий магнитное поле с индукцией 1,5 Тл. Найдите среднюю ЭДС индукции, возникающую в соленоиде, если ток равномерно уменьшается до нуля за время 500 мкс.

18.3.5. Индуктивность катушки равна 0,2 Гн, а сопротивление 1,64 Ом. Найдите, во сколько раз уменьшится ток в катушке через 0,05 с после того, как источник тока выключен и катушка замкнута накоротко.

18.3.6. Найдите индуктивность проводника, в котором равномерное изменение силы тока на 2 А в течение 0,5 с возбуждает ЭДС самоиндукции 2 мВ.

18.3.7. Через катушку, индуктивность которой равна 0,021 Гн, течет ток, изменяющийся со временем по закону  $I = I_0 \sin \omega t$ , где  $I_0 = 5 \text{ А}$ ,  $\omega = 100\pi \text{ рад/с}$ . Найдите зависимость от времени ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке.

18.3.8. ЭДС самоиндукции, возникающая в цепи с индуктивностью 2 Гн, изменяется с течением времени по закону  $\varepsilon = 10 + 4t \text{ (В)}$ . По какому закону изменяется ток в цепи?

## Ответы

11.1.1.	36 мН.
11.1.2.	2,99 кВ/м, 608 В/м.
11.1.3.	280 В/м.
11.1.4.	6 и 12 см.
11.1.5.	23,6 кВ/м
11.1.6.	10 Н.
11.1.7.	6,99 Н.
11.1.8.	0.
11.2.1.	200 В/м
11.2.2.	-12,7 мкДж, если в противоположных вершинах расположены заряды разных знаков; -23,3 мкДж, если в противоположных вершинах расположены заряды одинаковых знаков.
11.2.3.	-1,82 кВ.
11.2.4.	1 кВ.
11.2.5.	3,75 МВ/м и (-30) кВ/м.
11.2.6.	4,5 мкДж.
11.2.7.	45 В.
11.2.8.	-13,6 эВ.
11.2.9.	6 кВ.
11.2.10.	4,5 мкДж.
11.2.11.	26,4 кВ.
11.2.12.	1 кВ.
11.2.13.	0,2кВ; 0,1 кВ.

11.2.14.	90 мкДж.
11.2.15.	45 кВ.
11.2.16.	48,8 мкДж.
11.3.1.	+4 мкДж и 200В.
11.3.2.	8,91 мДж и 9 мДж.
11.3.3.	-162 Дж/Кл.
11.3.4.	- 0,16 Дж.
11.3.5.	40 мкДж.
11.3.6.	1 мкДж.
11.3.7.	196 мкДж.
11.3.8.	0.
11.3.9.	160 мТл.
11.3.10.	1Мм/с.
11.3.11.	0.
11.3.12.	0,337 Тл.
11.3.13.	157 км/с.
11.3.14.	299 мкТл.
11.3.15.	4,8 мТл.
13.1.1.	0 и 113 В/м.
13.1.2.	395 и 169 В/м.
13.1.3.	16,9 кВ/м.
13.2.1.	43,2 МВ/м.
13.2.2.	5,56 нКл/м.
13.2.3.	0,417 мкКл/м.
13.2.4.	3,12 МВ/м.
13.2.5.	2,52 кВ/м.
13.3.1.	200 кВ/м.

13.3.2.	72000 В/м.
13.3.3.	3,67 кВ/м.
13.3.4.	2,8 кВ/м
13.4.1.	31,7 В/м.
13.4.2.	229 В/м.
13.4.3.	1,61 В/м.
13.4.4.	4,71 В/м.
13.5.1.	50 пКл·м.
13.5.2.	6,75 кВ/м; 0.
13.5.3.	1,08 кВ/м; 0.
13.5.4.	47,6 В/м; 1,8 В.
13.5.5.	9 В/м и 0; 18 В/м и 0,9 В.
13.5.6.	18 кВ/м.
13.5.7.	22 кВ/м; 386 В.
13.5.8.	1,6 нКл.
14.1.1.	0,26 Кл.
14.1.2.	0,5 мА.
14.1.3.	а) 1,35; б) 0,74.
14.1.4.	$1,27 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$ .
14.1.5.	$7,45 \cdot 10^{-10} \text{ м/с}$ .
14.1.6.	Увеличится на 0,2 %.
14.1.7.	0,5 мА.
14.1.8.	0,2 мг.
14.1.9.	5 кОм.
14.1.10.	6,3 А.
14.1.11.	0,34 В.
14.1.12.	2 А.

