МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИИСЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МИСИС

Обвинцева Н.Ю., Мудрецова Л.В.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ

для студентов заочной формы обучения

Раздел «Физические основы механики. Колебания и волны»

Москва 2023

УДК 553

ББК 22.34я7

Рекомендовано к печати кафедрой физики Института базового образования ФГАОУ ВО НИТУ МИСИС (протокол № 8 от 15.02.2023 г.), Ученым советом Института базового образования ФГАОУ ВО НИТУ МИСИС (протокол № 8 от 30.03.2023 г.)

Рецензенты

д.т.н., доцент, профессор кафедры Физики (МГТУ ГА) - **Д.Е. Капуткин**

к.ф.-м.н., доцент кафедры физики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС» - **И.В. Забенков**

Авторы:

ст. преподаватель кафедры физики **Мудрецова Л. В.,**
к.ф.-м.н., доцент, кафедры физики **Обвинцева Н.Ю.**
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

Методическое пособие и контрольные работы по физике для студентов всех специальностей. Раздел «Физические основы механики. Колебания и волны» : учебное пособие / Н.Ю.Обвинцева, Л. В. Мудрецова, – Москва-Мичуринск : Изд-во Мичуринского ГАУ, 2023. – 94 с.

Методическое пособие предназначено для самостоятельной работы и контроля знаний по разделу «Физические основы механики. Колебания и волны» учебной дисциплины «Физика» студентов очной формы обучения НИТУ «МИСиС».

В учебном пособии содержатся основные физические понятия и формулы из соответствующего раздела физики, включены примеры решения типовых задач. В конце пособия приведены варианты контрольных работ, выполнение

которых необходимо для успешного прохождения промежуточной аттестации.

ВВЕДЕНИЕ

Особенностью и основой обучения на заочном отделении является самостоятельная работа студента по выполнению учебного плана, которая включает: самостоятельное изучение курса физики, выполнение контрольных работ (решения задач), выполнение письменных работ (рефератов), выполнение и защиты лабораторных работ, сдачу зачетов и экзаменов.

Для помощи в самостоятельном изучении учебного материала и выполнении контрольных работ кафедра общей физики выдает студентам учебно-методические материалы.

Данные **методические указания для студентов заочного отделения** содержат: рабочую программу по курсу «Физические основы механики. Колебания и волны» – всего 10 разделов, по каждому разделу дается краткое изложение теории, примеры решения нескольких характерных для данной темы задач, варианты контрольных работ (наборы задач для самостоятельного решения), темы письменных работ (рефератов), список рекомендованной литературы. Использование этого материала, наряду с традиционными учебниками, также будет полезно при подготовке к зачетам и экзаменам.

- Для **самостоятельного изучения курса физики** студентам-заочникам рекомендован ряд учебных пособий. Прежде, чем приступить к работе с ними, следует ознакомиться с рабочей программой по курсу «Физические основы механики. Колебания и волны», которая определяет объем и последовательность изучения учебного материала.

В процессе изучения теоретического материала необходимо усвоить:

- определения физических величин, используемых для описания механического движения частицы и твёрдого тела (таких как радиус-вектор, скорость, ускорение, импульс, масса, сила, момент силы, момент импульса, момент инерции, энергия кинетическая и потенциальная и т. д.);

- основные физические модели (в механике это – материальная точка (частица), система частиц, абсолютно твердое тело, сплошная среда, при описании колебательных и волновых процессов – гармонический осциллятор, сплошная среда и т.д.).

- уравнения, выражающие физические законы, описывающие состояния физической системы и изменения ее состояния.

- **Решение задач** по физике дает возможность применить теоретический материал на практике в конкретных условиях задачи и способствует лучшему усвоению физической теории.

Рекомендуется следующий порядок решения задач:

- определить, какие физические процессы (явления) рассматриваются в условии задачи, что представляет собой физическая система, какими физическими величинами характеризуются свойства тел в этой системе, ее состояние и протекающие в ней процессы;

- сделать чертеж физической системы и кратко записать все данные из условия задачи, а также искомые величины. Все данные записать в одной системе единиц, предпочтительно СИ;

- определить физические законы, с помощью которых описывается состояние системы и записать их математически. Записать соотношения, связывающие все физические величины, о которых идет речь в условии задачи;

- решить полученную систему уравнений в общем виде;

- провести проверку размерности полученного выражения;

- вычислить значения искомых величин с учетом правил приближенных вычислений.

- **Выполнение контрольных работ.** Контрольные работы, выполняемые студентом, имеют целью осуществление кафедрой контроля работы студента и оказание помощи в вопросах, не понятых или слабо усвоенных.

При оформлении студентом контрольных работ следует соблюдать следующие формальные требования:

- номера задач, включенных в контрольную работу, должны соответствовать данному варианту и шифру студента;
- контрольная работа выполняется в тетради школьного типа, на лицевой стороне которой приводятся сведения по следующему образцу:

  фамилия, имя и отчество,

  шифр,

  изучаемая дисциплина,

  контрольная работа № …,

  адрес;
- контрольные работы должны быть направлены в деканат не позднее, чем за две недели до начала сессии.

- **Выполнение письменных работ (рефератов).** По одной из пройденных тем студент должен представить письменную работу (реферат). Темы рефератов по курсу «Физические основы механики. Колебания и волны» приведены ниже в конце методических указаний. Номер темы реферата совпадает с последней цифрой шифра зачетной книжки студента.

- **Выполнение лабораторных работ.** Лабораторные работы имеют целью ознакомить студента с измерительной аппаратурой и методами физических измерений, а также проиллюстрировать основные физические законы. Лабораторная работа – это физический эксперимент, имеющий свою цель, необходимое для ее реализации оборудование и требующий от исполнителя определенных знаний. Выполняя лабораторную работу, каждый студент имеет возможность ощутить себя исследователем, на практике применить усвоенный теоретический материал, провести измерения определяемых физических величин и количественную обработку полученных результатов измерений.

Выполнение лабораторных работ по определенной части курса физики завершается зачётом по лабораторному практикуму. При сдаче зачета по каждой выполненной работе студент должен продемонстрировать:

- знание физического смысла измеряемой величины, методики ее измерения, а также знание теоретических вопросов, на которых базируется работа;

- умение собрать установку по принципиальной схеме и пользоваться измерительной аппаратурой;

- знание расчетных формул, степени точности как промежуточных, так и окончательных результатов измерений, умение вычислить абсолютную и относительную погрешности.

- **Важные замечания**

Сделаем несколько замечаний по поводу использования некоторых важных понятий, на которые следует обратить внимание.

- *Единицы измерения* – количественные характеристики (мера) физических величин. Без основательного знания системы единиц, без умения пользоваться ими при решении задач невозможно усвоить курс физики и применять физические знания на практике;

- *Размерности.* Необходимо активно использовать размерности при любых вычислениях: решении задач, выполнении контрольных работ и обработке результатов измерений в ходе выполнения лабораторных работ.

- *Скаляр и вектор* являются очень важными понятиями в физике вообще и в механике, в частности. Студенты часто не замечают при чтении учебника по общей физике, что ряд букв, соотношений или формул целиком набраны жирным шрифтом (например, m**a**=**F**) с целью подчеркнуть векторную природу соотношений, – ведь рукописный вариант таких соотношений содержит просто стрелку над символом такой величины (например, $m\vec{a} = \vec{F}$). Для привлечения внимания студентов к этому моменту описания физических величин и законов мы посчитали полезным использовать и стрелку, и жирный шрифт (например, $m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}.$), а обыкновенным шрифтом (F или F) изображать длину вектора, т.е. его модуль.

- **Сдача зачетов и экзаменов.** К сдаче экзамена или теоретического зачета допускаются студенты, выполнившие установленное число контрольных и письменных работ и сдавшие зачет по лабораторному практикуму. Зачтенные контрольные и лабораторные работы предъявляются экзаменатору.

При сдаче экзамена студент должен продемонстрировать знание курса физики в объеме, установленном программой, умение решать физические задачи, а также дать пояснения по существу решения задач, входящих в его контрольные работы.

Число экзаменов и теоретических зачетов по курсу физики устанавливается учебными планами специальностей.

Часть 1

1.1. КИНЕМАТИКА

Теоретический минимум

Кинематика – это раздел механики, предметом которого является описание движения тел без выяснения причин, его вызывающих. Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется материальной точкой (частицей). При описании движения материальной точки нужно указать, по отношению к какому телу рассматривается движение. Это тело называют телом отсчета. Тело отсчета, связанная с ним система координат и часы для отсчета времени образуют систему отсчета, позволяющую определять положение движущегося тела в любой момент времени. В Международной системе единиц (СИ) за единицу длины принят метр, а за единицу времени – секунда.

Положение материальной точки в пространстве в любой момент времени задается радиус-вектором $\vec{\mathbf{r}}$. Радиус-вектор – это вектор, проведенный из заранее фиксированной точки (начала отсчета) в данную точку (рисунок 1.1.1). Поэтому его проекции на оси декартовой системы координат являются координатами $x,\ y,\ z$ данной точки:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{i}}x + \vec{\mathbf{j}}y + \vec{\mathbf{k}}z, \qquad (1.1.1)$$

где $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ и $\vec{\mathbf{k}}$ – единичные векторы вдоль осей x, y и z.

Зависимость радиус-вектора от времени $\vec{\mathbf{r}}(t)$ называется законом движения. В декартовой системе координат закон движения можно задать с помощью зависимости координат от времени x(t), y(t), z(t). Вектор $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, проведенный из начальной точки 1 в конечную точку 2, называется перемещением $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$.

Линия, которую при своем движении описывает материальная точка, называется траекторией движения тела. Уравнение этой кривой называется уравнением траектории.

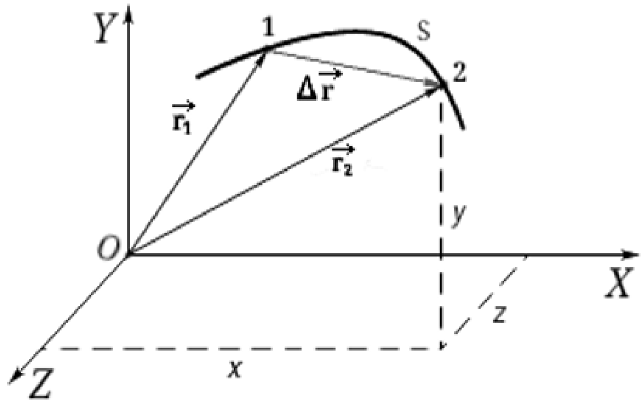

Рисунок 1.1.1. Радиус-вектор и вектор перемещения

Путь S – это длина траектории, пройденная телом за некоторое время t. Путь – скалярная величина.

Вектор средней скорости определяется как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ ко времени Δt, за которое это перемещение совершено: $\vec{V}_{ср} = \Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta t$. Вектор $\vec{V}_{ср}$ совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{\mathbf{r}}$.

Мгновенная скорость $\vec{\mathbf{v}}$ частицы – вектор скорости в данный момент времени, он равен первой производной от $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения тела:

$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}, \quad \vec{\mathbf{r}} = \int \vec{\mathbf{v}} dt. \qquad (1.1.2)$$

Как и любой другой вектор, в декартовой системе координат вектор $\vec{\mathbf{v}}$ можно представить с помощью единичных векторов $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{i}}\mathrm{v}_x + \vec{\mathbf{j}}\mathrm{v}_y + \vec{\mathbf{k}}\mathrm{v}_z.$$

Производная радиус-вектора $\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{i}}\dot{x} + \vec{\mathbf{j}}\dot{y} + \vec{\mathbf{k}}\dot{z}$, поэтому

$$\mathrm{v}_x = \dot{x}, \quad \mathrm{v}_y = \dot{y}, \quad \mathrm{v}_z = \dot{z}. \qquad (1.1.3)$$

Модуль скорости:

$$\mathrm{v} = |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}. \qquad (1.1.4)$$

Устремим $\Delta t \to 0$, тогда на бесконечно малом участке траектории перемещение совпадает с траекторией, т.е. $S = |\Delta\vec{\mathbf{r}}|$. В этом случае мгновенную скорость можно выразить через путь S

$$\mathrm{v} = \dot{S}, \quad |d\vec{\mathbf{r}}| = dS, \quad S = \int \mathrm{v} dt . \qquad (1.1.5)$$

Средняя путевая скорость вычисляется как $V_{\text{ср.пути}}=S/\Delta t$, где S – весь путь, пройденный телом за все время Δt.

Единица измерения скорости [V] = м/с .

Ускорением $\vec{\mathbf{a}}$ называется быстрота изменения скорости во времени:

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{v}}} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}, \quad \vec{\mathbf{v}} = \int \vec{\mathbf{a}} dt , \qquad (1.1.6)$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{i}}a_x + \vec{\mathbf{j}}a_y + \vec{\mathbf{k}}a_z, \text{ где } a_x = \dot{\mathrm{v}}_x, \quad a_y = \dot{\mathrm{v}}_y, \quad a_z = \dot{\mathrm{v}}_z , \qquad (1.1.7)$$

$$a = |\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \qquad (1.1.8)$$

Единица измерения ускорения: [a] = м/с^2.

Движение с постоянным по величине и направлению ускорением называется равноускоренным. В этом случае интегрирование в (1.1.6) и (1.1.2) дает формулы равноускоренного движения:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t, \quad \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{\vec{\mathbf{a}}t^2}{2}, \qquad (1.1.9)$$

где $\vec{\mathbf{v}}_0$ и $\vec{\mathbf{r}}_0$ – скорость и радиус-вектор в начальный момент времени t=0. В проекции, например, на ось x это означает:

$$\mathrm{v}=\mathrm{v}_{0x} \mp a_x t, x = x_0 \mp \mathrm{v}_{0x} \mp \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1.1.10)$$

Знак «+» или «-» зависит от выбора направления оси X и направления векторов $\vec{\mathbf{v}}_0$ и $\vec{\mathbf{a}}$. Исключая время, т.е. подставляя из первого уравнения $t=(\mathrm{v}-\mathrm{v}_{0x})/a$ во второе, получаем:

$$\mathrm{v}_x^2 = \mathrm{v}_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) . \qquad (1.1.11)$$

В случае произвольного движения по кривой вектор ускорения $\vec{\mathbf{a}}$ можно разделить на две взаимно ортогональные части (рисунок 1.1.2):

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_\tau + \vec{\mathbf{a}}_n, \quad \vec{\mathbf{a}}_\tau \perp \vec{\mathbf{a}}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad (1.1.12)$$

Здесь a_τ – тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории, которое является скоростью изменения модуля (величины) скорости:

$$|\vec{a}_\tau| = a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt}. \qquad (1.1.13)$$

Тангенциальное ускорение a_τ направлено вдоль $\vec{\mathbf{v}}$, если скорость увеличивается ($\frac{d\mathrm{v}}{dt} > 0$), и против $\vec{\mathbf{v}}$, если скорость уменьшается ($\frac{d\mathrm{v}}{dt} < 0$). Вторая часть, a_n – нормальное ускорение. Это ускорение направлено перпендикулярно касательной к траектории и характеризует быстроту изменения направления вектора скорости. Модуль нормального ускорения равен:

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R}. \qquad (1.1.14)$$

В частном случае равномерного движения по окружности нормальное ускорение называют центростремительным.

Если тангенциальное ускорение постоянно по величине, интегрированием в (1.1.13) и (1.1.5) с a_τ=const получаем формулы, аналогичные (1.1.9) – (1.1.11):

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + a_\tau t, \quad S = \mathrm{v}_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \quad \mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_0^2 + 2a_\tau S, \qquad (1.1.15)$$

где S – длина траектории.

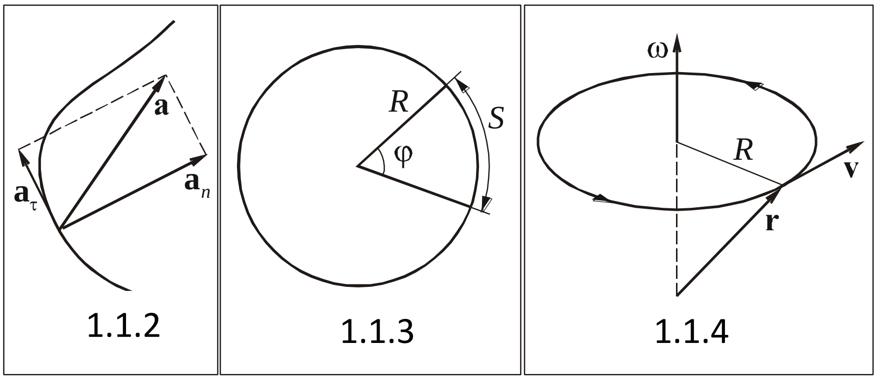

Рисунок 1.1.2. Тангенциальная и нормальная составляющие полного ускорения

Рисунок 1.1.3. Движение материальной точки по окружности

Рисунок 1.1.4. Направление векторов угловой скорости и углового ускорения

Рассмотрим движение материальной точки по окружности радиуса *R*. Длина дуги *S* и угол поворота φ связаны соотношением $S = \varphi R$ (рисунок 1.1.3). Введем вектор угла поворота $\Delta\vec{\boldsymbol{\varphi}}$, который направлен по оси вращения и его направление определяется в соответствии с правилом буравчика. Угол измеряется в радианах [Δφ]=рад.

Угловой скоростью ω называется производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \varphi = \int \omega dt \,. \qquad (1.1.16)$$

Угловая скорость $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ является векторной величиной и направлена по оси вращения (рисунок 1.1.4). Если ω – const, то происходит равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси. Единица измерения угловой скорости [ω]=рад/с.

Для характеристики неравномерного вращения тела используется вектор углового ускорения $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (эпсилон), который характеризует быстроту изменения угловой скорости во времени:

$$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \,. \qquad (1.1.17)$$

Единицы измерения углового ускорения [ε]=рад/с^2. Связь между векторами линейной скорости и угловой скорости такова:

$$\vec{\mathbf{v}} = [\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}], \;\; \mathrm{v} = \omega R \,, \qquad (1.1.18)$$

крестик означает векторное произведение, $\vec{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор, *R* – радиус окружности (рисунок 1.1.3). Второе равенство в (1.1.18) получается дифференцированием соотношения $S = \varphi R$. Если взять производную от первого равенства в (1.1.18), то по правилу дифференцирования векторного произведения:

$$\dot{\vec{\mathrm{v}}} = \vec{\mathrm{a}} = [\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\mathrm{r}}] + [\vec{\omega} \times \dot{\vec{\mathrm{r}}}] = [\vec{\varepsilon} \times \vec{\mathrm{r}}] + [\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}] \,.$$

Если ось вращения не меняет направления в пространстве, получившиеся два слагаемых равны тангенциальному и нормальному ускорениям (1.1.12):

$$\vec{\mathrm{a}}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{\mathrm{r}}], \quad \mathrm{a}_\tau = \varepsilon \mathrm{R} \,, \qquad (1.1.19)$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}], \quad a_n = \omega^2 R \,. \tag{1.1.20}$$

Когда угловое ускорение не зависит от времени, вращение называют равноускоренным. В этом случае интегрирование в (1.1.17) и (1.1.16) с $\varepsilon = \overline{\text{const}}$ дает формулы равноускоренного вращения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1.1.21}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0), \tag{1.1.22}$$

последнее соотношение следует из первых двух (сравните это с (1.1.9) – (1.1.11), (1.1.5)).

