Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по дополнительному образованию

_____ В.Л. Петров

«31» октября 2026 г.

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа

«Элементы математического анализа»

НАПРАВЛЕННОСТЬ: ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ

Уровень: вводный
Возраст обучающихся 16 - 18 лет
Срок реализации: 20 академических часов

Разработчик:
А.Н. Бугаевская
к.ф.-м.н., доцент кафедры математики
НИТУ МИСИС

Москва, 2026

1. Пояснительная записка

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Элементы математического анализа» (далее – Программа) является образовательной программой для школьников, обладающих фундаментальными знаниями школьного курса по алгебре, геометрии, математическому анализу и знаниями, полученными слушателями в рамках проекта г. Москвы «Математическая вертикаль ПЛЮС». Описанная программа ориентирована на развитие навыков решения типовых задач и задач повышенной сложности по математическому анализу.

Актуальность программы непосредственно связана с относительно небольшим количеством времени, уделяемым данному разделу в школьном курсе математики, а также со сложностями, связанными с формированием у учащихся понятий предела и бесконечно малой величины. Программа позволит слушателям углубить и расширить свои знания при решении задач математического анализа, а также более глубоко изучить методы дифференциального и интегрального исчисления и их приложения.

Программа является дополнением к школьному курсу математики, развивающей знания и навыки в области предмета. С помощью решения типовых задач и задач повышенной сложности по математическому анализу слушатели курса закрепят свои теоретические знания и практические умения. Прослушав данный курс, слушатели смогут применить свои знания и навыки, участвуя в математических олимпиадах, конкурсах и при поступлении в вузы. Программа реализуется Федеральным государственным автономным образовательным учреждением высшего образования Национальным исследовательским технологическим университетом «МИСИС» (далее – НИТУ МИСИС, Университет). Программа разработана и утверждена в соответствии с Уставом НИТУ МИСИС с целью формирования у школьников позитивного восприятия инженерных специальностей.

Программа имеет **естественнонаучную направленность**.

Уровень освоения – вводный. Программа предполагает расширить и углубить знания слушателя по теории пределов последовательностей и функций, развить навыки владения методами решения задач дифференциального и интегрального исчисления, а также показать применение методов математического анализа при решении задач, возникающих в различных областях знаний и техники.

Новизна Программы состоит в применении и обзоре широкого круга методов решения задач математического анализа, а также в прикладном значении этого раздела.

Актуальность. Современный уровень математического образования предполагает свободное владение методами математического анализа, а также умение применять их при решении прикладных задач. Содержание данного курса ориентировано на пробуждение интереса учащихся к решению задач математического анализа, рассмотрение различных способов решения задач с функциональной зависимостью.

Педагогическая целесообразность. Обучение данному курсу направлено на выработку способностей к логическому мышлению слушателя, усвоению различных методов решения задач математического анализа, практическое применение полученных навыков и знаний в области геометрии, физики, на развитие научно-технического способа мышления обучающимися.

Цель и задачи программы

Цель - формирование и развитие у обучающихся интеллектуальных и практических компетенций в области математического анализа, их дальнейшему практическому применению в проектной и научной деятельности. Формирование и закрепление необходимых навыков при решении различных типов задач.

Каждый обучающийся расширит знания в теории пределов, производной, интеграла, разберется в особенностях методов решения нестандартных задач с помощью **обучающих задач и прикладных задач.**

Отличительная особенность Программы заключается в том, что она позволяет обучающимся в короткие сроки познакомиться с основными методами решения задач, которые развивают логическое мышление. На конкретных примерах будет продемонстрирована эффективность аппарата анализа в решении задач, возникающих в различных областях науки и техники.

Возраст обучающихся: 16-18 лет.

Сроки реализации: 20 академических часов.

Наполняемость группы: 25-35 человек.

Формы и режим занятий

Режим занятий**:** 1-2 занятия в неделю; 1 занятие - 2 академических часа.

Формы организации деятельности**:** групповые, индивидуально-групповые.

Методы обучения: словесные, комбинированные, теоретические, практические.

Ожидаемые результаты и способы их определения

В результате освоения программы обучающиеся

будут знать:

– классификацию различных областей применения пределов, производной и интегралов;

– основные методы нахождения пределов последовательностей и функций;

– основные методы дифференцирования и интегрирования;

– технологию решения задач с помощью предельного перехода, производной, определенного и неопределенного интегралов;

будут уметь:

– идентифицировать тип конкретной задачи школьного курса математического анализа и определять соответствующие технологии ее решения;

– решать типовые и нестандартные задачи с пределами, производными и интегралами школьного курса математического анализа;

– самостоятельно подбирать наиболее подходящие методы к решению нестандартной задачи;

– четко и логически обоснованно проводить решение практической задачи;

– находить оригинальные способы решения задачи.