14.1.13.	0,1 Ом.
14.3.1.	20; 30; 40; 60; 90; 120; 180 Ом.
14.3.2.	в 4 раза.
14.3.3.	25 %.
14.3.4.	2 или 2,7 А.
14.3.5.	0,75 Ом.
14.3.6.	34,4 В; 1,43 Ом.
14.3.7.	0,5 А; 4,0 В.
14.3.8.	0,6 А.
14.3.9.	10 В и 5,0 Ом.
14.3.10.	0,33 кВ.
14.3.11.	30 и 10 Ом.
14.4.1.	3 Дж.
14.4.2.	0,29 кДж; 29 Вт; 5 Ом.
14.4.3.	40; 60; 80; 120; 180; 240; 360 Вт.
14.4.4.	1 или 2 А.
14.4.5.	3 или 0,3 Ом.
14.4.6.	80 и 40 Вт; 8,9 и 17,8 Вт.
14.4.7.	400 Вт.
14.4.8.	14 Ом.
15.1.1.	167 мкТл.
15.1.2.	250 мкТл.
15.1.3.	400 мкТл.
15.1.4.	87,2 мкТл.
15.1.5.	50 мкТл.

15.1.6.	10 и 70 мкТл.
15.1.7.	150; 200 и 169 мкТл.
15.1.8.	44,7 и 72,1 мкТл.
15.2.1.	0,2 Дж.
15.2.2.	$8,3 \cdot 10^{-3}$ Дж/м.
15.2.3.	4,9 Н.
15.2.4.	1 кН/м.
15.2.5.	30°.
15.2.6.	0,125 Н/м.
15.2.7.	200 Н.
15.2.8.	7 А.
15.3.1.	512.
15.3.2.	78,6 мА·м <sup>2</sup> .
15.3.3.	126 мкТл.
15.3.4.	10 А·м <sup>2</sup> .
15.3.5.	5,12 мТ.
15.3.6.	37 А.
15.3.7.	21,5 А.
15.3.8.	50 мА·м <sup>2</sup> .
15.3.9.	30,4 А.
15.3.10.	$9,4 \cdot 10^{-24}$ А·м <sup>2</sup> .
15.3.11.	414 мкТл.
15.3.12.	25,5 А.
15.3.13.	87,9 Гкл/кг.
16.1.1.	1,53; 3,53 и 1,02 км.
16.1.2.	9,67 с; 242 м; 136 м; 57,3 м/с.
16.1.3.	589 м/с; 2,45 км; 4,91 м/с <sup>2</sup> и 8,50 м/с <sup>2</sup> .

16.1.4.	35,8 м/с; 5,37 и 8,21 м/с <sup>2</sup> .
16.1.5.	45°.
16.1.6.	22 м/с; 63°.
16.1.7.	6,80 м.
16.1.8.	10,2 м и 81,5 м.
16.2.1.	1690 км.
16.2.2.	7,27·10 <sup>-5</sup> с <sup>-1</sup> и 42,3 ММ
16.2.3.	164 года.
16.2.4.	6,33 км/с.
16.2.5.	15 км/с.
16.2.6.	29,6 км/с.
16.2.7.	1,02 км/с.
16.2.8.	1,18.
16.3.1.	6,37·10 <sup>6</sup> м.
16.3.2.	1,68 и 2,37 км/с.
16.3.3.	9,99 км/с.
16.3.4.	129 м/с.
16.3.5.	6,11 км/с.
16.3.6.	4,23·10 <sup>4</sup> км; 3,07 км/с и 0,223 м/с <sup>2</sup> .
16.3.7.	4,36·10 <sup>-4</sup> рад/с и 5,58 км/с.
16.3.8.	6,32 км/с и 3,99 м/с <sup>2</sup> .
16.4.1.	2,4·10 <sup>-17</sup> Н; 2,63·10 <sup>13</sup> м/с <sup>2</sup> ; 3,99 Мм/с;.
16.4.2.	2,07 мм.
16.4.3.	79,7 В.
16.4.4.	22,8 В.
16.4.5.	2,25 Мм/с и 44,7°.
16.4.6.	1,71 см.
16.4.7.	400 В.
16.4.8.	3,6.

