

## КИНЕМАТИКА.

**Механическим движением** тела называется изменение его положения в пространстве относительно других тел с течением времени.

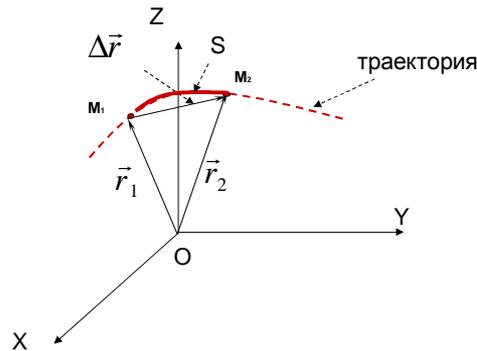
**Материальная точка** - тело, размерами которого в данных условиях движения можно пренебречь.

Тело отсчета, связанная с ним система координат, и прибор для измерения времени образуют **систему отсчета**.

**Траектория** - линия, вдоль которой происходит движение тела. Траекторию следует отличать от перемещения.

**Перемещение тела** -  $\Delta \vec{r}$  направленный отрезок прямой (вектор), соединяющий начальное положение тела с его конечным положением.

**Путь** – длина траектории, следует различать путь и перемещение.



**Перемещение. Скорость. Ускорение.**

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории.

Вектор ускорения может быть направлен под произвольным углом к скорости.

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

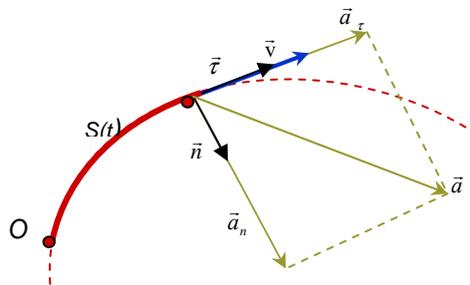
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$$\vec{a} = a_n\vec{n} + a_\tau\vec{\tau}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}$$



### Движение тела, брошенного под углом к горизонту

**Начальные условия (см. рисунок):**

$$x_0 = y_0 = 0$$

$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Общие формулы для проекций скорости при движении с постоянным ускорением:

$$v_x = a_x t + v_{0x}$$

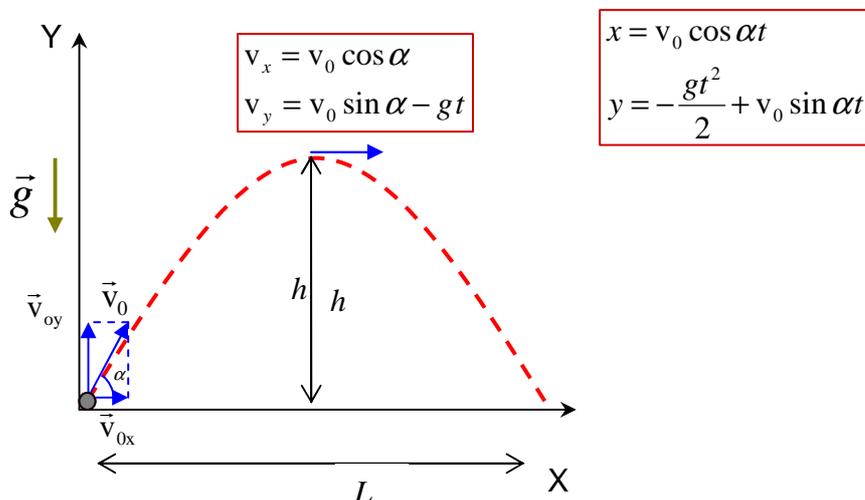
$$v_y = a_y t + v_{0y}$$

Общие формулы для координат при движении с постоянным ускорением:

$$x = \frac{a_x t^2}{2} + v_{0x} t + x_0$$

$$y = \frac{a_y t^2}{2} + v_{0y} t + y_0$$

Тогда:



### Общее время движения тела.

Чтобы найти общее время движения тела, надо учесть, что в момент падения тела на землю его координата  $y=0$ .

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha t = 0$$

Решая это уравнение, получаем два корня:  $t = 0, t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

Первый корень соответствует случаю, когда тело находится в точке с координатой  $y=0$  в НАЧАЛЬНЫЙ момент. Второй корень – случаю, когда тело в конце полета приближается к земле. Тогда:

$$t_{\text{об}} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

### Дальность полета

Если подставить это время движения в координату  $x$ , то получим координату тела  $x$  в момент падения на землю (дальность полета).

$$L = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

### Максимальная высота подъема

Чтобы найти максимальную высоту подъема тела, надо сначала найти ВРЕМЯ подъема к верхней точке. Для этого надо учесть, что в верхней точке **скорость тела направлена строго горизонтально**, т.е. проекция скорости на ось  $y$  равна нулю:

$$v_y = 0. \text{ Тогда: } v_0 \sin \alpha - gt = 0.$$

Отсюда найдем:  $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ .

Если подставить это время подъема в координату  $y$ , то получим координату тела в верхней точке (максимальную высоту):

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

### Траектория движения

Чтобы найти уравнение траектории, необходимо в выражениях для координат избавиться от времени:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

Подставим данное выражение в координату  $y$ , исключим время, получим уравнение траектории:

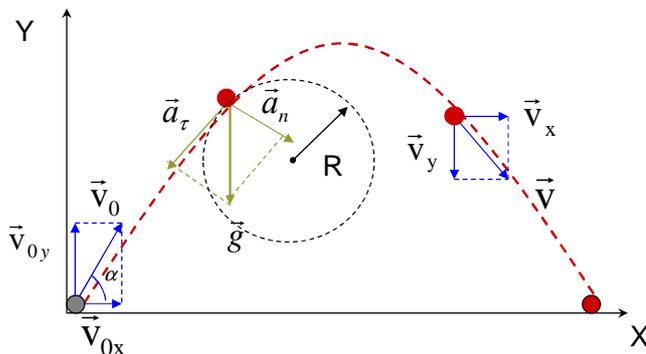
$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

### Зависимость модуля скорости от времени.

Модуль (величину) вектора скорости можно найти, зная зависимость проекций скорости на координатные оси:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}$$

### Тангенциальное и нормальное ускорения. Радиус кривизны траектории.



Для определения тангенциального и нормального ускорений следует учесть, что ускорение тела в процессе движения постоянно и равно ускорению свободного падения  $\vec{g}$ . Поэтому:

$$\vec{g} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$$g = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Зная зависимость модуля скорости от времени (см. предыдущий раздел), найдем тангенциальное ускорение:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$$

$$a_{\tau} = \frac{g^2 t - v_0 \sin \alpha \cdot g}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}}$$

Затем найдем нормальное ускорение:

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_{\tau}^2} \quad ,$$

$$a_n = \frac{gv_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}} \quad .$$

Радиус кривизны  $R$  можно найти из условия  $a_n = \frac{v^2}{R}$  .