№ 2374

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»**

Кафедра физики

Д.Е. Капуткин
В.В. Пташинский
Ю.А. Рахштадт

Физика

Механика. Молекулярная физика

Учебное пособие для практических занятий
Часть 1

Под редакцией профессора Д.Е. Капуткина

Допущено учебно-методическим объединением по образованию в области металлургии в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 150400 – Металлургия

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2014

УДК 530.1
К20

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. *Ю.В. Осипов*

Капуткин, Д.Е.

К20 Физика : Механика. Молекулярная физика : учеб. пособие для практических занятий. Ч. 1 / Д.Е. Капуткин, В.В. Пташинский, Ю.А. Рахштадт ; под ред. Д.Е. Капуткина. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2014. – 135 с.

ISBN 978-5-87623-740-8

Данное учебное пособие содержит задачи по основным разделам общего курса физики для выполнения домашних заданий. В начале каждого раздела приводятся основные законы и формулы, а также примеры решения и оформления типовых задач. Даны задачи для самостоятельной подготовки. В приложении содержатся некоторые справочные данные.

Предназначено для студентов НИТУ «МИСиС» всех направлений подготовки.

УДК 530.1

ISBN 978-5-87623-740-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ

Решение физических задач является необходимой составной частью изучения курса физики. Знакомясь с основными физическими законами, нужно учиться применять их к решению конкретных задач.

При практическом исследовании из всей совокупности физических величин, характеризующих какой-либо процесс или объект, одни удается измерить непосредственно, другие вычисляются косвенным путем на основании известных зависимостей. При использовании различных методов исследования те величины, которые измерялись непосредственно в одном случае, оказываются неизвестными, искомыми в другом. Поэтому надо уметь подходить к анализу одного и того же явления с разных сторон, базируясь на различных совокупностях исходных данных.

Нахождение аналитического выражения, определяющего искомую величину через исходные данные, решение задачи в общем виде – это только часть дела. Ни одна задача, с которой в своей практической деятельности встречается инженер или научный сотрудник, не может считаться полностью решенной, пока не получено числовое значение искомой величины. Только тогда теоретический результат имеет практическую ценность, когда он может быть сопоставлен с экспериментальным. Поэтому умение вычислять результат с требуемой точностью по полученной формуле является совершенно необходимым. При подстановке исходных данных в окончательную формулу нужно следить за используемыми единицами измерения, уметь оценить порядок получаемого результата.

Помещенные в данном сборнике задачи сгруппированы по главам, охватывающим основные разделы общего курса физики. К каждой задаче, сформулированной в общем виде, дается в форме таблицы по 5 наборов числовых данных, обозначенных соответствующими номерами (шифрами). Величина, числовое значение которой требуется определить в данном шифре, обозначается знаком «?». Величины, обозначенные «–», для решения данного шифра не требуются, определять их не нужно.

Единицы измерения, в которых необходимо выразить определяемую величину, указаны в заголовке соответствующей графы таблицы числовых данных. Во многих случаях используются дольные или кратные от единиц системы СИ, а также другие единицы, применяемые в науке и технике. Таблицы единиц измерения физических величин, соотношения между различными единицами, приставки для образования кратных и дольных единиц, а также значения основных физических и астрономических постоянных содержатся в приложении (табл. П1 – П3).

В домашние задания, выполняемые студентами при изучении курса физики, включены задачи из настоящего сборника. Сроки сдачи домашних заданий устанавливаются семестровым графиком учебных занятий студентов. Номер варианта и номера задач, входящих в каждое задание, определяются маршрутом выполнения домашних заданий в соответствии с порядковыми номерами студентов по списку группы. Номер шифра выбирается также в соответствии с номером студента по списку согласно таблице:

Шифр	1	2	3	4	5
Номер студента по списку группы	01, 06, 11, 16, 21, 26	02, 07, 12, 17, 22, 27	03, 08, 13, 18, 23, 28	04, 09, 14, 19, 24, 29	05, 10, 15, 20, 25, 30

Задание должно быть оформлено в отдельной тонкой тетради школьного типа, на обложке которой указываются: группа, фамилия, порядковый номер студента по списку группы, номер задания, номер варианта, номера задач по сборнику, шифр.

При решении каждой задачи необходимо записать условия, дать чертеж, поясняющий задачу. На чертеже надо указать все рассматриваемые объекты, обозначения, векторы, систему координат. Необходимо разъяснить роль идеализации и допущений, сделанных в задаче.

Следует обосновать использование тех или иных физических законов и дать их математическую запись применительно к рассматриваемой задаче, выбрать при этом наиболее удобную для решения систему единиц (желательно СИ). Необходимо решить полученную систему уравнений и записать ответ (если возможно) в аналитическом виде. Затем произвести проверку размерности результата, а также сделать анализ полученного ответа.

Числовые данные следует подставлять в формулу только после того, как задача решена в общем виде. При этом их надо предварительно выразить в единицах одной системы (желательно СИ) – той же системы, в которой записаны все формулы. В случае, когда и в числитель, и в знаменатель формулы входят однородные величины (например, длина) с одинаковыми показателями степени, их допускается выражать в любых, но обязательно одинаковых единицах.

После подстановки числовых данных производится вычисление значения неизвестной величины. При расчетах следует руководствоваться правилами приближенных вычислений (например, если сомножители содержат по 4 значащих цифры, то произведение следует округлить до 3 значащих цифр, избегая лишних десятичных знаков).

Получив результат, необходимо указать сокращенное наименование или размерность единицы измерения искомой величины в той системе, в которой производилось вычисление. Затем, если нужно, выразить ответ в тех единицах, которые указаны в заголовке соответствующей графы таблицы числовых данных.