Число оборотов N связано с углом поворота φ соотношением:

$$\varphi = 2\pi N, \tag{1.1.23}$$

т.к. один оборот означает поворот на угол 2π. Частота вращения n, равная числу оборотов в единицу времени, связана с угловой скоростью ω соотношением:

$$\omega = 2\pi n, \tag{1.1.24}$$

которое получается дифференцированием уравнения (1.1.23). Период вращения T (время одного оборота):

$$T = 1/n = 2\pi/\omega \tag{1.1.25}$$

Размерность частоты $[n] = c^{-1}$.

<u>Примеры решения задач</u>

Задача 1.

Закон движения частицы имеет вид: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{i}}\mathrm{A}t + \vec{\mathbf{j}}\left(\mathrm{B}t - \mathrm{C}t^2\right)$, где $\vec{\boldsymbol{i}}$ и $\vec{\boldsymbol{j}}$ – орты осей X и Y; A, B и C – положительные постоянные.

1. Запишите уравнение траектории.
2. Определите вектор скорости и его модуль.
3. Вектор ускорения и его модуль.

4. Зависимость от времени нормального ускорения, тангенциального ускорения.
5. Радиус кривизны траектории.
6. Угол между векторами скорости и ускорения.

Решение:

1. Из условия задачи следует, что частица движется в плоскости *XY*. В начальный момент времени (при t=0) частица находилась в начале координат. В соответствии с (1.1.1) запишем законы движения по осям *X* и *Y* в виде:

$x = \mathrm{A}t, \ y(t) = \mathrm{B}t - \mathrm{C}t^2, \ z = 0.$

Откуда следует, что по оси *X* частица движется равномерно, а по оси *Y* – равноускоренно. Выражаем время $t = x/\mathrm{A}$ и подставляем в выражение $y(t)$. Получаем уравнение траектории:

$$y = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}^2}x^2.$$

Это уравнение параболы (рисунок 1.1.5) с вершиной в начале координат, пересекающей ось *X* в точке (AB/C).

2. По определению вектора мгновенной скорости (1.1.2) запишем

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{i}}\frac{d}{dt}(At) + \vec{\mathbf{j}}\frac{d}{dt}(Bt - Ct^2),$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{i}}A + \vec{\mathbf{j}}(B - 2Ct).$$

Проекции вектора скорости на оси *X* и *Y* в соответствии с (1.1.3) запишем в виде: $\mathrm{v}_x = \dot{x} = \mathrm{A}, \quad \mathrm{v}_y = \dot{y} = \mathrm{B} - 2\mathrm{C}t, \quad \mathrm{v}_z = 0$.

Модуль скорости согласно (1.1.4): $\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2}$.

3. Используя определение ускорения (1.1.6) и закон скорости $\vec{\mathbf{v}}(t)$, получим зависимость вектора ускорения от времени:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{i}}\frac{d}{dt}(A) + \vec{\mathbf{j}}\frac{d}{dt}(B - 2Ct),$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \vec{\mathbf{j}}\,2C.$$

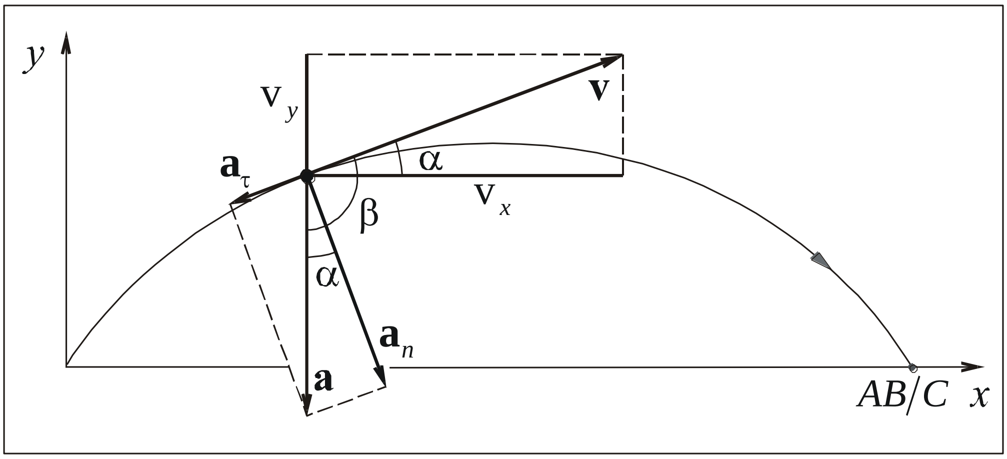

Рисунок 1.1.5. Равноускоренное движение материальной точки

Отсюда видно, что проекции вектора ускорения на оси, в соответствии с (1.1.7), следующие:

$$a_y = \dot{\mathrm{v}}_y = -2C, \quad a_x = 0, \quad a_z = 0\,.$$

Таким образом, ускорение постоянно по величине и направлено против оси y. По модулю ускорение равно (1.1.8): a = 2C.

4. Тангенциальное ускорение в соответствии с (1.1.13):

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2} = -2\mathrm{C}\frac{(\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2}} = -a\frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}}\,.$$

Нормальное ускорение определим по теореме Пифагора (1.1.12):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = a\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_y^2}{\mathrm{v}^2}} = a\frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}} = \frac{2\mathrm{AC}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2}}\,.$$

Также данные соотношения для a_τ и a_n можно записать непосредственно из чертежа (рисунок 1.1.5). Действительно, $|a_\tau| = a\sin\alpha$, $a_n = a\cos\alpha$, где $\sin\alpha = \mathrm{v}_y/\mathrm{v}$, $\cos\alpha = \mathrm{v}_x/\mathrm{v}$. Получаем

$$a_\tau = -a\frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}}, \quad a_n = a\frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}}\,.$$

При движении «вверх», когда $\mathrm{v}_y > 0$, величина скорости v уменьшается и $a_\tau < 0$; когда $\mathrm{v}_y < 0$, величина скорости увеличивается и $a_\tau > 0$.

5. Из формулы (1.1.14) и полученного в пункте 4 выражения для a_n, определим радиус кривизны траектории как функцию от времени:

$$R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v^3}{a v_x}=\frac{\left(A^2+(B-2Ct)^2\right)^{3/2}}{2AC}.$$

6. Угол β между векторами скорости $\vec{\mathbf{v}}$ и ускорения $\vec{\mathbf{a}}$ можно найти из определения скалярного произведения $(\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{a}})=va\cos\beta$ и соотношения $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{a}}=v_x a_x+v_y a_y+v_z a_z$:

$$\cos\beta=\frac{(\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{a}})}{va}=\frac{v_y a_y}{va}=-\frac{v_y}{v}=-\frac{B-2Ct}{\sqrt{A^2+(B-2Ct)^2}}.$$

Угол β можно определить с помощью рисунка 1.1.5:

$\beta=\pi/2+\alpha$,

$$\mathrm{tg}\beta=-\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{v_x}{v_y}=-\frac{A}{B-2Ct}.$$

Задача 2.

Колесо радиусом 4 см вращается по закону $\varphi(t)=4t-t^3$. Определите угловую скорость вращения, угловое ускорение, линейную скорость и полное ускорение точек, лежащих на ободе колеса в конце первой секунды вращения.

Решение:

Согласно определению (1.1.16)

$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d}{dt}(4t-t^3)=4-3t^2;\qquad \omega=1\,\text{рад/с}.$

Угловое ускорение в соответствии с (1.1.17) равно

$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt};\qquad \varepsilon(t)=\frac{d}{dt}(4-3t^2)=-6t;\qquad \varepsilon=6\,\text{рад/с}^2.$

Линейная скорость по выражению (1.1.18) равна

$v=\omega R;\qquad v=0.04\,\text{м/с}.$

Полное линейное ускорение определим на основе соотношений (1.1.12)-(1.1.14):

$a_\tau=\omega^2 R,\ a_n=\varepsilon R,\ a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2};$

$a=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},\qquad a=1.2\,\text{м/с}^2.$

Задача 3.

Тело вращается вокруг неподвижной оси, при этом зависимость угловой скорости от времени дается уравнением $\omega(t) = 10 - 0.5t$. Определите угловое ускорение, зависимость углового перемещения от времени и полное число оборотов, совершенное телом за первые 30 с своего вращения.

Решение:

Согласно определению (1.1.17), угловое ускорение равно

$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -0.5\ \text{рад}/\text{с}^2.$

Зависимость φ(t) запишем на основе (1.1.16)

$\varphi(t) = \int_{t_1}^{t_2}(10 - 0.5t)dt = \left(10t - \frac{0.5t^2}{2}\right)\Big|_0^{30} = 75\text{рад}.$

Зная $\varphi(t)$, определим полное число оборотов тела

$N = \frac{\varphi}{2\pi};\qquad N \approx 12.$

<u>Задачи для самостоятельной работы</u>

1.1.01. Прямолинейное движение точки задано уравнением $x(t) = At + Bt^2$, где А=2*м/с*, В=-0.1*м/с*^{2}. В какой момент времени точка остановится? Определите координату и ускорение в этот момент времени.

1.1.02. Движение частицы по прямой вдоль оси X описывается законом $x=At+Bt^2$, где $A=1$*м/с*, $B=–0{,}5$*м/с*^{2}. Определите среднюю путевую скорость частицы в интервале времени от $t_1=1$*с* до $t_2=5$*с*.

1.1.03. Камень падает с высоты 100 м без начальной скорости. За какое время он пройдет первый и последний метр своего пути? Какой путь пройдет тело за первую и за последнюю секунды движения?

1.1.04. Тело брошено горизонтально с горы со скоростью $v_0=20$*м/с*. Определить скорость, а также тангенциальное и нормальное ускорения камня через три секунды после начала движения. Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g=10$*м/с*^{2}.

1.1.05. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \vec{\boldsymbol{\imath}}(A - Bt^2) + \vec{\boldsymbol{\jmath}}Ct$, где A=8*м*, B=*1м/с*^{2}, C=*3м/с*, $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$ – орты осей X и Y. Запишите уравнение траектории, закон изменения скорости и ускорения от времени. Для момента времени t=*2с* вычислить модуль скорости, модуль полного ускорения, тангенциальное и нормальное ускорения.

1.1.06. Частица брошена со скоростью v_0=*10м/с* под углом 30^o к горизонту. Считая, что в начальный момент времени частица находилась в начале координат, запишите закон движения частицы и уравнение траектории. Определите максимальную высоту подъема и дальность и полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.1.07. Закон движения материальной точки $\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{i}}\mathrm{C}t - \vec{\mathbf{j}}\mathrm{B}t$, где A=*3м/с*, B=*5м/с*^{2}, $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$ – орты осей x и y. Найти угол между скоростью и ускорением в момент времени t=*2с*.

1.1.08. Угловая скорость, вращающегося тела изменяется по закону $\omega(t) = At + Bt^2$, где A=1 *рад/с*^{2}, B=2 *рад/с*^{3}. На какой угол повернется тело за время от t_1=3*с* до t_2=5*с*? Определите угловое ускорение в моменты времени t_1 и t_2.

1.1.09. Две материальные точки движутся по окружностям, радиусы которых отличаются в 2 раза. Сравните центростремительные ускорения этих материальных точек, если: а) равны их линейные скорости; б) равны их частоты.

1.1.10. Центрифуга для исследования пробы крови человека совершает 13500 об/мин. Расстояние между осью ротора и центром пробирки с образцом равно 10 см. Определите частоту, период, угловую и линейную скорости.

1.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Теоретический минимум

Динамика – это раздел механики, в котором изучается движение тел с учётом причин, вызывающих или изменяющих это движение. Полное описание механического состояния системы дают законы, сформулированные впервые И. Ньютоном.

Первый закон Ньютона утверждает, что существуют системы отсчёта (называемые инерциальными), в которых свободные тела сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел или полей не выведет их из этого состояния. Инерциальная система отсчёта может рассматриваться как модель, приближенная к реальной системе. Для инерциальных систем отсчета справедлив принцип относительности Галилея: механические явления происходят одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. Движение тела с постоянной скоростью при отсутствии внешних воздействий называют движением по инерции. При одинаковом воздействии различные тела по-разному изменяют свою скорость, что характеризуется свойством инертности. Для объяснения инертности вводят понятие массы как меры инертности тел, их способности «сопротивляться» внешнему силовому воздействию. В системе СИ масса измеряется в килограммах [m]=кг.

Произведение массы тела на его скорость называется импульсом:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}\,. \tag{1.2.1}$$

Импульс – величина векторная и его направление совпадает по направлению с вектором скорости. В системе СИ: [p] = [m][v] = кг·м/с.

Силой называется векторная величина, характеризующая меру взаимодействия тел друг с другом. Сила имеет модуль, направление в пространстве и точку приложения. Единица измерения силы: [F]= Н = кг·м/с^2 (Н - ньютон). В механике силы подчиняются принципу суперпозиции: если на тело одновременно действуют несколько сил $\vec{\mathbf{F}}_i$, то результирующая сила равна их векторной сумме, т.е.

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \, . \qquad (1.2.2)$$

Математическая формулировка второго закона Ньютона:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \, , \qquad (1.2.3)$$

скорость изменения импульса тела равна действующей на нее силе. Этот закон справедлив в инерциальных системах отсчёта и устанавливает связь между равнодействующей силой и импульсом тела. Проинтегрируем уравнение движения (1.2.3) по времени от t_2 до t_1:

$$\vec{\mathbf{p}}(t_2) - \vec{\mathbf{p}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} \, dt \; . \qquad (1.2.4)$$

Интеграл в правой части называют импульсом силы. Таким образом, получаем, что изменение импульса тела равно импульсу силы. Интегрирование необходимо в тех случаях, когда сила или равнодействующая сил в процессе движения тела меняется во времени.

На основе выражения (1.2.4) при условии, что m=const, запишем формулировку второго закона Ньютона через ускорение $\vec{\mathbf{a}}$:

$$\frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \vec{\mathbf{F}}, \qquad m\frac{d(\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \vec{\mathbf{F}}, \qquad m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}. \qquad (1.2.5)$$

Выражение (1.2.1) является основным уравнением динамики поступательного движения тела.

Третий закон Ньютона объясняет особенности взаимодействия тел. Он утверждает, что силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21} \, , \qquad (1.2.6)$$

где $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ – сила, с которой первое тело действует на второе, $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ – сила, с которой второе тело действует на первое. Силы $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ и $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ приложены к разным телам, направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.

Два радиуса-вектора $\vec{\mathbf{r}}'$ и $\vec{\mathbf{r}}$ одной и той же материальной точки в двух различных инерциальных системах отсчета K' и K связаны между собой преобразованием Галилея:

$$\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{v}}_{c0} t, \quad t' = t \, , \tag{1.2.7}$$

где $\vec{\mathbf{v}}_{c0}$ – скорость движения системы отсчета K' относительно системы K. Принцип относительности Галилея говорит о том, что инерциальные системы отсчета:

а) существуют (т.е. включает в себя первый закон Ньютона);

б) движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно $\left(\dot{\vec{\mathbf{v}}}_{c0} = 0\right)$;

в) равноправны (все законы механики одинаковы в разных инерциальных системах отсчета).

Дифференцируя преобразование Галилея (1.2.7) по времени с учетом $\dot{\vec{\mathbf{v}}}_{c0} = 0$, получаем закон сложения скоростей:

$$\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}_{c0} , \tag{1.2.8}$$

который справедлив и для перехода между неинерциальными системами отсчета. Здесь $\vec{\mathbf{v}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}$ – скорость тела в системе отсчета K, $\vec{\mathbf{v}}' = \dot{\vec{\mathbf{r}}}'$ – скорость этого же тела в системе K'. Инвариантность (одинаковость) законов Ньютона (1.2.1), (1.2.6) относительно преобразований Галилея как проявление равноправности инерциальных систем отсчета видна из второго дифференцирования преобразования (1.2.7):

$$\dot{\vec{\mathbf{v}}}' = \dot{\vec{\mathbf{v}}}.$$

Любое тело в разных инерциальных системах отсчета имеет одинаковое ускорение.

В классической механике все силы имеют гравитационную или электромагнитную природу. Данные силы нельзя свести к другим, более простым, поэтому их называют фундаментальными.

Гравитационные взаимодействия подчиняются закону всемирного тяготения:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1.2.9)$$

где m_1 и m_2 – гравитационные массы взаимодействующих тел (материальных точек), r – расстояние между ними, коэффициент пропорциональности:

$$\gamma = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ Н \cdot м^2/кг^2$$

называется гравитационной постоянной. Можно доказать, что формула (1.2.9) также верна для однородных шаров и сфер, тогда r – расстояние между их центрами. Из закона всемирного тяготения следует, что ускорение свободного падения для тела, находящегося на поверхности планеты радиуса R и массы M определяется соотношением

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2}, \qquad g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

Все тела, независимо от массы m, в данном гравитационном поле обладают одинаковым ускорением g. На поверхности Земли $g \approx 9{,}8\ м/с^2$, что получается подстановкой массы и радиуса Земли. Если удаляться от поверхности на расстояния, сравнимые с радиусом Земли, то ускорение свободного падения будет уменьшаться.

Сила притяжения к Земле:

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}} \qquad (1.2.10)$$

называется силой тяжести. Сила тяжести направлена к центру Земли. Весом тела $\vec{\mathbf{G}}$ называется сила, с которой тело действует на опору или подвес вследствие гравитационного притяжения к Земле. Таким образом, вес тела также измеряется в ньютонах. Если подвес (опора) и тело покоятся относительно Земли (или двигаются равномерно, прямолинейно), то вес и сила тяжести равны друг другу по величине, при этом они приложены к разным точкам: вес к подвесу или опоре, сила тяжести – к самому телу. Однако, вес тела далеко не всегда равен силе тяжести, а зависит от того, с каким ускорением движется опора вверх или вниз. Найдем, например, вес $\vec{\mathbf{G}}$ тела, движущегося вместе с опорой с ускорением $\vec{\mathbf{a}}$. По третьему закону Ньютона вес тела равен по величине силе реакции опоры $\vec{\mathbf{N}}$:

$$\vec{\mathbf{G}} = -\vec{\mathbf{N}}.$$

Из уравнения движения тела (1.2.5):

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} = m\vec{\mathbf{g}} - \vec{\mathbf{G}},$$

находим вес:

$$\vec{\mathbf{G}} = m(\vec{\mathbf{g}} - \vec{\mathbf{a}}),$$

отличающийся от силы тяжести $\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}}$. Итак, вес тела может быть больше или меньше силы тяжести: если вектора $\vec{g}$ и $\vec{\mathbf{a}}$ направлены в одну сторону, то $G < mg$, и если наоборот, то $G > mg$. Если тело движется с ускорением $a = g$, то $G = 0$ – т.е. наступает состояние невесомости.