2. Учебно-тематический план

№ п/п	Раздел / Тема	Количество часов			Форма аттестации/ контроля
		Всего ауд. часов	Лекции	Практические занятия	
1	**Раздел 1. Последовательности и функции, их пределы**				Текущий
1.1	Понятие последовательности. Предел последовательности и его свойства. Неопределенности	2	0,5	1,5	
1.2	Понятие функции. Элементарные функции. Предел функции и его свойства	2	0,5	1,5	
1.3	Непрерывность и точки разрыва функции. Асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные)	2	0,5	1,5	
2	**Радел 2. Производная и ее применения к исследованию функций**				Текущий
2.1	Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Уравнение касательной к кривой. Производная суммы, разности, произведения, частного функций	2	0,5	1,5	
2.2	Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции	2	0,5	1,5	
2.3	Локальные экстремумы функции. Необходимое условие существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	2	0,5	1,5	
2.4	Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба. Полное исследование функций и построение графиков	2	0,5	1,5	
3	**Раздел 3. Интегральное исчисление**				Текущий
3.1	Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных	2	0,5	1,5	

	неопределенных интегралов				
3.2	Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница	2	0,5	1,5	
3.3	Вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла. Вычисление объема тела вращения с помощью определенного интеграла	2	0,5	1,5	
ИТОГО		**20**	**5**	**15**	

3. Содержание образовательной программы

Раздел 1. Последовательности и функции, их пределы

1.1. Понятие последовательности. Предел последовательности и его свойства. Неопределенности

Теория (0,5 а.ч.) Введение понятий последовательности, предела последовательности, свойств предела последовательности, неопределимого выражения или неопределенности, рассмотрение основных видов неопределенностей.

Практика (1,5 а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся находить пределы последовательностей, раскрывать неопределенности с помощью тождественных преобразований.

1.2. Понятие функции. Элементарные функции. Предел функции и его свойства

Теория (0,5 а.ч.) Введение понятия функции, основных элементарных функций, их графиков, преобразований графиков, понятия предела функции и его свойств.

Практика (1,5 а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся строить графики элементарных функций с помощью их элементарных преобразований, вычислять пределы функций.

1.3. Непрерывность и точки разрыва функции. Асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные)

Теория (0,5 а.ч.) Введение понятий непрерывности функции в точке, на множестве, точки разрыва функции, типов точек разрыва, понятия асимптоты графика функции, видов асимптот.

Практика (1,5 а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся исследовать функцию на непрерывность, определять тип точки разрыва, находить асимптоты графика функции.

Радел 2. Производная и ее применения к исследованию функций

2.1. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Уравнение касательной к кривой. Производная суммы, разности, произведения, частного функций

Теория (0,5 а.ч.) Изложение формулировок задач о построении касательной к кривой и нахождения мгновенной скорости движения, введение понятия производной, формул для нахождения производной суммы, разности, произведения, частного функций.

Практика (1,5 а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся вычислять простейшие производные, составлять уравнение касательной к кривой.

2.2. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции

Теория (0,5 а.ч.) Введение формулы производных основных элементарных функций, правил нахождения производной сложной функции.

Практика (1,5а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся находить производные основных элементарных функций, а также дифференцировать сложные функции.

2.3. Локальные экстремумы функции. Необходимое условие существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Теория (0,5 а.ч.) Введение понятия локальных экстремумов функции. Формулирование необходимого условия существования экстремума и достаточных условий существования экстремума. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Практика (1,5 а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся находить точки локального экстремума функции, а также наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

2.4. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба. Полное исследование функций и построение графиков

Теория (0,5 а.ч.) Введение понятия точки перегиба. Алгоритм полного исследования функции.

Практика (1,5 а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся с помощью второй производной находить точки перегиба функции, проводить полное исследование функции и строить ее график

Раздел 3. Интегральное исчисление

3.1. Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов

Теория (0,5 а.ч.) Введение понятия первообразной и неопределенного интеграла, формулирование их свойств. Формулы простейших интегралов.

Практика (1,5 а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся находить первообразные и неопределенные интегралы от основных элементарных функций

3.2. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Теория (0,5 а.ч.) Формулировка задач, приводящих к понятию определенного интеграла. Введение понятия определенного интеграла, его свойств. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

Практика (1,5 а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся вычислять определенные интегралы с помощью их свойств и формулы Ньютона-Лейбница.