16.5.1.	1,04 Мм/с.
16.5.2.	13,7 см и 22,8 см.
16.5.3.	586 фДж.
16.5.4.	3,51 кэВ и 3,55 кэВ.
16.5.5.	3,97 нс и 25,2 Мм/с.
16.5.6.	$2,59 \cdot 10^7$ м/с и 2,25 пДж.
16.5.7.	95,8 км/с.
<b>16.5.8.</b>	<b>1840 и 0,023</b>
16.6.1.	1 Мм/с.
16.6.2.	1,6 Мм/с.
16.6.3.	19,6 кВ/м.
16.6.4.	20,1 Гм/с <sup>2</sup> .
16.6.5.	37,5 Гм/с <sup>2</sup> .
16.6.6.	176 Тм/с <sup>2</sup> .
16.6.7.	250 Тм/с <sup>2</sup> .
16.6.8.	$9,63 \cdot 10^7$ Кл/кг.
17.1.1.	1500 В.
17.1.2.	6,2 нФ.
17.1.3.	2,9 В.
17.1.4.	88,5 пФ.
17.1.5.	-----
17.1.6.	33,4 пФ.
17.1.7.	-----
17.1.8.	45,2 В.
17.1.9.	-----
17.1.10.	51,6 пкФ.
17.1.11.	12,3 см.

17.1.12.	2,5 мкФ.
17.1.13.	0,1 мкКл.
17.1.14.	700 В.
17.1.15.	30 см.
17.1.16.	10,6 м; 4,8 м.
17.2.1.	248 нН·м/рад.
17.2.2.	500 мкДж.
17.2.3.	-30 мкДж.
17.2.4.	0,5 мкДж.
17.2.5.	6 рад/с
17.3.1.	2 мкН.
17.3.2.	$9,4 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ ; $9,4 \cdot 10^{-25} \text{ Н} \cdot \text{м}$ .
17.3.3.	47,5 мкТл.
17.3.4.	15,3 мкТл и 0.
17.3.5.	78,1 мкТл.
17.3.6.	39,5 мкН·м.
17.3.7.	6,28 мкН·м
17.3.8.	12 мкН·м; 120 мкА·м <sup>2</sup> .
17.3.9.	3,13 мкН·м.
17.3.10.	$12 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ ; 0,1 Н·м.
17.3.11.	160 пН·м.
18.1.1.	20 В.
18.1.2.	0,3 Тл.
18.1.3.	1 Н.
18.1.4.	10 Вт.

18.1.5.	201 мВ.
18.1.6.	1,0 мВ.
18.1.7.	0,15 В
18.1.8.	165 мВ.
18.2.1.	0,16 В.
18.2.2.	44 В.
18.2.3.	3,14 В.
18.2.4.	1 В.
18.2.5.	9,95 Гц.
18.2.6.	1 В.
18.2.7.	0,09 В
18.2.8.	0,820 мТл.
18.3.1.	1 мВ.
18.3.2.	4 В.
18.3.1.	0,15 В.
18.3.4.	3 кВ.
18.3.5.	В 1,51 раза.
18.3.6.	0,5 мГн.
18.3.7.	-----
18.3.8.	-----