Электромагнитные силы в механике представляют собой упругие силы и силы трения. Под воздействием приложенных к телу сил всякое тело деформируется, т.е. изменяет размер и форму. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальную форму и размеры, деформация называется упругой. Деформация является упругой, если внешняя сила не превосходит определенного значения, которая называется пределом упругости. При превышении этого предела деформация становится неупругой (пластичной). Рассмотрим упругие деформации. Возьмем пружину и закрепим один из ее концов. Под воздействием внешней силы $\vec{\mathbf{F}}_{\text{вн}}$, приложенной к другому ее концу, пружина растянется на величину Δl. Опыт показывает, что при малых деформациях удлинение пружины пропорционально растягивающей силе, $\Delta l \sim \vec{\mathbf{F}}_{\text{вн}}$. В состоянии равновесия внешняя сила будет уравновешена упругой силой $\vec{\mathbf{F}}_{\text{упр}}$, возникающей в пружине в результате деформации, $\vec{\mathbf{F}}_{вн} = -\vec{\mathbf{F}}_{упр}$. Поэтому упругая сила оказывается тоже пропорциональной удлинению пружины:

$$F = k\Delta l. \qquad (1.2.11)$$

Коэффициент пропорциональности k называется коэффициентом жесткости пружины. Утверждение о пропорциональности между упругой силой и деформацией называется законом Гука. Этот закон справедлив для малых деформаций, т.е. когда

$$\Delta l \,/\, l_0 << 1,$$

где l_0 – длина тела (пружины) в недеформированном состоянии.

Теперь о силах трения. Различают сухое и вязкое трение. Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии прослойки называют сухим. В этом случае сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но и при попытках вызвать такое скольжение. В последнем случае она называется силой трения покоя. Согласно второму закону Ньютона, сила трения покоя равна по величине и противоположна по направлению внешней силе. При увеличении внешней силы сила трения покоя достигает своего максимального значения, и начинается скольжение. Сила трения скольжения почти не зависит от скорости скольжения и пропорциональна силе реакции опоры $\vec{\mathbf{N}}$:

$$F = \mu N, \qquad (1.2.12)$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности μ называют коэффициентом трения.

Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой называется вязким. При небольших скоростях сила вязкого трения пропорциональна скорости тела:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\alpha\vec{\mathbf{v}}. \qquad (1.2.13)$$

Знак минус означает, что эта сила вязкого трения направлена противоположно скорости. При больших скоростях сила вязкого трения начинает расти пропорционально квадрату скорости:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\beta \mathrm{v}\vec{\mathbf{v}}.$$

Отдельно остановимся на таком частном случае применения законов Ньютона, как описание равномерного движения по окружности. Равномерное криволинейное движение означает, что тело обладает нормальным ускорением $\vec{\mathbf{a}}_n$ (1.1.14), (1.1.20), направленным перпендикулярно скорости, в данном случае к центру этой окружности, то есть центростремительным ускорением:

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \omega^2 R = a_{\text{цс}}.$$

Согласно второму закону Ньютона, это ускорение сообщает телу сумма действующих на него сил,

$$m\vec{\mathbf{a}}_{\text{цс}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i. \qquad (1.2.14)$$

Эту сумму называют иногда центростремительной силой. Надо иметь в виду, что в природе не существует специальной центростремительной силы, ее роль выполняет какая-нибудь реальная наличествующая сила или сумма таковых. Например, для спутника на околоземной орбите в качестве центростремительной силы выступает сила тяжести $\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}}$

$$m\vec{\mathbf{a}}_{\text{цс}} = m\vec{\mathbf{g}},$$

откуда и получается формула для скорости такого спутника:

$$\mathrm{v} = \sqrt{gR}, \qquad (1.2.15)$$

которая называется первой космической скоростью.

В отличие от центростремительной силы, центробежная сила существует. Правда, появляется она в неинерциальной вращающейся вместе с телом системе отсчета, в которой само тело покоится. Эта центробежная сила инерции равна массе тела, умноженной на взятое с обратным знаком ускорение системы отсчета в данной точке:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{цб}} = -m\vec{\mathbf{a}}_{\text{цс}}.$$

Результат (1.2.15) может быть получен в неинерциальной системе отсчета, связанной со спутником. Уравнение движения спутника в этой системе отсчета:

$$m\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}}_{\text{цб}} + m\vec{\mathbf{g}}, \quad \vec{\mathbf{a}}' = 0.$$

Ускорение спутника $\vec{\mathbf{a}}'$ равно нулю, так как он покоится в сопутствующей ему системе отсчета.

Примеры решения задач

Задача 1.

К пружинным весам подвешен легкий блок. Через него переброшена невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза массами по *M=5 кг*. После того, как на один из грузов был поставлен перегрузок массой *m=1 кг*, система пришла в движение. Определить: 1) ускорение тел a; 2) силу давления f перегрузка на груз; 3) натяжение нити T; 4) показание пружинных весов G. Трение отсутствует.

Решение:

Рассмотрим силы, действующие на два груза и перегрузок (рисунок 1.2.1). На первый груз действуют: $M\vec{g}$ – сила тяжести и $\vec{\mathbf{T}}_1$– сила натяжения нити. На второй груз действуют: $M\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{\mathbf{T}}_2$ – сила натяжения нити, $\vec{\mathbf{f}}$ – сила давления перегрузка. На перегрузок действуют: $m\vec{g}$ – сила тяжести и $\vec{N}$– сила реакции опоры. Запишем уравнения движения для каждого из этих тел в векторной форме:

$$M\vec{\mathbf{a}}_1 = \vec{\mathbf{T}}_1 + M\vec{\mathbf{g}},$$
$$M\vec{\mathbf{a}}_2 = \vec{\mathbf{T}}_2 + M\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{f}},$$
$$m\vec{\mathbf{a}}_3 = m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}}.$$

Если объединить два тела M и m справа в одно $M + m$, потеряем запрашиваемую информацию о силе давления $\vec{\mathbf{f}}$ перегрузка m на груз M. Согласно третьему закону Ньютона, сила реакции опоры $\vec{\mathbf{N}}$, действующая со стороны груза на перегрузок, по величине равна силе давления $\vec{\mathbf{f}}$:

$$\vec{\mathbf{N}} = -\vec{\mathbf{f}}.$$

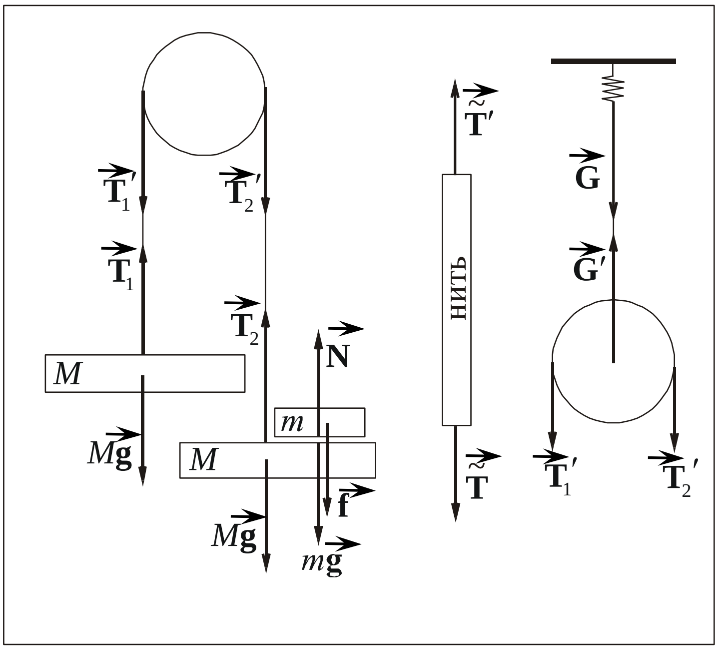

Рисунок 1.2.1. Направление сил, действующих на грузы

Из условия нерастяжимости нити следует, что все грузы движутся с одинаковым по величине ускорением:

$$a_3 = a_2 = a_1 = a,$$

$$\vec{\mathbf{T}}_1 = -\vec{\mathbf{T}}_1', \vec{\mathbf{T}}_2 = -\vec{\mathbf{T}}_2'.$$

Уравнение движения нити с учетом условия ее невесомости (рисунок 1.2.1) имеет вид:

$$0 = \vec{\tilde{\mathbf{T}}} + \vec{\tilde{\mathbf{T}}}',$$

а по третьему закону Ньютона $\vec{\tilde{\mathbf{T}}} = -\vec{\mathbf{T}}$, $\vec{\tilde{\mathbf{T}}}' = -\vec{\mathbf{T}}'$. Так как масса блока равна нулю и отсутствует трение:

$$\vec{\mathbf{T}}_1' = \vec{\mathbf{T}}_2'.$$

Таким образом, силу натяжения нити везде можно считать одинаковой по величине:

$$T_1 = T_1' = T_2' = T_2 = T.$$

Далее запишем уравнения движения тел в проекциях на вертикальные оси. Удобно выбрать направление оси для левого тела вверх, для правого – вниз (можно и по-другому, результат будет тот же):

$$\begin{cases} Ma = T - Mg\,, \\ Ma = Mg - T + f\,, \\ ma = mg - f\,. \end{cases}$$

Теперь в системе трех уравнений три неизвестных: a, T и f. Решая эту систему, получим:

$$a = \frac{m}{2M + m} g \approx 0.89 \text{ м/с}^2,$$

$$T = \frac{2M(M + m)}{2M + m} g \approx 53 \text{ Н},$$

$$f = \frac{2Mm}{2M + m} g \approx 0.91 \text{ кг} \cdot g \approx 8.9 \text{ Н}.$$

Обратите внимание на то, что вес перегрузка в процессе движения, равный силе f по определению веса тела, меньше силы тяжести (0.91 < 1).

Осталось найти показания весов, к которым подвешен блок. Так как ось его неподвижна (к тому же он невесом), второй закон Ньютона для блока сводится к равенству нулю суммы всех действующих на него сил:

$$\vec{\mathbf{G}}' + \vec{\mathbf{T}}'_1 + \vec{\mathbf{T}}'_2 = 0,$$

то есть $G' = 2T$. Наконец, сила $\vec{\mathbf{G}}$, действующая на подвес, равная весу системы по определению веса:

$$\vec{\mathbf{G}} = -\vec{\mathbf{G}}'.$$

Чтобы это доказать, надо, как и для нити, рассмотреть участок системы от блока до пружины и использовать неподвижность этого участка. Поэтому показание пружинных весов, равное весу системы,

$$G = 2T = \frac{4M\,(M + m)}{2M + m} g \approx 1.1 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Обратите внимание на то, что вес системы отнюдь не равняется массе системы, умноженной на ускорение свободного падения:

$$G \neq (2M + m)g > G.$$

Задача 2.

Груз массой 400 г, прикрепленный нитью к подвесу, совершает круговые движения в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью (рисунок 1.2.2). Определите скорость груза и период его вращения. Длина нити равна *l=1 м*, а угол α, образуемый нитью с вертикалью, равен *30°*.

Решение:

На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{\mathbf{T}}$. Напишем уравнение движения груза:

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{T}} + m\vec{\mathbf{g}},$$

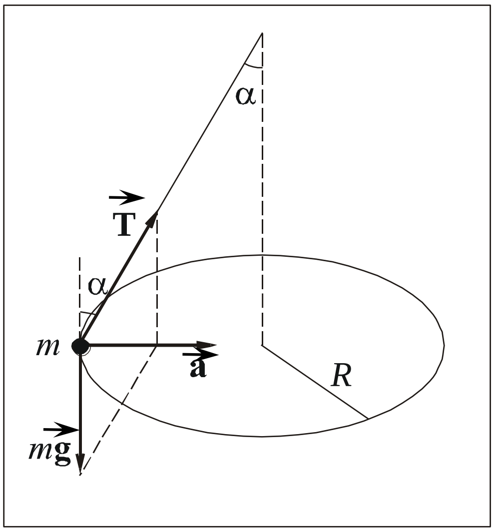

Рисунок 1.2.2. Силы, действующие на груз

Так как груз совершает равномерное движение по окружности, векторная сумма действующих на него сил $\vec{\mathbf{T}} + m\vec{\mathbf{g}}$ направлена в центр этой окружности и равна массе груза *m*, умноженной на его ускорение $\vec{\mathbf{a}}$, равное центростремительному (1.2.14):

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\text{цс}}.$$

Спроецируем уравнение движения на координатные оси. Проекция суммы сил на вертикальную ось равна нулю (проекция $\vec{\mathbf{a}}_{\text{цс}}$ на эту ось равна нулю):

$$0 = T\cos\alpha - mg,\ T = mg/\cos\alpha.$$

Проекция уравнения движения на горизонтальную ось:

$ma_{\text{цс}} = T\sin\alpha.$

Используя выражение (1.1.20) $a = \omega^2 R$ и только что найденной силы натяжения нити, получим величину угловой скорости кругового движения:

$$\omega = \sqrt{g\,\mathrm{tg}\alpha / R}.$$

Из рисунка (1.2.2) запишем связь радиуса окружности R с длиной нити l: $R = l\sin\alpha$. В результате находим угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}\,;$$

и период вращения:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} \approx 1.9 \text{ с}.$$

Чтобы определить скорость v, используем выражение (1.1.18), связывающее вектора скорости и угловой скорости:

$\mathrm{v} = \omega R$, v=1,7*м/с*.

<u>Задачи для самостоятельной работы</u>

1.2.01. Координаты частицы массой *m=2 кг* изменяются со временем по закону: $x(t)=A+Bt^2$, $y(t)=Ct^2$, где A= 1м, B= 0.5 м/с^2, C=2*м/с*^{2}. Определите силу, действующую на частицу, и ее тангенциальное ускорение в момент времени 3*с*.

1.2.02. В шахту равноускоренно опускается лифт, масса которого 300 кг. В первые 5 с своего движения он проходит расстояние 30 м. Определите силу натяжения каната, к которому подвешен лифт.

1.2.03. По горизонтальной дороге грузовик на канате везет неисправный автомобиль. При равномерном движении натяжение каната равно 120 Н. Определите натяжение каната Т при движении с ускорением a=0,5 *м/с*^{2}. Масса автомобиля 3000 кг.

1.2.04. Камень массой $m=0,2кг$, привязанный к шнуру длиной $L=0,5м$, вращают с угловой скоростью $\omega=6рад/с$ в вертикальной плоскости. Найти силу натяжения нити в верхней и нижней точках траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g=10м/с^2$.

1.2.05. Тело лежит на краю круглой горизонтальной платформы радиусом 1 м. Определите, с какой максимальной частотой может вращаться платформа вокруг вертикальной оси, чтобы тело не соскользнуло, если коэффициент трения равен 0,2 ?

1.2.06. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, под действием горизонтально направленной силы F=at, где a – положительная константа. Коэффициент трения скольжения равен μ. Запишите закон движения тела во времени. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g=10м/с^2$.

1.2.07. Через невесомый блок, укрепленной на ребре призмы, грани которой образуют углы $\alpha=30$ и $\beta=60$ с горизонтом, перекинута нить. К концам нити прикреплены грузы $m_1=1кг$ и $m_2=5кг$, соответственно. Найти ускорение грузов и силу натяжения нити. Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g=10м/с^2$.

1.2.08. На верхнем крае наклонной плоскости укреплён блок, через который перекинута нить. К одному концу нити привязан груз массой m_1, лежащий на наклонной плоскости. На другом конце нити висит груз массой m_2. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α; коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью μ. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Вначале оба тела неподвижны. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g=10м/с^2$. Найти отношение m_1/m_2, при котором груз m_1 начнёт: а) опускаться, б) подниматься.

1.2.09. Средняя высота спутника над поверхностью Земли – 1700 км. Определите его скорость и период обращения. Радиус Земли 6400 км.

1.2.10. Стальной шарик радиусом 0,5 *мм* падает в сосуд, наполненный глицерином. Сила сопротивления, испытываемая шариком равна: $F_c = k$v. Скорость установившегося (равномерного) движения шарика 2*м/с*. Определите коэффициент сопротивления k. Плотность глицерина 1260 *кг/м*^{3}, плотность стали 7800 *кг/м*^{3}.

1.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Теоретический минимум

Из второго закона Ньютона (1.2.3), (1.2.5) прямо следует, что импульс тела сохраняется, если сумма сил, действующих на тело, равна нулю:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{p}} = \overline{\text{const}}.$$

Импульсом системы тел называется векторная сумма импульсов $\vec{\mathbf{p}}_i$ тел, составляющих систему:

$$\vec{\mathbf{p}} = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i . \tag{1.3.1}$$

Этот импульс можно представить произведением суммарной массы системы $m = \sum_i m_i$ на некоторую скорость $\vec{\mathbf{v}}_\text{C}$, называемую скоростью центра масс:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_\text{C}, \quad \vec{\mathbf{v}}_\text{C} = \frac{\sum m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{\sum m_i}. \tag{1.3.2}$$

Таким образом, импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость её центра. Центр масс – это точка, представляющая систему тел как целое. Радиус вектор центра масс $\vec{\mathbf{r}}_\text{C}$ определяется как

$$\vec{\boldsymbol{r}}_c = \frac{\sum m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i}{\sum m_i}, \vec{\mathbf{v}}_c = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}_c}{dt}. \tag{1.3.3}$$

Второй закон Ньютона для системы тел получается суммированием уравнений движения для каждого из тел $\dot{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i$:

$$\dot{\vec{\mathbf{p}}} = \sum_i \dot{\vec{\mathbf{p}}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i .$$

Силы в правой части можно разделить на внутренние и внешние:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \overleftarrow{\mathbf{F}}_\text{внут} + \sum \vec{\mathbf{F}}_\text{внеш} .$$

Силы взаимодействия между телами внутри системы называют внутренними силами, а силы, действующие на систему со стороны тел, не входящих в состав рассматриваемой системы – внешними силами. Согласно третьему закону

Ньютона, результирующая всех внутренних сил равна нулю, $\sum\vec{\mathbf{F}}_{\text{внут}}=0$. Поэтому в уравнении движения системы тел остаются только внешние силы:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}=\sum\vec{\mathbf{F}}_{\text{внеш}}. \qquad (1.3.4)$$

Таким образом, скорость изменения импульса системы тел равна равнодействующей всех внешних сил, действующих на эту систему. Это уравнение называют основным уравнением динамики поступательного движения системы тел. Из (1.3.4) можно записать основное уравнение динамики поступательного движения системы тел в виде:

$$m\overrightarrow{\boldsymbol{a}_c}=\vec{\boldsymbol{F}},$$

где a_c – ускорение центра масс. Получается, что центр механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и на которую действует сила, равная вектору равнодействующей внешних сил, приложенных к системе. Последнее уравнение можно рассматривать как второй закон Ньютона для твердого тела конечных размеров, т.е. второй закон Ньютона определяет ускорение только одной точки тела – центра масс.