3.3. Вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла. Вычисление объема тела вращения с помощью определенного интеграла

Теория (0,5 а.ч.) Введение формулы вычисления площади криволинейной трапеции и объема тела вращения с помощью определенного интеграла.

Практика (1,5а.ч.) Решение практических задач по теме.

Планируемые результаты: слушатели научатся находить площадь криволинейной трапеции и объем тела вращения с помощью определенного интеграла

4. Формы аттестации и контроля

Виды контроля

В образовательном процессе используются следующие методы контроля усвоения учащимися учебного материала:

Текущий контроль

Текущий контроль проводится с целью непрерывного отслеживания уровня усвоения материала и стимулирования учащихся не отвлекаться. Для реализации текущего контроля в процессе теоретического материала педагог обращается к учащимся с вопросами и дает короткие задания, в процессе практических занятий решают задачи по теме.

5. Организационно-педагогические условия реализации программы

Методическое обеспечение программы

Методы обучения, используемые в программе:

- словесные (устное объяснение материала);
- наглядные (презентация);
- практические;
- аналитические.

С целью стимулирования творческой активности учащихся будут использованы:

- игровые методики;
- метод опроса;
- коллективное обсуждение методов решения задачи.

Виды дидактических материалов

Для обеспечения наглядности и доступности изучаемого материала будут использоваться:

- наглядные пособия в виде слайдов или раздаточного материала;
- занятия будут проходить в форме лекций с демонстрацией преподавателем теоретического материала по теме, а также в форме самостоятельных практических занятий, на которых обучающиеся смогут обсуждать подходы к решению нестандартных задач и успешно их решать.

Организационно-педагогические ресурсы программы

Материально-техническое обеспечение учебной программы

Оборудование:

Наименование	На группу, ед.	Примечание
Электронная доска	одна	
Компьютер	один	
Экран	один	Для проектора

Кадровое обеспечение программы

Реализатор программы:

Бугаевская Анна Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Университета науки и технологий МИСИС.

6. Список литературы

Основная литература:

1. Башмаков, М.И. Алгебра и начала анализа: задачи и решения. / М.И. Башмаков, Б.М. Беккер. - М.: Высшая школа, 2004. - 296 с.

2. Вавилов, В.В. Задачи по математике. Начала анализа / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. - М.: Физматлит, 2008. – 284 с.

3. Игнатович, Э. Алгебра и начала анализа. Пособие для поступающих в вузы / Э. Игнатович. - Минск: ТетраСистемс, 2008. - 608 с.

4. Кочетков, Е.С. Арифметика, алгебра, начала анализа: Учебное пособие / Е.С. Кочетков. - М.: Форум, 2018. - 384 с.

5. Ященко, И.В. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс. Универсальный сборник задач / И.В. Ященко, С.А. Шестаков; М.: Просвещение, 2023. -240 с.

Интернет-источники:

1. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». Режим доступа: http://fipi.ru/ (дата обращения: 05.10.2026 г.).

2. Разбор демоверсии ЕГЭ-2026 по математике. Режим доступа: http://alexlarin.net/ (дата обращения: 05.10.2026 г.).

3. Образовательный портал для подготовки к экзаменам: «СДАМ ГИА: РЕШУ ВПР, ОГЭ, ЕГЭ, УВЭ, ЦТ, ЕНТ». Режим доступа: http://www.sdamgia.ru/ (дата обращения: 05.10.2026 г.).

Приложение. Контрольно-измерительные материалы

Примеры типовых задач, решаемых на практических занятиях.

1. Постройте графики функций, используя цепочку элементарных преобразований:

а) $y = \sqrt{1 - |x|}$; б) $y = \left|\frac{1-|x|}{1+2x}\right|$; в) $y = \frac{1}{2} - \sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

2. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2 - 3n + 7} - \sqrt{4n^2 - 7n + 2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{8n-1}{8n+3}\right)^{6-2n}$.

3. Прямая, параллельная прямой $y = 2x - 3$, касается графика функции $y = 4x - x^2$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Решите уравнение $f(x) = f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{4x - 3}$.

5. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x) = \frac{x^2+5x}{x-4}$.

6. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 12x + 7$; б) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

7. Вычислите определенный интеграл:

$$\int_{-3}^{2} (x^2 - 2x)\, dx.$$

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = 3 - 2x - x^2 \text{ и } y = 1 - x.$$