## Приложение

### Таблица физических величин

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с	Расстояние от центра Солнца до центра Земли $1,49 \cdot 10^{11}$ м
Радиус Земли $R_3 = 6,37 \cdot 10^6$ м	Масса Земли $M_3 = 5,98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца $R_C = 6,95 \cdot 10^8$ м	Масса Солнца $M_C = 1,98 \cdot 10^{30}$ кг
Ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с <sup>2</sup>	Гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м <sup>2</sup> /кг <sup>2</sup>
Элементарный заряд $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл	Масса покоя электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг	Масса покоя нейтрона $m_n = 1,68 \cdot 10^{-27}$ кг
Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м	Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Электрическая постоянная в законе Кулона $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9$ Н·м <sup>2</sup> /Кл <sup>2</sup>	
Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с	
Постоянная Вина $b = 2,90 \cdot 10^{-3}$ м·К $b^* = 3,69 \cdot 10^{11}$ с <sup>-1</sup> ·К <sup>-1</sup>	
Постоянная Стефана – Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м <sup>2</sup> ·К <sup>4</sup> )	Магнетон Бора $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Атомная единица массы (а.е.м.) $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг 931,4 МэВ	
Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(К·моль)
Число $\pi = 3,14$	



## Приложение

### Таблица физических величин

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$	Расстояние от центра Солнца до центра Земли $1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Радиус Земли $R_3 = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$	Масса Земли $M_3 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Радиус Солнца $R_C = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$	Масса Солнца $M_C = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$	Гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Элементарный заряд $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$	Масса покоя электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$	Масса покоя нейтрона $m_n = 1,68 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$	Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Электрическая постоянная в законе Кулона $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$	
Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$ $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$	
Постоянная Вина $b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ $b^* = 3,69 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$	
Постоянная Стефана – Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$	Магнетон Бора $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Гл}$
Атомная единица массы (а.е.м.) $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ $931,4 \text{ МэВ}$	
Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$	Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{К} \cdot \text{моль})$
Число $\pi = 3,14$	

**Множители и приставки для образования  
десятичных кратных и дольных единиц  
и их наименований**

Кратные			Дольные		
Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение
$10^{18}$	экса	Э	$10^{-1}$	деци	д
$10^{15}$	пета	П	$10^{-2}$	санتي	с
$10^{12}$	тера	Т	$10^{-3}$	милли	м
$10^9$	гига	Г	$10^{-6}$	микро	мк
$10^6$	мега	М	$10^{-9}$	нано	н
$10^3$	кило	к	$10^{-12}$	пико	п
$10^2$	гекто	г	$10^{-15}$	фемто	ф
$10^1$	дека	да	$10^{-18}$	атто	а

## Библиографический список

- Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. – СПб.: Спец. лит., 1997. – 327 с.
- Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковская Л.Б.* Курс физики, т. 2. – М.: Высш. шк. – 375 с.
- Калашиников С.Г.* Электричество. – М.: Гостехиздат, 1956. – 664 с.
- Карцев В.П.* Приключения великих уравнений. – М.: Знание, 1971. – 320 с.
- Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1969. – 399 с.
- Парселл Э.* Электричество и магнетизм. – М.: Наука, – 447 с.
- Рахштадт Ю.А., Четкина Н.В.* Физика. Силовые поля: Учеб. пособие. – М.: МИСиС, 2005. – 130 с.
- Савельев И.В.* Курс физики, т. 2. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
- Савельев И.В.* Курс физики, т. 3. – М.: Наука, 1989. – 304 с.
- Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. – М.: Высш. шк., 1988. – 527 с.

Учебное издание

*РАХШТАДТ Юрий Александрович*

## **ФИЗИКА**

Силовые поля

**Учебное пособие**

**Часть 3**

Редактор *О.В. Андреева*

Компьютерная верстка *А.В. Калининной*

---

Подписано в печать 08.06.09	Бумага офсетная	
Формат 60 × 90 <sup>1</sup> / <sub>16</sub>	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 13,63
Рег. № 010	Тираж 150 экз.	Заказ 2259

---

Государственный технологический университет  
«Московский институт стали и сплавов»,  
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,  
119049, Москва, Ленинский пр-т, 2  
Тел.: 638-45-22, 954-19-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС,  
117419, Москва, ул. Орджоникидзе, 8/9  
Тел.: 954-73-94, 954-19-22