Системы, на которые не действуют внешние силы $\left(\vec{\mathbf{F}}_{\text{внеш}}=0\right)$, называются изолированными. Согласно уравнению движения (1.3.4), импульс изолированных систем сохраняется:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{внеш}}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\mathbf{p}}=\overline{\text{const}}.$$

Для сохранения импульса достаточно, чтобы сумма внешних сил равнялась нулю:

$$\sum\vec{\mathbf{F}}_{\text{внеш}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{\mathbf{p}}=\overline{\text{const}}. \qquad (1.3.5)$$

Такие системы называются замкнутыми. Это и есть закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы не изменяется во времени. Сохранение импульса означает, что центр масс системы тел движется равномерно прямолинейно:

$$\vec{\boldsymbol{p}}=m\,\vec{\mathbf{v}}_c=const, \qquad \vec{\mathbf{v}}_c=const. \qquad (1.3.6)$$

Для сохранения проекции импульса на какую-либо ось надо, чтобы проекция суммы внешних сил на эту ось равнялась нулю:

$$\frac{dp_x}{dt} = \left(\sum F_{\text{внеш}}\right)_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_x = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad (\text{v}_\text{c})_x = \text{const}. \qquad (1.3.7)$$

Закон сохранения импульса является одним из фундаментальных законов природы.

Примеры решения задач

Задача 1.

Лодка неподвижно стоит в озере. На корме и на носу лодки на расстоянии $l=5м$ друг от друга сидят рыболовы. Масса лодки $M=50$ *кг*, массы рыболовов $m_1=60$ *кг* и $m_2=90$ *кг*. Рыболовы меняются местами. На какое расстояние S переместится лодка относительно дна озера? Сопротивлением воды пренебречь.

Решение:

Решение этой задачи дает закон сохранения импульса (1.3.5) – (1.3.6). На систему тел «рыбаки – лодка» действуют внешние вертикальные силы тяжести и реакции опоры (воды), проекция которых на горизонтальное направление равна нулю. Поэтому в соответствии с (1.3.7) сохраняется горизонтальная проекция импульса системы, которая равна нулю, так как вначале лодка стояла в воде неподвижно. Это означает по (1.3.7), что равна нулю и горизонтальная проекция скорости центра масс системы: как бы не передвигались рыбаки по лодке, центр масс системы не сдвинется относительно дна озера в горизонтальном направлении. Положение центра масс системы трех тел определяется формулой (1.3.3):

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + M\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + M},$$

или в проекции на произвольную ось x:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + M x_3}{m_1 + m_2 + M},$$

где $\vec{\mathbf{r}}_c$, x_c – радиус-вектор и координата центра масс системы. В нашей задаче m_1, m_2, $\vec{\mathbf{r}}_1$, $\vec{\mathbf{r}}_2$, x_1, x_2 – массы, радиус-векторы и координаты рыбаков, M – масса лодки, $\vec{\mathbf{r}}_3$ и x_3 – радиус-вектор и координата её центра масс.

Выберем ось x горизонтальной с началом в месте расположения, скажем, первого рыболова до его перемещения (рисунок 1.3.1). Учитывая, что $x_1 = 0$, получаем:

$$x_c = \frac{m_2 l + ML}{m_1 + m_2 + \tilde{m}},$$

где $x_2 = l$ – расстояние между рыбаками, $x_3 = L$ – расстояние от первого рыбака до центра масс лодки (рисунок 1.3.1). Последнее расстояние в условии задачи не задавалось и должно исчезнуть в конечной расчетной формуле.

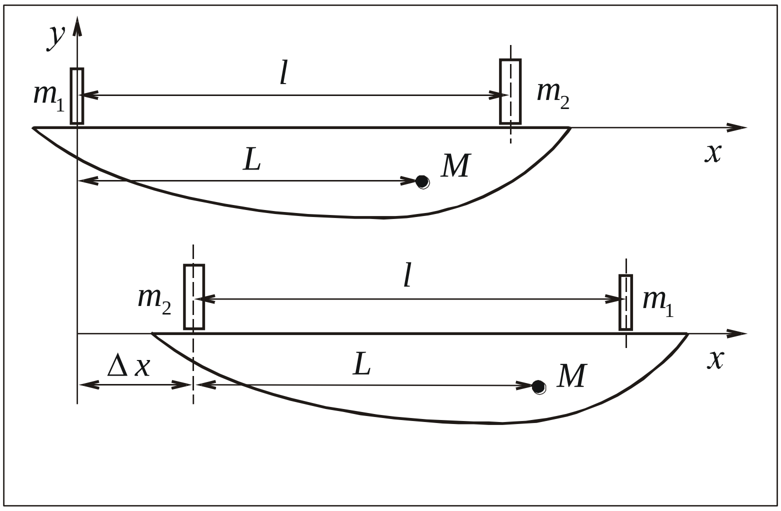

Рисунок 1.3.1. Положение тел до и после перемещения при условии $m_2 > m_1$

Теперь рыбаки поменялись местами, лодка передвинулась на Δx, а центр масс системы остался на прежнем месте:

$$x_c = \frac{m_1 (l + \Delta x) + m_2 \Delta x + M (L + \Delta x)}{m_1 + m_2 + M},$$

то есть

$$m_2 l + ML = m_1(l+\Delta x) + m_2\Delta x + M(L+\Delta x),$$

откуда

$$\Delta x = \frac{(m_2 - m_1)l}{m_1 + m_2 + M}.$$

Если $m_2 > m_1$, то $\Delta x > 0$ и лодка передвигается вправо (как на рисунке 1.3.1), если $m_2 < m_1$, то $\Delta x < 0$ и лодка передвигается влево на такое же расстояние $S = |\Delta x|$. В нашей задаче $S = 0.75$ м.

Задача 2.

Снаряд, летящий со скоростью u=12 м/с, разорвался на два осколка, массы которых m_1=2 кг и m_2=8 кг. Скорость первого осколка 8 м/с и направлена под углом α_1=45° к первоначальной скорости снаряда. Найдите величину скорости второго осколка v_2 и ее направление α_2 (рисунок 1.3.2).

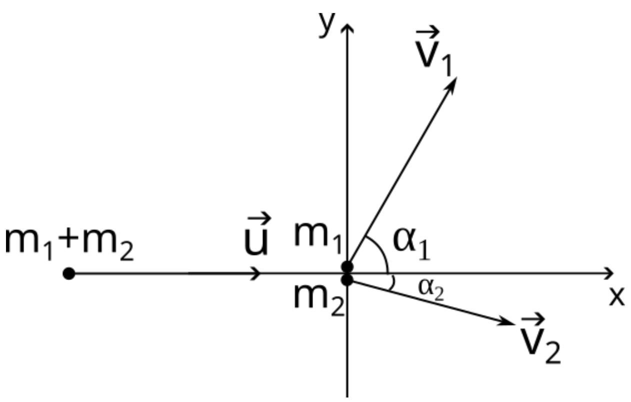

Рисунок 1.3.2. Направление векторов скоростей тел в системе до и после разрыва снаряда

Решение:

Запишем закон сохранения импульса для системы (1.3.5) до взрыва снаряда и после:

$$(m_1 + m_2)\vec{\boldsymbol{u}} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2.$$

Введем систему координат, ось x направим по направлению движения снаряда, ось y – перпендикулярно и запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси x и y соответственно:

$$(m_1 + m_2)u = m_1 v_1 cos\alpha_1 + m_2 v_2 cos\alpha_2 ,$$

$$0 = m_1 v_1 sin\alpha_1 - m_2 v_2 sin\alpha_2 .$$

Из второго уравнения выразим

$sin\alpha_2 = \frac{m_1 v_1 sin\alpha_1}{m_2 v_2}$, а значит $cos\alpha_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}\right)^2 sin^2\alpha_1}$.

Подставив выражение для $cos\alpha_2$ в первое уравнение, получим:

$$(m_1 + m_2)u - m_1 v_1 cos\alpha_1 = \sqrt{(m_2 v_2)^2 - (m_1 v_1)^2 sin^2\alpha_1} .$$

После преобразований выразим скорость второго тела v_2:

$$v_2 = \frac{1}{m_2}\sqrt{(m_1 + m_2)^2 u^2 + {m_1}^2 {v_1}^2 - 2m_1(m_1 + m_2)u v_1 cos\alpha_1},$$

v_2=14*м/с*.

Определим значение угла $\alpha_2 \approx 11°$.

<u>Задачи для самостоятельной работы</u>

1.3.01. Определите положение центра масс системы, состоящей из четырех шаров, массы которых равны соответственно m, 2m, 3m и 4m, если шары расположены по вершинам квадрата. Расстояние между соседними шарами равно 10 см.

1302. На систему точек массами m1=1кг, m2=4 кг и m3= 5 кг действуют две противонаправленные силы F1= 6 Н, F2= 10 Н. Определите модуль ускорения центра масс системы.

1.3.03. Два тела с массами 1 кг и 2 кг движутся равномерно во взаимно перпендикулярных направлениях. Скорость первого тела 3 м/с, а второго 2 м/с. Определите импульс данной системы тел.

1.3.04. Граната, брошенная с поверхности Земли со скоростью V_0 под углом 30° к горизонту, в верхней точке траектории разорвалась на три одинаковых осколка. Первый осколок полетел в обратном направлении горизонтально, а второй – вертикально вниз. Определить модуль и направление скорости третьего осколка, если скорости первых двух осколков одинаковы и равны половине начальной скорости гранаты.

1.3.05. Шар, имеющий импульс $4Н \cdot с$, налетает на другой такой же, неподвижный шар и после удара движется в направлении, перпендикулярном к первоначальному, имея импульс $3Н \cdot с$. Определите импульс второго шара после удара.

1.3.06. Мяч массой 300 *г* подлетает к стенке под углом 30° к ее поверхности со скоростью 10 *м/с* и упруго отскакивает. Средняя сила, действующая на мяч со стороны стенки 20 *Н*. Определите время продолжительности удара.

1.3.07. Снаряд массой 100 *кг*, летящий вдоль железнодорожного пути под углом 30° к горизонту со скоростью с 300 *м/с*, попадает в вагон с песком, движущийся навстречу со скоростью 40 *км/ч*, и застревает в нем. Определите скорость вагона после попадания снаряда, если его масса 5 тонн.

1.3.08. В лодке массой 240 *кг*, которая плывет со скоростью 1*м/с*, стоит человек массой 60 *кг*. Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью 4 *м/с* относительно лодки. Определите скорость лодки после прыжка, если он прыгнул: 1) по движению лодки; 2) противоположно движению лодки.

1.3.09. На полу стоит тележка массой $m=30кг$ и длиной $L=2м$. На одном конце тележки стоит человек массой $M=60кг$. На какое расстояние передвинется тележка, если человек перейдет на другой ее конец? Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g=10м/с^2$.

1.3.10. Платформа массой 100 кг движется со скоростью 2 *м/с*. На платформе стоит человек массой 60 *кг*. С какой скоростью относительно платформы должен бежать по ней человек в направлении движения, чтобы скорость платформы уменьшилась в два раза.

1.4. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. МОЩНОСТЬ

Теоретический минимум

Работа силы $\vec{\mathbf{F}}$, действующей на частицу, совершенная при перемещении $d\vec{\mathbf{r}}$ этой частицы, равна скалярному произведению вектора силы на перемещение:

$$\delta A = \left(\vec{\mathbf{F}}\, d\vec{\mathbf{r}}\right) = F\cos\alpha\, dS, \tag{1.4.1}$$

где α – угол между силой и перемещением. Работой силы $\vec{\mathbf{F}}$ при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 называется определенный интеграл

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 F cos\alpha\, dS, \tag{1.4.2}$$

взятый вдоль траектории частицы. Если сила постоянна по величине ($F = \mathrm{const}$) и угол между силой и перемещением при движении частицы остается неизменным ($\alpha = \mathrm{const}$), интегрирование в (1.4.2) приводит к простой формуле:

$$A = FS\cos\alpha.$$

Пусть частица движется по траектории, представляющей собой замкнутую кривую, и возвращается в исходную точку. Потенциальными называются силы, работа которых по такому замкнутому контуру С равна нулю:

$$\oint_C \vec{\boldsymbol{F}}\, d\,\vec{\boldsymbol{r}} = 0. \tag{1.4.3}$$

В этом случае имеет смысл понятие потенциальной энергии U:

$$dU = -\vec{\boldsymbol{F}} d\vec{\boldsymbol{r}},\ U = \int_C \vec{\boldsymbol{F}} d\vec{\boldsymbol{r}},\ \vec{\boldsymbol{F}} = -\frac{dU}{d\vec{\boldsymbol{r}}}. \tag{1.4.4}$$

Действительно, работа таких (1.4.4) сил по замкнутому контуру автоматически получается равной нулю:

$$-\oint_C \vec{\boldsymbol{F}}\, d\,\vec{\boldsymbol{r}} = \oint_C dU = U_1 - U_1 = 0.$$

Работа потенциальных сил зависит только от начального и конечного положения тела и не зависит от пути и от формы траектории:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -\int_1^2 dU = U_1 - U_2 = -\Delta U\,, \qquad (1.4.5)$$

работа потенциальной силы равна изменению потенциальной энергии (с обратным знаком).

Приведем три примера потенциальных сил и потенциальных энергий.
1) Сила Гука и потенциальная энергия деформированной пружины:

$$F_x = -kx, \qquad U = -\int F_x\, dx = \frac{kx^2}{2}.$$

2) Сила гравитации и потенциальная энергия гравитационного притяжения:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{\mathbf{r}}, \qquad U = -\int \vec{\mathbf{F}}\, d\vec{\mathbf{r}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

3) Сила тяжести и потенциальная энергия тела (если считать силу тяжести постоянной):

$F = mg$, $U = Fh = mgh$,

где h – высота подъема тела.

Сила трения не является потенциальной. Для нее нельзя указать потенциальной энергии, так как работа силы трения по замкнутому контуру не равна нулю и зависит от пройденного телом пути.

Подставим в определение работы (1.4.2) сумму сил, действующих на тело: как потенциальных, так и непотенциальных. Эта сумма, согласно второму закону Ньютона (1.2.5), равна произведению массы тела на его ускорение:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{\mathbf{F}}\, d\vec{\mathbf{r}} = \int_1^2 m\vec{\mathbf{a}}\, d\vec{\mathbf{r}}.$$

Проведем преобразования с использованием определений ускорения (1.1.6) и скорости (1.1.2)

$$\vec{\mathbf{a}}\, d\vec{\mathbf{r}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} d\vec{\mathbf{r}} = d\vec{\mathbf{v}} \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}\, d\vec{\mathbf{v}}$$

чтобы взять интеграл для A_{12}:

$$A_{12} = \int_1^2 m\text{v}\,d\text{v} = \frac{m\text{v}_2^2}{2} - \frac{m\text{v}_1^2}{2} = K_2 - K_1. \quad (1.4.6)$$

Величина:

$$K = \frac{m\text{v}^2}{2} \quad (1.4.7)$$

называется кинетической энергией тела. Следовательно, работа любых сил равна изменению кинетической энергии.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (1.4.8)$$

Используя определение работы $\delta A = \left(\vec{\mathbf{F}}\,d\vec{\mathbf{r}}\right) = \left(\vec{\mathbf{F}}\vec{\mathbf{v}}\right)dt$, получаем для мощности выражение:

$$N = \left(\vec{\mathbf{F}}\vec{\mathbf{v}}\right),$$

согласно которому мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы.

Единица работы совпадает с единицей энергии по (1.4.5), (1.4.6) и в системе СИ называется «Джоуль» (Дж):

$[A] = [F][r] =$ Н·м $= [E] = [U] = [K] = [m][\text{v}]^2 =$ *кг·м²/с² = Дж*.

Единица мощности в системе СИ называется “Ватт” (*Вт*):

$[N] =$ *Дж/с = Вт*.

Примеры решения задач

Задача 1.

Пружина жесткостью *k=500 Н/м* сжата силой *F=100 Н*. Определить работу внешней силы А, дополнительно сжимающей пружину еще на *Δx=2 см*.

Решение:

Работа, совершаемая внешней силой при сжатии пружины определяется формулой (1.4.5):

$$A = -\int_0^x F dx, \tag{1.4.9}$$

где x – сжатие пружины. Сила F пропорциональна сжатию пружины, т.е.

$$F=-kx. \tag{1.4.10}$$

Подставляя (1.4.10) в (1.4.9), мы можем найти работу, совершенную внешней силой, но в нашем случае пружина была дополнительно сжата еще на Δx. В этом случае работа дополнительной внешней силы будет определятся формулой:

$$A = -\int_x^{x+\Delta x} F dx \tag{1.4.11}$$

Подставляя (1.4.10) в (1.4.11), получим:

$$A = -\int_x^{x+\Delta x} kxdx = \frac{kx^2}{2}\bigg|_x^{x+\Delta x} = \frac{k}{2}(2x+\Delta x)\Delta, \tag{1.4.12}$$

где x находим из (1.4.10): $x=\frac{F}{k}$. (1.4.13)

Подставляя (1.4.13) в (1.4.12), получим:

$$A = \frac{k}{2}\left(2\frac{F}{k} + \Delta x\right)\Delta x = 2.1\text{Дж}.$$

Задача 2.

Однородный стержень длиной l=10 см скользит по гладкой горизонтальной поверхности параллельно своей длине и наезжает на границу, отделяющую гладкую поверхность от шероховатой, коэффициент трения о которую равен μ =0,2. Линия границы расположена перпендикулярно скорости стержня. Определите начальную скорость стержня, если он остановился в тот момент, когда наполовину пересек границу. Примите g = 10 м/с^2.

Решение:

Рассмотрим промежуточное положение, при котором часть стержня длиной x уже находится на шероховатой поверхности. Поскольку сила реакции опоры, действующая на эту часть стержня равна $N = mg$, то сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m' g$, где $m' = m\frac{x}{l}$– масса части стержня, находящаяся на шероховатой поверхности в некоторый момент времени. Следовательно,

$$F_{\text{тр}}(x) = \mu mg(\frac{x}{l}).$$

Как видим, сила трения меняется в зависимости от пройденного стержнем пути x по линейному закону, поэтому работу можно вычислить по формуле

$$A_{\text{тр}} = -< F_{\text{тр}} > x = \frac{1}{2}\mu mg\left(\frac{l/2}{l}\right)\frac{l}{2} = -\frac{\mu mgl}{8}.$$

Применяя теорему о кинетической энергии, запишем

$$A_{\text{тр}} = 0 - \frac{m\text{v}_0^2}{2},$$

И выразим начальную скорость

$$\text{v}_0 = \frac{\sqrt{\mu gl}}{2}, \text{v}_0 = 22\text{см/с}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1.4.01. Материальная точка массой m=2кг движется под действием некоторой силы, направленной вдоль оси x согласно уравнению $x=A+Bt+Ct^2$, где $B=–2м/с$, $C=1м/с^2$. Найти мощность N, развиваемую силой в момент времени $t=5с$.

1.4.02. Считая известными радиус Земли R и ускорение свободного падения на поверхности g, определите работу, совершаемую силой тяжести при перемещении тела массы m с высоты 2R на высоту R относительно поверхности Земли.

1.4.03. Определите работу А, которую совершила сила тяги, при подъеме вагонетки массой 200 кг в гору на высоту 50м. Наклон подъема к горизонту составляет 30°, коэффициент трения μ=0,2 и груз движется с ускорением а=1м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять g=10м/с^2.

1.4.04. Вычислить работу A, совершаемую на пути $20м$ равномерно возрастающей силой, если в начале пути сила $F_1=10Н$, в конце пути $F_2=46Н$.

1.4.05. Тело массой m=*1кг*, брошенное под углом к горизонту с начальной скоростью v=*6м/с*, упало на землю со скоростью u=*7м/с*. Определить работу *А* сил сопротивления воздуха. Принять g=*10м/с*^{2}.

1.4.06. Тело брошено с некоторой высоты горизонтально со скоростью 6 м/с. Через сколько секунд кинетическая энергия тела возрастет вдвое? g = 10 м/с^2.

1.4.07. Грузовики, мощность двигателей которых N_1=*400кВт* и N_2=*500кВт*, движутся со скоростями v_1=*20м/с* и v_2=*25м/с*. Какова будет максимальная скорость грузовиков, если их соединить нерастяжимым тросом?

1.4.08. При взлете самолет должен разогнаться до скорости 108 *км/ч* за 10 *с*. Масса самолета равна 2 тонны, коэффициент трения равен 0.05. Определите среднюю мощность двигателя самолета, необходимую при разгоне.

1.4.09. Брусок массой m и длиной *l* лежит на стыке двух горизонтальных столов. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы перетащить тело волоком с первого стола на второй, если коэффициенты трения между телом и столами соответственно равны μ_1 и μ_2. Сила к бруску прикладывается горизонтально.

1.4.10. Пуля, летящая горизонтально со скоростью 600 *м/с*, попадает в доску толщиной 6*см* и вылетает со скоростью 480 *м/с*. Определите среднюю силу сопротивления доски. Масса пули 10 *г*.

1.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. СТОЛКНОВЕНИЯ ТЕЛ

Теоретический минимум

Если действуют только потенциальные силы (1.4.4), то полная энергия тела, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, сохраняется:

$$\int_1^2 \vec{\mathbf{F}}\, d\vec{\mathbf{r}} = U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \quad \Leftrightarrow \quad E = K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = \text{const}. \qquad (1.5.1)$$

Полная механическая энергия системы тел, на которые действуют только потенциальные силы, тоже остается постоянной. Такие системы называются консервативными.

Задача о столкновении тел является типичным примером использования законов сохранения импульса и энергии. Различают два предельных вида столкновений: абсолютно упругие и абсолютно неупругие.

После абсолютно неупругого столкновения тела движутся вместе. В результате изменения внутреннего состояния тел, которое сопровождается их нагреванием, механическая энергия системы не сохраняется, а сохраняется только импульс. Для двух тел, образующих замкнутую систему:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{u}},$$

где $\vec{\mathbf{v}}_1$ и $\vec{\mathbf{v}}_2$ – скорости тел до удара, $\vec{\mathbf{u}}$ – их общая скорость после удара, которая находится сразу:

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2}{m_1 + m_2}.$$

Неудивительно, что эта скорость оказалась равной скорости центра масс (1.3.3) до удара:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}_c \;,$$

действительно, согласно закону сохранения импульса (1.3.6), скорость центра масс не меняется в результате удара.

Абсолютно упругим называется столкновение, при котором сохраняется и импульс, и механическая энергия. Для замкнутой системы двух тел:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_1+m_2\vec{\mathbf{v}}_2=m_1\vec{\mathbf{u}}_1+m_2\vec{\mathbf{u}}_2,$$

$$\frac{m_1\mathrm{v}_1^2}{2}+\frac{m_2\mathrm{v}_2^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2},$$

где $\vec{\mathbf{v}}_1$ и $\vec{\mathbf{v}}_2$ – скорости тел до удара, $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$ – скорости этих тел после удара.

Результат упругого столкновения зависит от того, как налетают тела друг на друга. Наиболее простым является центральный удар, при котором тела до удара движутся вдоль прямой, соединяющей их центры.

Примеры решения задач

Задача 1.

Два шара подвешены на нитях одинаковой длины *L=90 см* так, что они соприкасаются. Массы шаров $m_1=100$ *г* и $m_2=200$ *г*. Меньший шар отклоняют на угол $\alpha=90$ и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после центрального абсолютно упругого соударения?

Решение:

Эта задача решается с помощью законов сохранения энергии и импульса. На движущийся вниз первый шар действует потенциальная сила тяжести, и его энергия, равная сумме кинетической и потенциальной $E=K+U$, сохраняется. Сила натяжения нити перпендикулярна к скорости шара и работы не совершает; трение не учитываем. Вверху равна нулю кинетическая энергия. Внизу, на подлете ко второму шару, равна нулю его потенциальная энергия. Таким образом, потенциальная энергия переходит в кинетическую:

$$m_1gh=\frac{m_1\mathrm{v}_1^2}{2},$$

где h = L – длина нити, v_1 – скорость первого шара непосредственно перед ударом:

$$\mathrm{v}_1^2=2gL.$$

При абсолютно упругом ударе первого шара о второй сохраняется и импульс системы этих двух тел, и энергия:

$$\begin{cases} m_1 \mathrm{v}_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \dfrac{m_1 \mathrm{v}_1^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}, \end{cases}$$

где u_1 и u_2 – горизонтальные проекции скоростей шаров сразу после удара. Найдем эти скорости. Для этого перепишем систему законов сохранения в виде:

$$\begin{cases} m_1 \left(\mathrm{v}_1 - u_1\right) = m_2 u_2, \\ m_1 \left(\mathrm{v}_1^2 - u_1^2\right) = m_2 u_2^2. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, получим

$\mathrm{v}_1 + u_1 = u_2$.

Подставляя это равенство в закон сохранения импульса, получаем скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathrm{v}_1, \qquad u_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \mathrm{v}_1.$$

При $m_1 = m_2$ первый шар останавливается ($u_1 = 0$), а скорость второго после удара равна скорости первого до удара ($u_2 = \mathrm{v}_1$). Так как в нашей задаче $m_1 < m_2$, то $u_1 < 0$, то есть первый (меньший) шар отскакивает назад.

Высоту, на которую поднимется шар после удара, найдем опять из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} = m_1 g h_1, \qquad \frac{m_2 u_2^2}{2} = m_2 g h_2,$$

где h_1 и h_2 – высоты подъемов первого и второго шара. Подставляя сюда найденные выражения для u_1, u_2 и v_1, получаем результат:

$$h_1 = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot 2gL = 0.1\text{м},$$

$$h_2 = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot 2gL = 0.4\text{м},$$

Ответ: $h_1 = 0{,}1$ *м*; $h_2 = 0{,}4$ *м*.

Задача 2.

Частица 1 испытала абсолютно упругое столкновение с покоившейся частицей 2. После соударения частицы разлетаются симметрично по отношению к первоначальному направлению движения частицы 1, при этом угол между их направлением разлета равен θ=45°. Определите отношение масс частиц $k = m_1/m_2$.

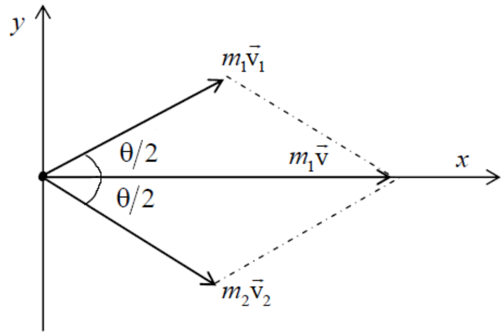

Рисунок 1.5.1. Направление векторов импульса тел
в результате их упругого соударения

Решение:

Удар абсолютно упругий, поэтому для данной системы выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения энергии:

$$m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Здесь $\vec{v}$ – скорость первой частицы до соударения, $\vec{v}_1$ – после соударения, $\vec{v}_2$ - скорость второй частицы (рисунок 1.5.1). Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси x и y, соответственно, и закон сохранения энергии:

$$m_1 v = m_1 v_1 cos\frac{\theta}{2} + m_2 v_2 cos\frac{\theta}{2}, \qquad m_1 v_1 sin\frac{\theta}{2} = m_2 v_2 sin\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Из второго уравнения следует $k = \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}$, тогда преобразуем два другие уравнения к виду:

$k\text{v} = 2\text{v}_2 cos\frac{\theta}{2}$,

$k\text{v}^2 = \text{v}_2^2(1 + 1/k)$.

Возведем первое из уравнений в квадрат и исключим v_2 и v:

$1 + k = 4cos^2\frac{\theta}{2}$.

Отсюда получаем:

$k = 4cos^2\frac{\theta}{2} - 1$, k=2.

<u>Задачи для самостоятельной работы</u>

1.5.01. Тело массой m_1 = 2 кг движется со скоростью 2 м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определите количество теплоты, выделившееся при ударе.

1.5.02. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров шар массой M покоится. В результате прямого удара шар массой m потерял 3/4 своей кинетической энергии K_1. Определить отношение k=M/m масс шаров.

1.5.03. Определить максимальную часть Q кинетической энергии K_1, которую может передать частица массой $m_1=2{\cdot}10^{-22}$ *г*, сталкиваясь упруго с частицей массой $m_2=6{\cdot}10^{-25}$*г*, которая до столкновения покоилась.

1.5.04. Шар, движущийся со скоростью 10 м/с, упруго соударяется с покоящимся шаром, масса которого в 5 раз больше, а затем отлетает в направлении перпендикулярном первоначальному направлению движения. Определите скорости обоих шаров после удара.

1.5.05. В неподвижный маятник массой M попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v. Определите, на какую высоту поднимется маятник и какая часть механической энергии летящей пули превратится в энергию маятника с пулей.

1.5.06. Шар сталкивается с другим покоящимся шаром т а к о й же массы. Докажите, что в случае упругого, но нецентрального удара угол между направлениями скоростей после удара составляет $\pi/2$.

1.5.07. Определите кинетическую и потенциальную энергии тела массой 300г, упавшего с высоты 50м, на высоте 30м от поверхности Земли. При движении на тело действует сила сопротивления 2Н.

1.5.08. Камень брошен вверх под углом $\varphi=60^{\circ}$ к плоскости горизонта. Кинетическая энергия K_0 камня в начальный момент времени равна *20 Дж*. Определить кинетическую K и потенциальную U энергии камня в высшей точке его траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.5.09. Небольшое тело скользит с вершины полусферы радиуса R = *30 см*. На какой высоте h от основания полусферы тело оторвется от ее поверхности?

1.5.10. Небольшое тело соскальзывает по наклонному скату, переходящему в «мертвую петлю» радиуса R , с высоты h=R относительно ее центра. На какой высоте относительно центра петли тело оторвется от ее поверхности? Трением пренебречь.

Часть 2

2.1. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Теоретический минимум

Момент инерции материальной точки равен:

$$I = mR^2, \tag{2.1.1}$$

где R – расстояние от оси вращения до материальной точки, m – ее масса.

Момент инерции системы материальных точек:

$$I = \sum_i m_i R_i^2 . \tag{2.1.2}$$

Для вычисления момента инерции протяженного тела суммирование в (2.1.2) следует заменить интегрированием:

$$I = \int R^2 dm. \tag{2.1.3}$$

Интеграл (2.1.3) – это и есть по своему смыслу сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых в (2.1.2), R – расстояние от оси вращения до массы dm. Например, все точки тонкого кольца (обруча, трубы) находятся на одинаковом расстоянии R от оси, проходящей через центр этого кольца перпендикулярно его плоскости. Поэтому момент инерции кольца (обруча, трубы) относительно такой оси равен:

$$I_{\text{c}} = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2 . \tag{2.1.4}$$

Выпишем результат интегрирования (2.1.3) для некоторых других однородных тел. Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс:

1) стержня длиной l, ось перпендикулярна стержню:

$$I_{\text{c}} = \frac{1}{12} ml^2 ; \tag{2.1.5}$$

2) диска (цилиндра) радиусом R, ось перпендикулярна плоскости основания:

$$I_{\text{c}} = \frac{1}{2} mR^2 ; \tag{2.1.6}$$

3) шара радиусом R:

$$I_{\text{c}} = \frac{2}{5} mR^2. \qquad (2.1.7)$$

Момент инерции относительно оси, не проходящей через центр масс, можно вычислить при помощи теоремы Штейнера:

$$I = I_0 + ma^2. \qquad (2.1.8)$$

Здесь I_0 – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, I – момент инерции относительно другой оси, параллельной первой, a – расстояние между этими осями, m – масса тела.

Момент инерции системы тел равен сумме моментов инерции тел, составляющих эту систему:

$$I = \sum_i I_i. \qquad (2.1.9)$$

Здесь индекс i нумерует тела системы.

В системе СИ: [I] = $[m][r]^2$ = кг·м^2.

Примеры решения задач

Задача 1.

Найти момент инерции однородного стержня массы m и длины L относительно оси: 1) перпендикулярной стержню и проходящей через его середину; 2) перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов.

Решение:

1) Момент инерции макроскопического тела складывается из моментов инерции материальных точек (2.1.9). В нашем случае момент инерции однородного стержня относительно оси *OO* можно рассчитать, зная момент инерции dI_0 элементарной массы dm, находящейся на расстоянии r от оси вращения *OO* (рисунок 2.1.1). Поскольку dm – элементарная масса, слоя толщиной dr, поперечным сечением S и плотностью $\rho=m/S\cdot L$, запишем ее момент инерции как

$dI=r^2\rho Sdr$.

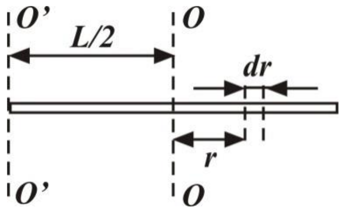

Рисунок 2.1.1. Определение момента инерции стержня

Интегрируя это выражение от 0 до $L/2$, найдем момент инерции половины стержня, т.е.

$$\frac{I_0}{2}=\int_0^{L/2} r^2\rho Sdr=\frac{\rho SL^3}{24}. \qquad (2.1.10)$$

Подставляя выражение для плотности $\rho=m/S\cdot L$ в (2.1.10), получаем искомую формулу для момента инерции однородного стержня относительно оси OO:

$$I_0=mL^2/12. \qquad (2.1.11)$$

2) Момент инерции I того же стержня относительно оси $O'O'$, проходящей через один из концов стержня, можно найти с помощью теоремы Штейнера $I = I_0 + ma^2$ (2.1.8).

В нашем случае $I_0=mL^2/12$ – момент инерции относительно оси OO, проходящей через центр инерции, а $a=L/2$ – расстояние между осями. Следовательно,

$$I=mL^2/12+mL^2/4=mL^2/3. \qquad (2.1.12)$$

Ответ: 1) $I_0=mL^2/12$; 2) $I=mL^2/3$.

Задача 2.

Найти момент инерции сплошного шара радиуса R и массы m.

Решение:

Выделим в шаре бесконечно тонкий диск толщины dz, радиуса r, перпендикулярный к оси вращения (рисунок 2.1.2). Масса диска равна $dm=\rho dV=\rho\,\pi r^2dz$. (1), плотность выразим через объем шара $\rho=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, а его радиус можно представить как $r^2 = R^2 - z^2$. Тогда момент инерции тонкого диска равен

$$dI = \frac{dmr^2}{2} = \frac{\rho\,\pi r^4 dz}{2} = \frac{\rho\,\pi}{2}(R^2 - z^2)^2 dz.$$

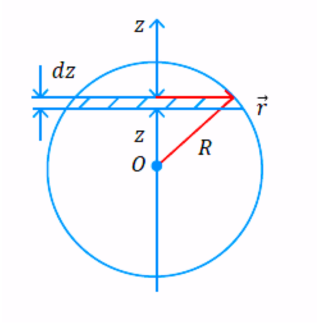

Рисунок 2.1.2. Определение момента инерции сплошного шара.

Чтобы определить момент инерции шара проинтегрируем по всем тонким дискам, образующим шар, т.е. от -R до R. Момент инерции шара равен:

$$I \;= \int dI \;= \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{R}(R^4 - 2R^2z^2 + z^4)\,dz = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}mR^2.$$

<u>Задачи</u>

2.1.01. На концах тонкого однородного стержня (длины L и массы $3m$) прикреплены шарики, массы которых m и $2m$ соответственно. Определить момент инерции такой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через шарик массы m.

2.1.02. Определите момент инерции тонкого однородного кольца радиуса *R=20см* и массы *m=1кг* относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр.

2.1.03. Определите момент инерции однородного диска радиуса *R=20см* и массы *m=1кг* относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр.

2.1.04. На концах тонкого однородного стержня длины L и массы $3m$ прикреплены шарики, массы которых m и $2m$ соответственно. Определить момент инерции такой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.

2.1.05. Тонкий однородный стержень длины l = 30 *см* согнут под прямым углом, (рисунок 2.1.3) и может вращаться относительно вертикальной оси O_1O_2. Определите момент инерции стержня относительно оси O_1O_2, если масса единицы длины стержня m = 1 *кг/м*.

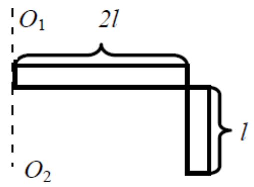

Рисунок 2.1.3. Пояснения к задаче 2.1.05.

2.1.06. На концах тонкого однородного стержня (длины L и массы $3m$) прикреплены шарики, массы которых m и $2m$ соответственно. Определить момент инерции такой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через шарик массы $2m$.

2.1.07. Найти момент инерции прямоугольного треугольника массой m = 6 *кг* относительно оси, совпадающей с одним из его катетов, если другой катет 60 *см*.

2.1.08. В однородном диске массой 1 кг и радиусом 20 см вырезано круглое отверстие диаметром 10 см, центр отверстия находится на расстоянии 15 см от центра диска. Найти момент инерции полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

2.1.09. Найти момент инерции прямоугольной пластины массы m со сторонами a и b, расположенной в плоскости xy, относительно оси x и оси y.

2.1.10. Найти момент инерции тонкой однородной пластины относительно оси, проходящей через одну из вершин пластины перпендикулярно к ее плоскости. Масса пластины m, стороны равны a и b.

2.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Теоретический минимум

Момент силы – это вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{\mathbf{r}}$ на вектор силы $\vec{\mathbf{F}}$:

$$\vec{\mathbf{M}} = \left[\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\right]. \tag{2.2.1}$$

Здесь радиус-вектор $\vec{r}$ проведен из точки, относительно которой определяется момент силы, в точку приложения силы (рисунок 2.2.1). Таким образом, вектор момента силы определяется относительно точки (а не оси). Величина (модуль) этого вектора:

$$M = rF\sin\alpha = lF, \tag{2.2.2}$$

где α – угол между векторами $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{F}}$, $l = r\sin\alpha$ – плечо силы, то есть длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, вдоль которой действует сила (рисунок 2.2.1). Моментом силы относительно оси называется проекция вектора момента силы на эту ось.

Моментом импульса частицы называется вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{\mathbf{r}}$, проведенного из точки, относительно которой определяется момент импульса, в точку, где расположена частица, на вектор импульса $\vec{\mathbf{p}}$ (рисунок 2.2.2):

$$\vec{\mathbf{L}} = \left[\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}\right]. \tag{2.2.3}$$

Модуль вектора:

$$L = rp\sin\alpha = lp, \tag{2.2.4}$$

где α – угол между векторами $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{p}}$, $l = r\sin\alpha$ – плечо импульса, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, вдоль которой направлен импульс тела. Моментом импульса относительно оси называется проекция вектора момента импульса на эту ось.

Например, момент импульса материальной точки, движущейся по окружности радиуса R относительно центра этой окружности, равен по величине:

$$L = Rm\mathrm{v} = mR^2\omega = I\omega. \qquad (2.2.5)$$

Здесь использована связь $\mathrm{v}=\omega R$. Величина $I=mR^2$ – момент инерции материальной точки. Вектор момента импульса в данном случае направлен перпендикулярно плоскости движения тела вдоль угловой скорости $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$ (рисунок 2.2.3).

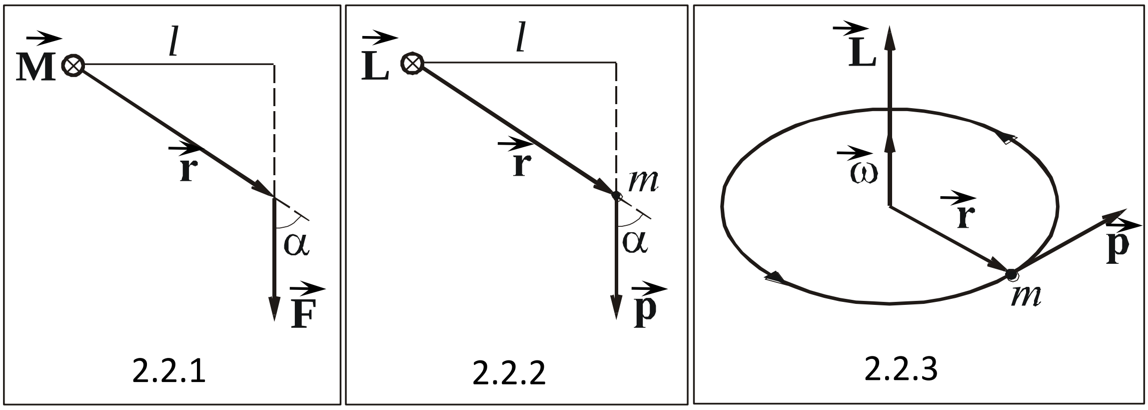

Рисунок 2.2.1. Момент силы **M** материальной точки относительно неподвижной точки.

Рисунок 2.2.2. Момента импульса **L** материальной точки относительно неподвижной точки.

Рисунок 2.2.3. Направление векторов импульса **p** и момента импульса **L** при движении материальной точки по окружности.

Производная от момента импульса по времени равна моменту силы:

$$\dot{\vec{\mathbf{L}}} = \left[\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{p}}\right] + \left[\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{p}}}\right] = \left[\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{p}}\right] + \left[\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\right] = \left[\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\right] = \vec{\mathbf{M}}. \qquad (2.2.6)$$

Здесь использованы определение скорости $\vec{\mathbf{v}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}$ (1.1.2), второй закон Ньютона $\dot{\vec{\mathbf{p}}} = \vec{\mathbf{F}}$ (1.2.4), а также то, что $[\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{p}}] = 0$. Полученное соотношение:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}, \qquad (2.2.7)$$

является вторым по счету (первое $\dot{\vec{\mathbf{p}}} = \vec{\mathbf{F}}$ – второй закон Ньютона (1.2.4)) уравнением движения. Его иногда называют уравнением вращательного движения в отличие от второго закона Ньютона (1.2.4), который в этом случае называют уравнением поступательного движения.

Если ось вращения закреплена, момент импульса относительно этой оси пропорционален величине угловой скорости. Совместим координатную ось z с осью вращения и запишем это утверждение в виде:

$$L_z = I\omega, \tag{2.2.8}$$

причем $\omega = \omega_z$ (ось закреплена), а $L = L_z$ (момент импульса в общем случае не параллелен угловой скорости (рисунок 2.2.4)).

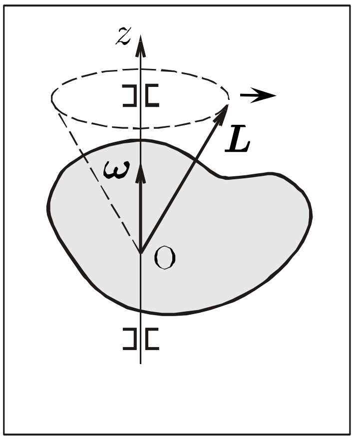

Рисунок 2.2.4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Используя уравнение вращательного движения (2.2.8), для твердого тела можно эквивалентно определить момент инерции как коэффициент пропорциональности между моментом силы относительно закрепленной оси M_z и угловым ускорением ε:

$$M_z = I\varepsilon, \tag{2.2.9}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \omega$ (ось закреплена).

Если же ось вращения не закреплена, связь между моментом импульса и угловой скоростью усложняется, и приходится обращаться к понятию тензора инерции I_{ik},

$$L_i = \sum_k I_{ik}\omega_k, \tag{2.2.10}$$

где $L_i = (L_x, L_y, L_z)$ – любая компонента момента импульса. В дальнейшем будем считать ось закрепленной.

Единицы импульса $\vec{\mathbf{p}}$, момента импульса $\vec{\mathbf{L}}$, момента силы $\vec{\mathbf{M}}$ и момента инерции I в системе СИ:

$[p] = [m][\mathrm{v}] = [F][t] = кг{\cdot}м/с$,

$[L] = [p][r] = [m][\mathrm{v}][r] = кг{\cdot}м^2/с$,

$[M] = [F][r] = Н{\cdot}м$,

$[\mathrm{I}] = [m][r]^2 = кг{\cdot}м^2$.

Обратите внимание, что размерность момента силы *Н·м* формально совпадает с размерностью работы *Дж* = *Н·м*. Это, действительно, формальное совпадение размерностей различных физических величин. Измерять моменты сил в Джоулях не принято.

Примеры решения задач

Задача 1.

Однородный диск радиусом R и массой m вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Зависимость угла поворота диска от времени описывается уравнением $\varphi = At + Bt^3$, где В - положительная постоянная. На диск действует сила трения, ее тормозящий момент равен $M_{тр}$. Определите, как изменяется во времени касательная сила F, приложенная к ободу диска, которая создает вращающий момент.

Решение:

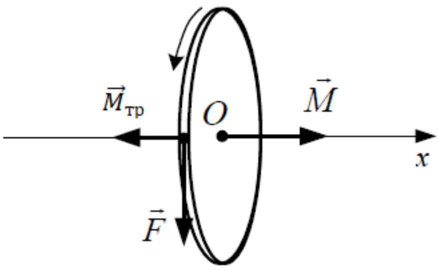

Рисунок 2.2.6. Направление момента силы $\vec{M}$ и момента силы трения $\vec{M}_{тр}$

Вращающий момент $\vec{M}$, который создает сила $\vec{F}$ (рисунок 2.2.6), в соответствии с правилом правого винта, направлен по оси x и равен произведению величины этой силы на ее плечо. Плечом силы F в данном случае является радиус диска, поэтому запишем

$$M = FR.$$

Вектор момента силы трения $\vec{\boldsymbol{M}}_{\text{тр}}$ направлен противоположно оси x. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения:

$$I\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = \vec{\boldsymbol{M}} + \vec{\boldsymbol{M}}_{\text{тр}}.$$

В проекциях на ось x этот закон примет вид

$$I\varepsilon = M - M_{\text{тр}}.$$

Момент инерции диска относительно оси вращения, проходящей через его центр, определяется выражением $I = mR^2/2$.

Угловое ускорение диска найдем как вторую производную функции угла поворота диска по времени:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 6Bt.$$

Подставив соотношения для M, I, ε в закон динамики вращательного движения, получим уравнение с одной неизвестной величиной – искомой силой F:

$$\frac{mR^2}{2} \cdot 6Bt = FR - M_{\text{тр}}.$$

Откуда получаем выражение для F как функцию от времени:

$$F(t) = 3mR \cdot Bt + \frac{M_{\text{тр}}}{R}.$$

Задача 2.

На однородный цилиндр намотана гибкая нерастяжимая лента длиной *l=1 м*, масса которой много меньше массы цилиндра m. Свободный конец ленты закрепили, а цилиндр отпустили. Найти время разматывания ленты t.

Решение:

Решим эту задачу двумя способами.

Способ 1

Цилиндр совершает вращательное движение относительно оси, проходящей через его центр масс (точка С на рисунке 2.2.5) и поступательное движение цилиндра со скоростью точки С.

Уравнением поступательного движения является второй закон Ньютона. Запишем его в проекции на ось, направленную вертикально вниз:

$$ma_{\text{c}} = mg - T. \qquad (2.2.11)$$

Уравнение вращательного движения (2.2.9):

$$M_{\text{c}} = I_{\text{c}}\varepsilon$$

Здесь ε угловое ускорение цилиндра, $I_{\text{c}} = mR^2/2$ – его момент инерции

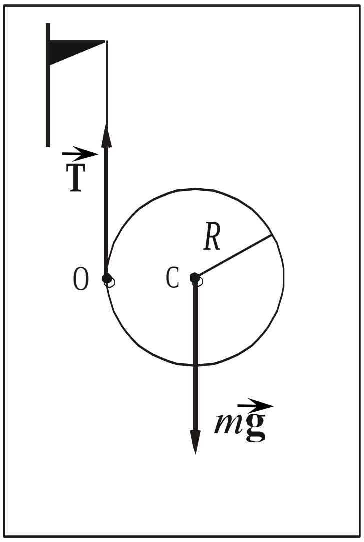

Рисунок 2.2.5. Направление сил, действующих на цилиндр.

относительно оси, проходящей через центр масс, M_{c} – величина момента силы натяжения ленты $\vec{\mathbf{T}}$ относительно точки С:

$$M_{\text{c}} = TR, \quad T = \frac{M_{\text{c}}}{R} = I_{\text{c}}\frac{\varepsilon}{R}. \qquad (2.2.12)$$

Момент силы тяжести $m\vec{\mathbf{g}}$ относительно этой точки равен нулю, т.к. равно нулю плечо этой силы.

Подставляя T из (2.2.12) в (2.2.11), получаем:

$$ma_{\text{c}} = mg - I_{\text{c}}\frac{\varepsilon}{R}. \qquad (2.2.14)$$

Ускорение a_c точки С равно по величине тангенциальному ускорению поверхности цилиндра относительно точки С, которое в свою очередь равно εR (1.1.19): $\varepsilon = a_c / R$.

Подставляя ε в (2.2.14):

$$m\left(1+\frac{I_c}{mR^2}\right)a_c = mg,$$

находим ускорение оси цилиндра:

$$a_c = g\left(1+\frac{I_c}{mR^2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}g$$

и время t прохождения пути, равного длине ленты $l = \dfrac{a_c t^2}{2}$ (1.1.15):

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_c}} = \sqrt{3\frac{l}{g}} » 0.55\ c.$$

Способ 2.

За время t лента разматывается на длину: $l = \dfrac{a_0 t^2}{2}$, где a_0 – ускорение перемещения точки 0 (ускорение разматывания), $a_0 = a_c$.

В уравнение вращательного движения цилиндра относительно точки О:

$$I_0\varepsilon = M_0, \tag{2.2.15}$$

входит момент силы тяжести:

$$M_0 = mgR,$$

а плечо силы натяжения ленты равно нулю. Момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через точку 0, по теореме Штейнера (2.1.8):

$$I_0 = I_c + mR^2.$$

Ускорение разматывания a_0 по своему смыслу равно тангенциальному ускорению поверхности цилиндра, которое в свою очередь равно εR:

$$\varepsilon = a_0 / R.$$

Подставляя полученные выражения для M_0, I_0 и ε в уравнение (2.2.15), получаем:

$$mgR=\left(I_\text{c}+mR^2\right)\frac{a_0}{R},$$

то есть

$$a_0=g\left(1+\frac{I_\text{c}}{mR^2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}g$$

и

$$t=\sqrt{2l/a_0}=\sqrt{3l/g}\approx 0.55\ c.$$

Обратите внимание на то, что в этом способе движение цилиндра описывается только уравнением вращательного движения относительно точки О (2.2.15); уравнение поступательного движения (2.2.11) не используется. Поверхность цилиндра покоится относительно ленты, которая на него намотана. В частности, в точке 0 линия касания цилиндра покоится относительно ленты, цилиндр совершает только вращательное движение вокруг этой линии, называемой мгновенной осью вращения, а сама эта линия опускается вниз с ускорением $a_0 = a_\text{c}$.

Задача 2.

Через блок переброшена легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 5.0$ *кг* и $m_2 = 6.0$ *кг*. Масса блока $m_3 = 2.0$ *кг*, радиус блока $R = 10$ *см*, момент сил трения в блоке $M_{тр} = 0.20$ *Н*. Определите ускорения грузов и натяжение нити.

Решение:

Система состоит из трех тел (рисунок 2.2.6), два из которых (грузы) совершают поступательное движение, а блок – вращательное, запишем уравнение движения для каждого из тел системы:

$$m_1\vec{\mathbf{a}}_1=\vec{\mathbf{T}}_1+m_1\vec{\mathbf{g}},$$

$$m_2\vec{\mathbf{a}}_2=\vec{\mathbf{T}}_2+m_2\vec{\mathbf{g}},$$

$$I\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}=\vec{\mathbf{M}}_1+\vec{\mathbf{M}}_2+\vec{\mathbf{M}}_\text{тр},$$

где I – момент инерции блока, ε – его угловое ускорение, $M_1 = T_1'R$ и $M_2 = T_2'R$ – моменты сил натяжения нити. Считая блок однородным цилиндром, используем (2.1.6):

$$I = \frac{1}{2} m_3 R^2 .$$

Легкость нити даёт основание считать её натяжение одинаковым по одну сторону блока: $T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$. Однако $T_1' \neq T_2'$ вследствие массивности блока и наличия момента сил трения.

Нерастяжимость нити означает равенство по величине ускорений грузов:

$$\vec{\mathbf{a}}_1 = -\vec{\mathbf{a}}_2, \quad a_1 = a_2 = a.$$

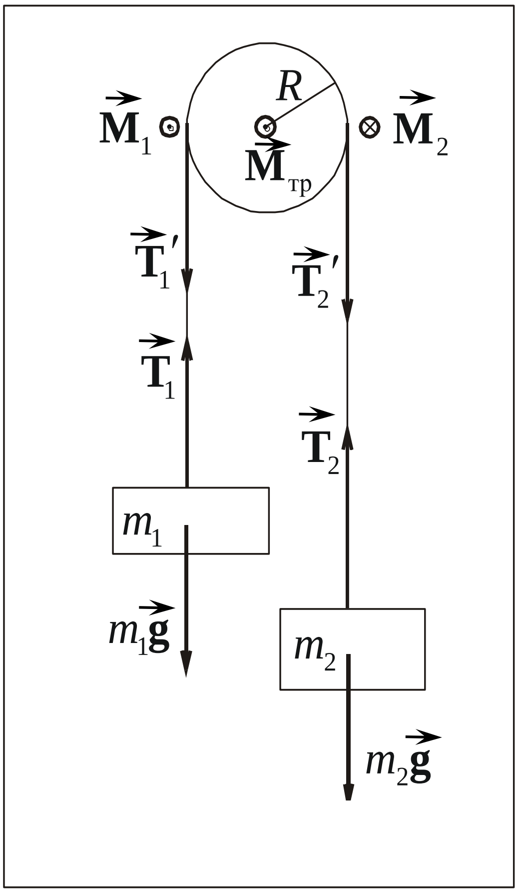

Рисунок 2.2.6. Направление сил, действующих в системе.

Угловое ускорение блока ε связано с тангенциальным ускорением поверхности блока a_τ соотношением (1.1.19): $a_\tau = \varepsilon R$. Тангенциальное ускорение блока a_τ равно по величине ускорению грузов, $a_\tau = a$. Поэтому

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Моменты сил $\vec{\mathbf{M}}_1$ и $\vec{\mathbf{M}}_2$ направлены вдоль оси вращения в противоположные стороны. Так как $m_2 > m_1$, момент сил трения $\vec{\mathbf{M}}_{\text{тр}}$ направлен против $\vec{\mathbf{M}}_2$. Проецируя уравнение вращательного движения блока на ось его вращения и разделив на R, получаем:

$$\frac{1}{2}m_3 a = T_2 - T_1 - \frac{M_{\text{тр}}}{R}.$$

Проецируем уравнения поступательного движения грузов на вертикальную ось:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g,$$
$$m_2 a = m_2 g - T_2.$$

Решая полученную систему трёх уравнений, находим результат:

$$a = \frac{m_2 - m_1 - M_{\text{тр}}/gR}{m_1 + m_2 + m_3/2} g \approx 0.65 \text{ м/с}^2,$$

$$T_1 = \frac{m_1\left(2m_2 + m_3/2 - M_{\text{тр}}/gR\right)}{m_1 + m_2 + m_3/2} g \approx 52 \text{ Н},$$

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2}m_3 a + \frac{M_{\text{тр}}}{R} \approx 55 \text{ Н}.$$

Задачи для самостоятельной работы

2.2.01. Через блок в виде однородного цилиндра массой m=2 *кг* перекинута нить, к концам которой привязаны тела соответственно массой 2 кг и 1 кг. Определить ускорение тел и силу натяжения нити, если блок вращается без трения.

2.2.02. По наклонной плоскости длиной 3 м, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный диск. Найти линейное ускорение центра масс диска. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g=10 м/с^2$.

2.2.03. По наклонной плоскости длиной 3 м, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный шар. Определить время скатывания шара с наклонной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.2.04. По наклонной плоскости длиной 3 м, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, скатывается без скольжения обруч. Найти скорость обруча в конце наклонной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.2.05. Шар массы $m = 1$ *кг* и радиуса R = 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi(t)=A+Bt+Ct^2$, где $C=1$ *рад/с*^{3}. Определить момент сил M в момент времени $t=2c$.

2.2.06. Сплошной однородный диск радиуса 10 *см*, вращающийся относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр масс, кладут основанием на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов диск сделает до остановки? Начальная угловая скорость диска 20 *рад/с*, коэффициент трения между основанием диска и горизонтальной поверхностью равен 0,2 и не зависит от угловой скорости вращения диска.

2.2.07. К точке, радиус-вектор которой относительно начала координат O равен $\vec{\boldsymbol{r}} = A\vec{\boldsymbol{\imath}} + B\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, приложена сила $\vec{\boldsymbol{F}} = a\vec{\boldsymbol{\imath}} + b\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, где a, b, A, B – положительные константы. Найти момент силы $\vec{\boldsymbol{M}}$ и силу $\vec{\boldsymbol{F}}$ относительно точки O.

2.2.08. Маховик в форме сплошного диска имеет массу 40 *кг* и радиус 2 *м*. Сначала маховику сообщили начальную угловую скорость 40 *рад/с*, потом остановили с помощью силы трения, приложенной по касательной к ободу. Найти силу трения, если маховик остановился через 60 *с*.

2.2.09. Шар массой 1 кг и радиусом 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости от времени имеет вид $\varphi=A+Ct^2$, где $C= - 1$ *рад/с*^{3}. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил M в момент времени t = 2 с.

2.2.10. Два тела массами $m_1=0,25кг$ и $m_2=0,15кг$ связаны тонкой нитью, переброшенной через блок. Блок укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой m_1. Блок представляет собой сплошной диск массы $M=0,1$ *кг*. Проскальзывание нити по блоку отсутствует. Найти коэффициент трения скольжения μ первого тела по столу.

2.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. ЭНЕРГИЯ, РАБОТА И МОЩНОСТЬ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ.

Теоретический минимум

Из уравнения движения (2.2.7) следует, что момент импульса частицы сохраняется, если момент действующих на неё сил равен нулю:

$$\vec{\mathbf{M}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{L}} = \overline{\text{const.}}$$

Момент импульса системы частиц $\vec{\mathbf{L}}$ равен векторной сумме моментов импульсов частиц $\vec{\mathbf{L}}_i$, составляющих эту систему:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i = \sum_i \left[\vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i\right].$$

Суммируя уравнения движения (2.2.7) $\dot{\vec{\mathbf{L}}}_i = \vec{\mathbf{M}}_i$ каждой из частиц, получим:

$$\dot{\vec{\mathbf{L}}} = \sum_i \dot{\vec{\mathbf{L}}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{M}}_i .$$

Моменты сил в правой части можно разделить на моменты внутренних сил и моменты внешних сил:

$$\sum \vec{\mathbf{M}} = \sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внут}} + \sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внеш}} .$$

Из третьего закона Ньютона следует, что сумма моментов внутренних сил равна нулю, $\sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внут}} = 0$. Поэтому в уравнении движения системы частиц остаются только моменты внешних сил:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внеш}} . \tag{2.3.1}$$

Момент импульса изолированных систем (на которые не действуют внешние силы) сохраняется:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{внеш}} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{M}}_{\text{внеш}} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{L}} = \overline{\text{const}} .$$

Для сохранения момента импульса достаточно, чтобы сумма моментов внешних сил равнялась нулю:

$$\sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внеш}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{L}} = \overline{\text{const}}. \tag{2.3.2}$$

Для сохранения момента импульса относительно оси надо, чтобы проекция суммарного момента внешних сил на эту ось равнялась нулю:

$$\frac{dL_z}{dt} = \left(\sum M_{\text{внеш}}\right)_z = 0, \qquad L_z = const. \tag{2.3.3}$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси:

$$K_{\text{вращ}} = \sum_i \frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \omega^2 \mathrm{R}_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i \mathrm{R}_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{2.3.4}$$

Здесь использованы связь $\mathrm{v}_i = \omega R_i$ и соотношение (2.1.2), если ось вращения передвигается, оставаясь параллельной самой себе (плоское движение), то полная кинетическая энергия тела равна сумме энергии поступательного движения и энергии вращательного движения:

$$K = \frac{m\mathrm{v}_\mathrm{c}^2}{2} + \frac{I_\mathrm{c}\omega^2}{2}, \tag{2.3.5}$$

где v_c – скорость центра масс тела, I_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

<u>Примеры решения задач</u>

Задача 1.

Кинетическая энергия вращающегося маховика K равна *1кДж*. Под действием постоянного тормозящего момента сил маховик начал замедлять свое вращение и, сделав *N=80 оборотов*, остановился. Определить момент сил торможения M.

<u>*Решение:*</u>

Начальную угловую скорость маховика ω_0 можно определить из соотношения (2.3.4):

$$K = \frac{I\omega_0^2}{2}, \qquad \omega_0^2 = 2K/I$$

где I – момент инерции маховика. Согласно уравнению вращательного движения (2.2.9):

$M = I\varepsilon$,

постоянный по условию тормозящий момент сил M=const приводит к замедлению вращения с постоянным угловым ускорением ε = const. В этом случае формула (1.1.21) для уменьшающейся угловой скорости имеет вид:

$\omega = \omega_0 - \varepsilon t$.

В момент остановки маховика ω = 0, поэтому время движения, $t = \omega_0/\varepsilon$. Подставим t в зависимость угла поворота от времени (1.1.22),

$$\Delta\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}$$

(сравните это с (1.1.22)). Подставляя сюда найденное выше $\omega_0^2 = 2K/I$, получаем:

$K = M\Delta\varphi$.

Наконец, угол поворота $\Delta\varphi$ связан с числом сделанных оборотов известным соотношением (1.1.23) $\Delta\varphi = 2\pi N$, поэтому

$$K = M \cdot 2\pi N, \qquad M = \frac{K}{2\pi N} = 2Нм.$$

Задача 2.

Однородный тонкий стержень массой *M=150 г* может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Летящий горизонтально со скоростью v=*10 м/с*, перпендикулярной стержню, пластилиновый шарик массой *m=10 г* попадает в конец неподвижного стержня и прилипает к нему. Найти линейную скорость u прилипшего шарика.

Решение:

Вертикальная проекция вектора суммарного момента внешних сил (реакции опоры и тяжести), действующих на систему тел «шарик-стержень», равна нулю, поэтому, в соответствии с (2.3.3), вертикальная проекция вектора момента импульса системы сохраняется. Сам вектор момента импульса определим относительно точки, совпадающей с центром стержня, чтобы (для упрощения описания) этот вектор тоже был направлен вертикально. Момент импульса шарика до удара по выражению (2.2.4):

$$L_ш = \frac{l}{2} m\mathrm{v},$$

где m – масса шарика, l – длина стержня, $l/2$ – плечо импульса шарика, v – его скорость до удара. Стержень до удара покоился, поэтому его момент импульса был равен нулю, и момент импульса системы «шарик-стержень» до удара L_1 равен $L_ш$:

$$L_1 = \frac{l}{2} m\mathrm{v}.$$

В результате удара стержень с прилипшим шариком будет вращаться. Момент импульса системы после удара по выражению (2.2.8):

$$L_2 = I\omega,$$

ω – угловая скорость вращения стержня с шариком. Момент инерции системы I по (2.1.9) складывается из момента инерции стержня (2.1.5) и момента инерции шарика, который будем считать материальной точкой (2.1.1):

$$I = \frac{1}{12} Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

где M – масса стержня. Сохранение момента импульса:

$$L_1 = L_2,$$

определяет угловую скорость вращения системы после удара:

$$\omega = \frac{lm\mathrm{v}}{2\mathrm{I}}.$$

Линейная скорость прилипшего шарика u связана с угловой скоростью ω соотношением (1.1.18):

$$u = \frac{\omega l}{2} = \frac{m\mathrm{v}}{m+M/3} = 1.67 м/с.$$

Задача 3.

С наклонной плоскости скатываются два цилиндра: 1) сплошной деревянный и 2) полый металлический. Внешние размеры и массы их одинаковы. Какой цилиндр скатывается быстрее?

Решение:

Согласно закону сохранения механической энергии потенциальная энергия цилиндра переходит в кинетическую, которая равна сумме энергий поступательного и вращательного движений (2.3.5):

$$mgh = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где h – высота наклонной плоскости, m – масса цилиндра, v – скорость его оси, I – момент инерции цилиндра. Скорость v оси цилиндра равна по величине скорости движения поверхности цилиндра относительно его оси, которая, в свою очередь, равна ωR (1.1.18):

$$\omega = \mathrm{v}/R,$$

R – радиус цилиндра. Подставляя это в закон сохранения энергии, получаем:

$$mgh = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right),$$

то есть,

$$\mathrm{v}^2 = 2gh\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)^{-1}.$$

Два цилиндра в условии задачи имеют разные моменты инерции: сплошного цилиндра (2.1.6):

$$I_1 = \frac{mR^2}{2},$$

полого цилиндра, трубы (2.1.4): $I_2 = mR^2 = 2I_1 > I_1$ (массы и радиусы у них одинаковы по условию задачи).

Поэтому конечная скорость сплошного деревянного цилиндра больше конечной скорости полого металлического:

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{4}{3}gh} > \mathrm{v}_2 = \sqrt{gh},$$

а так как они проходят одинаковые пути, то средняя скорость $\langle v_1 \rangle > \langle v_2 \rangle$, а время скатывания меньше, $t_1 < t_2$. Деревянный цилиндр скатывается быстрее.

Задачи для самостоятельной работы

2.3.01. На какую высоту по наклонной плоскости вкатиться шар, если у основания наклонной плоскости он имел скорость 2 *м/с*.

2.3.02. Обруч и диск двигаются с одинаковой скоростью центра инерции. Они вкатываются вверх по наклонной плоскости. Определите отношение высот подъема шара и цилиндра.

2.3.03. Стержень длиной l и массой M может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В нижний конец стержня попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью V, и застревает в стержне. Определите максимальный угол, на который отклониться стержень при ударе.

2.3.04. Диск вращается по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где A= 1 *рад*, B = 4 *рад/с*, C= -2 *рад/с*^{2}. Момент инерции маховика равен 10 кг·м^2. Запишите зависимость от времени вращающегося момента M и мощности P .

2.3.05. Вычислить момент импульса Земли, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Сравнить этот момент с моментом импульса, обусловленным движением Земли вокруг Солнца. Землю считать однородным шаром, а орбиту Земли – окружностью.

2.3.06. Платформа в виде диска радиусом $R=1$ *м* вращается по инерции с частотой $n_1=6$ *мин*$^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса которого $m=80$ *кг*. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы $J=120$ *кг·м*^{2}. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

2.3.07. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой $m_1=60$*кг*. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы $m_2=240кг$. Момент инерции J человека рассчитывать как для материальной точки.

2.3.08. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром 2 *м* и массой 6 *кг* стоит человек массой 70 кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него со скоростью v = 5,0 м/с мяч массой m = 2 кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии r = 1 м от оси скамьи.

2.3.09. К шкиву маятника Обербека (рисунок 2.3.1) прикреплена невесомая нить, к которой подвешен груз массы M = 1 кг. Груз опускается до нижнего положения, а затем начинает подниматься вверх. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза. Радиус шкива r = 3 см. На кресте укреплены четыре груза массой m = 250 г каждый на расстоянии R = 10 см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментами инерции грузов.

2.3.10. Однородный стержень длиной l и массой m может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Какую минимальную угловую скорость ω_{min} нужно сообщить стержню в положении равновесия, чтобы он мог совершить полный оборот, если момент силы трения относительно оси вращения постоянен, а его модуль равен M?

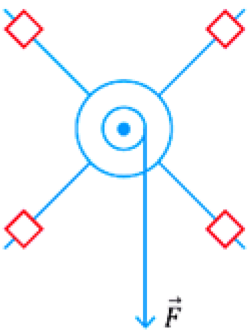

Рисунок 2.3.1. Схема маятника Обербека.

2.4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Теоретический минимум

Закон движения гармонических колебаний:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0), \qquad (2.4.1)$$

где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия; t – время; A, ω, φ_0 – соответственно амплитуда, циклическая (круговая) частота, начальная фаза колебаний; $(\omega t+\varphi_0)$ – фаза колебаний в момент t.

Циклическая (круговая) частота колебаний:

$$\omega=2\pi\nu, \text{ или } \omega=2\pi/T, \qquad (2.4.2)$$

где ν и T – частота и период колебаний.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$V(t)=\dot{x}(t)=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Ускорение при гармоническом колебании:

$$a(t)=\ddot{x}(t)=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Амплитуда A результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих по одной прямой, определяется по формуле:

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1), \qquad (2.4.3)$$

где A_1 и A_2 – амплитуды составляющих колебаний; φ_1 и φ_2 – их начальные фазы.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки:

$$m\ddot{x}=-kx, \text{ или } \ddot{x}+\omega^2x=0, \qquad (2.4.4)$$

где m – масса точки; k – коэффициент квазиупругой силы ($\omega^2=k/m$).

Материальная точка массы m, подвешенная на нерастяжимой нити длиной l, совершает колебания в вертикальной плоскости (математический маятник) (рисунок 2.4.1).

Здесь удобнее всего использовать уравнение движения (1.2.1) в проекции на ось x, направление которой совпадает с положительным направлением дуговой координаты s (величина алгебраическая, на рисунке 2.4.1 изображен момент, когда $s>0$). Начало отсчета s возьмем в положении равновесия – в точке O.

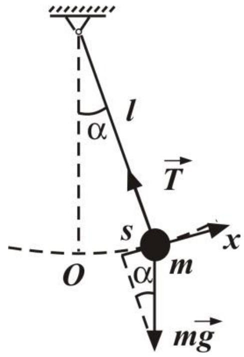

Рисунок 2.4.1. Направление сил, действующих на математический маятник.

Имея в виду, что $s=l\cdot\alpha$, $\ddot{s}=l\ddot{\alpha}$ и что проекция силы натяжения на ось x $T_x=0$, запишем:

$(x)\ m\ddot{s}=ml\ddot{\alpha}=-mg\sin\alpha$, или

$$\ddot{\alpha}+(g/l)\sin\alpha=0. \qquad (2.4.5)$$

Из сопоставления с (2.4.4.) видим, что (2.4.5), вообще говоря, не является уравнением гармонических колебаний, поскольку в нем вместо α стоит $\sin\alpha$. Однако, при малых колебаниях, когда $\sin\alpha\approx\alpha$, уравнение совпадает с (2.4.4):

$$\ddot{\alpha}+(g/l)\alpha=0, \qquad (2.4.6)$$

откуда следует, что ω и период T математического маятника, совершающего малые колебания равны:

$$\omega=\sqrt{g/l}, \qquad (2.4.7)$$

$$T=2\pi\sqrt{l/g}, \qquad (2.4.8)$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Период колебаний тела, подвешенного на пружине (пружинный маятник):

$$T=2\pi\sqrt{m/k}, \qquad (2.4.9)$$

где m – масса тела; k – жесткость пружины. Формула справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука (при малой массе пружины в сравнении с массой тела).

Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{J / mga}\ , \qquad (2.4.10)$$

где J – момент инерции колеблющегося тела (физического маятника) относительно оси колебаний; a – расстояние от центра масс физического маятника до оси колебаний.

Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$E={}^{1}/_{2}\, mA^2\omega^2. \qquad (2.4.11)$$

Примеры решения задач

Задача 1.

Материальная точка массой $m=10г$ совершает гармоническое колебание с периодом $T=1c$. Определить амплитуду колебаний A, максимальную скорость V_{max} и максимальное ускорение a_{max} колеблющейся точки, если полная энергия точки равна $E=0{,}02$ *Дж*.

Решение:

Запишем закон движения гармонических колебаний (2.4.1):

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Скорость колеблющейся точки $V(t)$ определяется как первая производная от смещения $x(t)$ по времени:

$$V(t)=\dot{x}(t)=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Максимальное значение скорости:

$$V_{max}=\omega A.$$

Ускорение точки определяется как производная от скорости по времени:

$$a(t)=\ddot{x}(t)=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Максимальное значение ускорения:

$a_{max}=\omega^2 A$.

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной энергии и равна максимальной потенциальной или максимальной кинетической энергии (2.4.11):

$E={}^1/_2\, mA^2\omega^2$.

Круговая (циклическая) частота связана с периодом: $\omega=2\pi/T$. Тогда:

$E=4\pi^2 mA^2/2T^2$.

Из этого выражения найдем амплитуду:

$$A=\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}\ .$$

Проверим размерность:

$$[A]=c\sqrt{\frac{H\cdot м}{кг}}=c\sqrt{\frac{кг\cdot м\cdot м}{c^2\cdot кг}}=\frac{c\cdot м}{c}=м\ .$$

Произведем вычисления:

$$A=\frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}02}{0{,}01}}=0{,}32\ м.$$

$\omega=2\pi/T=2\cdot 3{,}14/1=6{,}28\ c^{-1}$.

$V_{max}=6{,}28c^{-1}\cdot 0{,}32м=2м/с$.

$a_{max}=(6{,}28c^{-1})^2\cdot 0{,}32м=12{,}6м/с^2$.

Ответ: $A=0{,}32м$; $V_{max}=2м/с$; $a_{max}=12{,}6м/с^2$.

Задача 2.

Тонкий обруч, повешенный на гвоздь, вбитый в стену горизонтально, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча R = 30см. Вычислить период T колебаний обруча. Сопротивлением среды пренебречь.

Решение:

Обруч представляет собой физический маятник. Период малых колебаний физического маятника равен

$$T=2\pi\sqrt{I_0/mgd}$$

где d = R – расстояние от центра масс C до точки подвеса, I_0 – момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса О. По теореме Штейнера

$$I_0 = I_c + md^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2,$$

где I_c– момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс точку C. Получаем, что период гармонических колебаний маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}=2.55\ c.$$

<u>Задачи для самостоятельной работы</u>

2.4.01. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ так, что в начальный момент времени смещение x_0=4 *см*, а скорость v_0=10 *см/с*. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 колебаний, если их период T=2 *с*.

2.4.02. Математический маятник качается с амплитудой 10 градусов. Какую долю своего периода он находится между -5 ^{o} и +5^o? Колебания считаются гармоническими.

2.4.03. Частица совершает колебания по закону $x = Asin(\omega t)$. В некоторый момент времени ее равно 4 *см*. Когда фаза увеличилась в два раза, смещение стало равно 10 *см*. Определите амплитуду колебаний частицы.

2.4.04. Математический маятник представляет собой шарик массой 200 *г*, подвешенный на нити длиной 1м. Определите период колебаний маятника и энергию маятника, если максимальный угол его отклонения от положения равновесия 10^o.

2.4.05. Однородный стержень совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальной оси, проходящей в плоскости его верхнего торца. Длина стержня L = 0,5 м. Найти период колебаний.

2.4.06. Физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной

L=120см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на некоторое расстояние *a* от центра масс стержня. При каком значении *a* период *T* колебаний имеет наименьшее значение?

2.4.07. На концах тонкого стержня длиной l = 30 *см* и массой m = 400 *г* укреплены грузики массой m_1 = 200 *г* и m_2 = 300 *г*. Стержень колеблется около горизонтальной оси, проходящей через его середину. Определить период колебаний, совершаемых стержнем.

2.4.08. На концах тонкого стержня длиной *L=30 см* укреплены одинаковые грузики по одному на каждом конце. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через точку, удаленную на *d=10см* от одного из концов стержня. Определить период *T* колебаний такого физического маятника. Массой стержня пренебречь.

2.4.09. Материальная точка совершает гармонические колебания. Начальная фаза колебаний равна $\varphi_0=0$, период колебаний *T=6с*, смещение точки в начальный момент времени максимально. Определить ближайший момент времени, когда скорость материальной точки равна половине максимального ее значения.

2.4.10. Математический маятник длиной L_1*=40см* и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной L_2*=60см* синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние *a* до центра масс стержня от оси колебаний.

2.5. ВОЛНЫ В МЕХАНИКЕ

Теоретический минимум

Уравнение плоской монохроматической волны:

$\xi(x,t)=A\cos\omega(t-x/V)$, или $\xi(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$, (2.5.1)

где $\xi(x,t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; $\omega=2\pi\nu$ – циклическая (круговая) частота; V – скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость); ν – частота; $k=2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны.

Длина волны связана с периодом колебаний T и частотой ν соотношениями $\lambda=VT$ и $\lambda=V/\nu$. (2.5.2)

Разность фаз колебаний двух точек среды $\Delta\varphi$, расстояние между которыми (разность хода) равно Δx:

$\Delta\varphi=(2\pi/\lambda)\Delta x$, (2.5.3)

где λ – длина волны.

Уравнение стоячей волны:

$\xi(x,t)=A\cos(kx)\cos(\omega t)$. (2.5.4)

В точках, где $|\cos(kx)|=1$, находятся максимумы – *пучности*, а в точках, где $\cos(kx)=0$, находятся минимумы – *узлы*. Интервалы между соседними пучностями или узлами равны половине длины волны $\Delta x=\pi/k=\lambda/2$ (рисунок 2.5.1.)

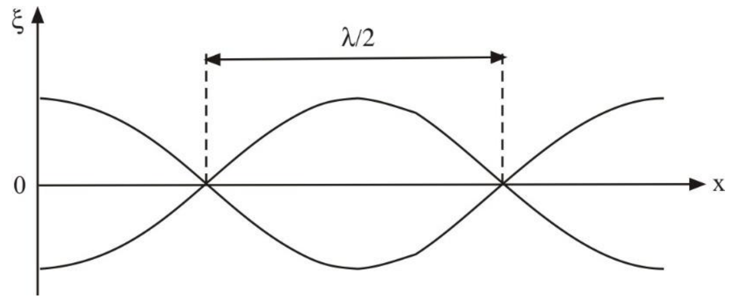

Рисунок 2.5.1. Стоячая волна

Примеры решения задач

Задача 1.

Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu=500$ *Гц* и амплитуду $A=0{,}25$ *мм* распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda=70$ *см*. Найти: 1) скорость распространения колебаний V; 2) максимальную скорость частиц V_{max}.

Решение:

1) Скорость распространения колебаний или фазовая скорость по выражению (2.5.2) равна:

$V=\lambda/T=\lambda\nu=0{,}7\cdot 500=350$ *м/с*,

где $T=1/\nu$ – период колебаний.

2) Запишем уравнение волны, распространяющейся вдоль оси X:

$\xi(x,t)=A\sin(2\pi\nu t-2\pi x/\lambda)$,

где $\xi(x,t)$ – величина отклонения частиц от положения равновесия. Скорость колебаний частиц равна:

$$V(t)=\frac{d\xi(x,t)}{dt}=2\pi\nu A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Амплитуда этого колебания и есть максимальная скорость частиц воздуха:

$V_{max}=2\pi\nu A=6{,}28\cdot 500\cdot 25\cdot 10^{-5}=0{,}785$ *м/с*.

Ответ: 1) $V=350$ *м/с*; 2) $V_{max}=0{,}785$ *м/с*.

Задачи для самостоятельной работы

2.5.01. Левому концу длинной горизонтальной натянутой струны сообщается простое гармоническое колебательное движение с частотой 250 Гц и амплитудой 2,6 см. Сила натяжения струны равна 140 Н, а линейная плотность струны $\mu=0{,}12$ кг/м. Вычислить длину волны λ, образующейся бегущей волны.

2.5.02. Чему равна частота основного тона закрытой трубы органа длиной 26 см при температуре 20 градусов Цельсия (учесть, что скорость звука при этой температуре равна 343 м/с)?

2.5.03. Рояльная струна имеет длину 1,1 *м* и массу 9 *г*. С какой силой должна быть натянута струна, чтобы частота основного тона была равна 131 *Гц*?

2.5.04. Волна с периодом $T=1,2с$ и амплитудой колебаний $A=2см$ распространяется со скоростью $V=15м/с$. Чему равно смещение $\xi(x,t)$ точки, находящейся на расстоянии $x=45м$ от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время $t=4с$?

2.5.05. Определить скорость V распространения волны в упругой среде, если разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на $\Delta x=10см$, равна $\pi/3$. Частота колебаний $\nu=25Гц$.

2.5.06. Определить длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние L между первой и седьмой пучностями равно $15см$.

2.5.07. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu=0,5кГц$ и амплитуду $A=0,25мм$, распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda=70см$. Найти максимальную скорость V_{max} частиц среды.

2.5.08. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний источника волн, находящегося в упругой среде, и точки этой среды, отстоящей на $x=2м$ от источника. Частота колебаний $\nu=5Гц$; волны распространяются со скоростью $V=40м/с$.

2.5.09. Две точки находятся на расстоянии $\Delta x=50см$ друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью $V=50м/с$. Период колебаний $T=0,05с$. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний в этих точках.

2.5.10. Задано уравнение плоской волны $\xi(x,t)=A\cos(\omega t - kx)$, где $A=0,5$ $см$, $\omega=628с^{11}$, $k=2м^{-1}$. Определить максимальные значения скорости V_{max} и ускорения a_{max} колебаний частиц среды.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Студент должен решить 10 задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой шифра зачетной книжки студента.

Вариант	Номер задачи									
1	1.1.01	1.2.01	1.3.01	1.4.01	1.5.01	2.1.01	2.2.01	2.3.01	2.4.01	2.5.01
2	1.1.02	1.2.02	1.3.02	1.4.02	1.5.02	2.1.02	2.2.02	2.3.02	2.4.02	2.5.02
3	1.1.03	1.2.03	1.3.03	1.4.03	1.5.03	2.1.03	2.2.03	2.3.03	2.4.03	2.5.03
4	1.1.04	1.2.04	1.3.04	1.4.04	1.5.04	2.1.04	2.2.04	2.3.04	2.4.04	2.5.04
5	1.1.05	1.2.05	1.3.05	1.4.05	1.5.05	2.1.05	2.2.05	2.3.05	2.4.05	2.5.05
6	1.1.06	1.2.06	1.3.06	1.4.06	1.5.06	2.1.06	2.2.06	2.3.06	2.4.06	2.5.06
7	1.1.07	1.2.07	1.3.07	1.4.07	1.5.07	2.1.07	2.2.07	2.3.07	2.4.07	2.5.07
8	1.1.08	1.2.08	1.3.08	1.4.08	1.5.08	2.1.08	2.2.08	2.3.08	2.4.08	2.5.08
9	1.1.09	1.2.09	1.3.09	1.4.09	1.5.09	2.1.09	2.2.09	2.3.09	2.4.09	2.5.09
10	1.1.10	1.2.10	1.3.10	1.4.10	1.5.10	2.1.10	2.2.10	2.3.10	2.4.10	2.5.10

ТЕМЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ (РЕФЕРАТОВ)

Студент должен представить письменную работу (реферат) по теме, номер которой совпадает с последней цифрой шифра зачетной книжки студента.

1. Основные кинематические характеристики движения частиц.
2. Инерциальные системы. Законы Ньютона.
3. Механическое движение в неинерциальных системах отсчёта.
4. Движение тела переменной массы.

5. Силы трения. Трение в природе и технике.

6. Законы сохранения в механике.

7. Уравнения движения и равновесия твердого тела.

8. Принцип относительности в механике.

9. Модель гармонического осциллятора. Примеры гармонических осцилляторов: маятник, груз на пружине, колебательный контур.

10. Вынужденные колебания. Резонанс. Использование явления резонанса в науке и технике.

11. Физический смысл спектрального разложения. Использование методов спектрального оценивания в науке и технике.

12. Волновые процессы и методы их исследования.

13. Нелинейные волновые процессы.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ ПО РАЗДЕЛУ «ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Введение

Предмет механики. Классическая и квантовая механика. Нерелятивистская и релятивистская механика. Кинематика и динамика. Основные физические модели: частица (материальная точка), система частиц, абсолютно твердое тело, сплошная среда.

Элементы кинематики

Система отсчета. Скалярные и векторные физические величины. Основные кинематические характеристики движения частиц. Движение частицы по прямой. Движение частицы по окружности. Угловая скорость и угловое ускорение. Поступательное и вращательное движение абсолютно твердого тела.

Элементы динамики частиц

Понятие состояния частицы в классической механике. Основная задача динамики. Первый закон Ньютона. Понятие инерциальной системы отсчета. Масса. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Границы применимости классического способа описания движения частиц.

Законы сохранения в механике

Закон сохранения импульса. Центр инерции. Закон движения центра инерции. Момент импульса. Момент силы. Закон сохранения момента импульса. Уравнение моментов. Особенности движения в центральном поле. Работа. Мощность. Кинетическая энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия и энергия взаимодействия. Внутренняя энергия. Закон сохранения энергии в механике. Общефизический закон сохранения энергии. Законы сохранения и симметрия пространства и времени.

Элементы механики твердого тела

Уравнения движения и равновесия твердого тела. Кинетическая энергия твердого тела, совершающего поступательное и вращательное движения. Уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Момент инерции твердого тела относительно оси. Вращательный момент.

Принцип относительности в механике

Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Гравитационная масса. Эквивалентность инертной и гравитационной масс. Опыт Майкельсона. Независимость скорости света от движения источника. Принцип относительности в релятивистской механике. Преобразование Лоренца для координат и времени и их следствия. Релятивистский импульс. Полная энергия частицы. Закон сохранения энергии и импульса в релятивистской динамике.

<u>КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ</u>

Введение

Общие представления о колебательных и волновых процессах. Единый подход к описанию колебаний и волн различной физической природы.

Гармонический осциллятор

Модель гармонического осциллятора. Амплитуда, круговая частота и фаза гармонических колебаний. Примеры гармонических осцилляторов: маятник, груз на пружине, колебательный контур. Свободные затухающие колебания. Коэффициент затухания. Логарифмический декремент. Энергия гармонического осциллятора. Добротность. Вынужденные колебания. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Время установления вынужденных колебаний и его связь с добротностью. Вынужденные колебания в электрических цепях. Резонанс. Физический смысл спектрального разложения. Понятие о нелинейном осцилляторе. Преобразование и детектирование электрических колебаний. Автоколебания. Условие самовозбуждения колебаний. Роль нелинейности.

Волновые процессы

Волновое движение, фронт волны. Геометрическое строение волн (плоская, цилиндрическая, сферическая волна). Плоская стационарная волна. Плоская синусоидальная волна. Бегущие и стоячие волны. Длина волны, волновой вектор и фазовая скорость. Скалярные и векторные волны. Поляризация. Одномерное волновое уравнение. Электромагнитные волны и их свойства: скорость распространения в вакууме, неограниченность спектра, поляризация. Плоские электромагнитные волны. Энергетические характеристики электромагнитных волн.

Интерференция и дифракция волн

Принцип суперпозиции волн. Интерференция плоских монохроматических волн. Интерференция квазимонохроматических волн.

Временное и спектральное рассмотрение интерференционных явлений. Понятие об интерферометрии. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракция Френеля. Число Френеля. Дифракция Фраунгофера. Дифракция на круглом отверстии, прямой щели и на множестве параллельных щелей. Дифракционная решетка. Спектральное разложение. Разрешающая способность спектральных приборов. Оптическая фильтрация пространственных частот. Понятие о голографии.

Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

Дисперсия волн. Показатель преломления. Нормальная и аномальная дисперсии. Групповая скорость. Поглощение волн. Поведение волн на границе раздела двух сред. Волноводы. Анизотропные среды. Элементы кристаллооптики. Электрооптические и магнитооптические явления. Понятие о нелинейной оптике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс физики. В 3 томах. Том 1. Механика. Молекулярная физика. Учебник для вузов. Санкт-Петербург: Изд-во Лань, 2022. 356 стр.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. 12-е изд. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 309 с. : ил.
3. Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы. 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 263 с. : ил.
4. Ушаков И.В., Сафронов И.С. Механические характеристики аморфного металлического сплава, подвергнутого обработке импульсным лазерным излучением в глубоком вакууме // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 1. С. 133–134.
5. Ушаков И.В., Сафронов И.С. Закономерности эволюции механических свойств лазерно-обработанных областей аморфно-нанокристаллического металлического сплава в зависимости от исходной структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2012. Т. 17. № 5. С. 1415-1419.

6. Ушаков И.В., Батомункуев А.Ю. Моделирование комплекса процессов, протекающих в поверхностных слоях наноструктурного многокомпонентного металлического сплава под действием лазерных импульсов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 1. С. 165-170.

7. Ушаков И.В., Симонов Ю.В. Экспериментальное выявление вязкости микроразрушения в центральных и граничных участках тонких хрупких образцов при нагружении на подложке пирамидкой Виккерса // Вестник Московского авиационного института. 2019. Т. 26. № 4. С. 230-239.

8. Ушаков И.В., Ошоров А.Д. Физические закономерности деформирования и разрушения двухслойного композиционного соединения полимер – нанокристаллическая металлическая пленка в условиях локального нагружения пирамидкой Виккерса // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2021. Т. 11, № 4. С. 95–107. https://doi.org/10.21869/2223-1528-2021-11-4-95-107

9. Ушаков И. В., Симонов Ю. В. Управление физико-механическими свойствами поверхности титановых сплавов короткоимпульсным лазерным излучением // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 4. С. 30-42. DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-30-42.

10. Ушаков И.В. / Особенности влияния макроскопической трещины на оптическую прочность монокристалла // Оптический журнал. 2008. Т. 75. № 2. С. 74-78.

11. Ушаков И.В. Повышение оптической прочности твердых прозрачных кристаллических материалов лазерной селективной обработкой дефектных нано- и микрообластей // Вестник Тамбовского государственного университета. Сер. Естественные и технические науки. 2008. Т. 13. Вып. 1. С. 48-51.

12. Ушаков И.В. Определение механических свойств при индентировании аморфно-нанокристаллического металлического сплава, подвергнутого лазерному модифицированию // Вестник Тамбовского государственного университета. Сер. Естественные и технические науки. 2007. Т. 12. Вып. 2. С. 258-262.

13. Ушаков И.В. Формирование механических характеристик тонкого аморфно-нанокристаллического металлического сплава импульсным лазерным излучением // Вестник Тамбовского государственного

университета. Сер. Естественные и технические науки. 2007. Т. 12. Вып. 6. С. 715-718.

14. Симонов Ю. В., Ушаков И. В. Механические свойства поверхностных структур титанового сплава ВТ9 после многократной локальной обработки наносекундными лазерными импульсами // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2020. № 2. С. 19-35.

15. Ушаков И.В., Батомункуев А.Ю. Моделирование процессов, инициированных лазерной плазмой в поверхностных слоях многокомпонентного аморфно-нанокристаллического сплава. Физика и химия обработки материалов. 2016. № 5. С. 17-22.

16. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике : [учеб. пособие для втузов]. 8-е изд., перераб. и доп. М. : Физматлит, 2009. 640 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……………………………………………………………………….. ..3
ЧАСТЬ I………………………………………………………… ……………..8
1.1. КИНЕМАТИКА………………… ………………………………….............8
Теоретический минимум……………………………………………………...8
Примеры решения задач………………………………………………….......13
Задачи………………………………………………………………………….17
1.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ……………………………...19
Теоретический минимум……………………………………………………19
Примеры решения задач……………………………………………………..26
Задачи…..………………………………………………………….............30
1.3.ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ………………………………...33
Теоретический минимум ……………………………………………………33
Примеры решения задач……..………………………………………………35
Задачи………………………………………………………………….........38
1.4.РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. МОЩНОСТЬ ……………………………………40
Теоретический минимум………………………………………………......40
Примеры решения задач…………………………………………………...…42
Задачи………………………………………………………………….........44
1.5.ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. СТОЛКНОВЕНИЯ ТЕЛ ………..46
Теоретический минимум…………………………………………………..46
Примеры решения задач……………………………………………..……47
Задачи……………………………………………………………….........50
ЧАСТЬ II………………………………………………………………………….52
2.1.МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА………...…………………….52
Теоретический минимум…………………………………………...…...52
Примеры решения задач……………………………………………….……..53
Задачи………………………………………………………………….........55
2.2.ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО

ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ……………….……………………….........57
Теоретический минимум……………………………………………………..57
Примеры решения задач…………………………………………….....…60
Задачи………………………………………………………………….........66
2.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. ЭНЕРГИЯ, РАБОТА ИМОЩНОСТЬ ПРИВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ 69
Теоретический минимум……………………………………………..…69
Примеры решения задач………………………………………………...70
Задачи………………………………………………………………….........73
2.4.МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ……………………….......................76
Теоретический минимум…………………...………………………………...76
Примеры решения задач…………………………………...………………78
Задачи………………………………………………………………….........80
2.5.ВОЛНЫ В МЕХАНИКЕ……………………….......................................82
Теоретический минимум……………………………………...…………...82
Примеры решения задач…………………………………………...…………83
Задачи………………………………………………………………….........83
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1………………………… ………………85
ТЕМЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ (РЕФЕРАТОВ)……...……………………...85
ПРОГРАММА РАЗДЕЛА «ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ……………………………………...……………….............86
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ…………………………………………...………..89

Учебное издание

Обвинцева Нина Юрьевна,

Мудрецова Людмила Вячеславовна

Методическое пособие и контрольные работы по физике для студентов заочной формы обучения. Раздел «Физические основы механики. Колебания и волны»

Учебное – методическое пособие