Глава 1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

1.1.1. Поступательное движение

Поступательным называется такое движение абсолютно твердого тела, при котором все точки его совершают одинаковые перемещения, т.е. описывают *конгруэнтные* – одинаковые по форме и протяженности – *траектории*. Для описания поступательного движения используется модель материальной точки.

Кинематические уравнения поступательного движения материальной точки в координатной форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.1.1}$$

Кинематическое уравнение движения в векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ . \tag{1.1.2}$$

Кинематическое уравнение движения в траекторной форме:

$$S = S(t). \tag{1.1.3}$$

Линейная скорость материальной точки:
при траекторном описании
– средняя *путевая* скорость

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{1.1.4}$$

где Δs – путь, пройденный за время Δt;

– мгновенная скорость

$$\mathrm{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \mathrm{v} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}; \tag{1.1.5}$$

при векторном описании
– средняя скорость *перемещения*

$$\langle \vec{\mathrm{v}} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \tag{1.1.6}$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение за время Δt;

– мгновенная скорость

$$\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{\mathrm{v}} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.1.7)$$

Линейное ускорение материальной точки:
– среднее ускорение

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t}; \qquad (1.1.8)$$

– мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (1.1.9)$$

Вектор ускорения $\vec{a}$ может быть представлен как сумма тангенциальной (касательной) $\vec{a}_\tau$ и нормальной $\vec{a}_n$ составляющих (рис. 1.1.1 и 1.1.2):

$$\left.\begin{aligned} &\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|\vec{\mathrm{v}}|\vec{\tau}\right) = \vec{\tau}\frac{\mathrm{d}|\vec{\mathrm{v}}|}{\mathrm{d}t} + |\vec{\mathrm{v}}|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \\ &|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.10)$$

где $|\vec{a}|$ – модуль ускорения.

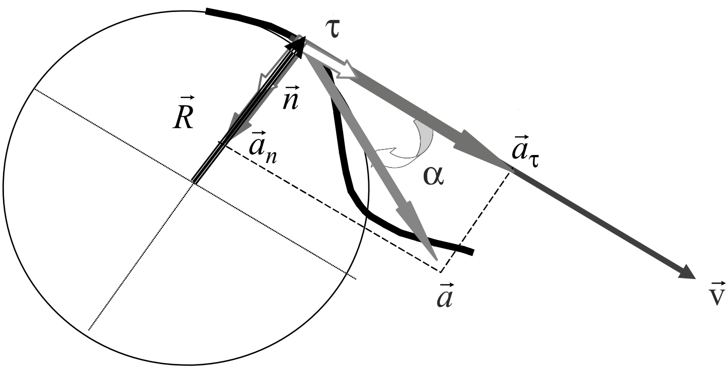


Рис. 1.1.1. Тангенциальное и нормальное ускорения
при ускоренном движении

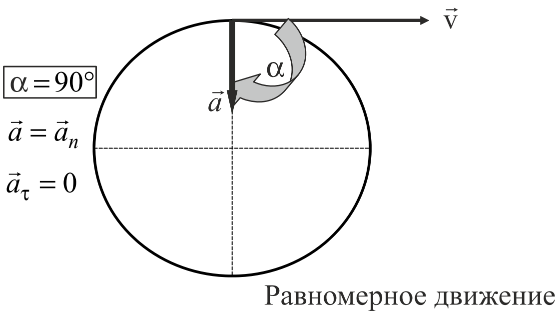


Рис. 1.1.2. Тангенциальное и нормальное ускорения
при равномерном движении материальной точки по окружности

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по направлению:

$$\vec{a}_n = |\vec{\mathrm{v}}|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{v}^2}{R}\vec{n} = -\frac{\mathrm{v}^2}{R}\frac{\vec{R}}{R}, \qquad (1.1.11)$$

где R – радиус окружности;
$\vec{n}$ – нормальный орт.

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\frac{\mathrm{d}|\vec{\mathrm{v}}|}{\mathrm{d}t}, \qquad (1.1.12)$$

где $\vec{\tau}$ – тангенциальный орт.

Значения a_τ и a_n определяют характер и траекторию движения (табл. 1.1.1).

Таблица 1.1.1

$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\|\vec{\mathrm{v}}\|}{\mathrm{d}t}$	$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R}$	Движение	Траектория
0	0	Равномерное	Прямолинейная
$\neq 0$	0	Переменное	Прямолинейная
0	$\neq 0$	Равномерное	Криволинейная
$\neq 0$	$\neq 0$	Переменное	Криволинейная

Движение называется *равнопеременным*, если модуль тангенциального ускорения $|\vec{a}_\tau| = \mathrm{const}$.

В равнопеременном движении кинематические уравнения в *координатной* форме:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \text{const}, \\ \mathrm{v}_x(t) &= \mathrm{v}_{0x} + a_x t, \\ x(t) &= x_0 + \mathrm{v}_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.13)$$

Здесь величины x_0 и v_{0x} есть начальные (в момент времени $t = 0$) значения абсциссы и проекции скорости соответственно.

1.1.2. Простое вращение абсолютно твердого тела (осевое вращение)

Кинематическое уравнение простого вращательного движения абсолютно твердого тела. относительно оси z при координатном способе записи

$$\varphi_z = \varphi_z(t). \qquad (1.1.14)$$

В *векторном* способе записи уравнение простого вращательного движения абсолютно твердого тела

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t),$$

где $\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота, направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта (рис. 1.1.3). Модуль вектора $\vec{\varphi}$ равен значению угла поворота, выраженному в радианах.

Угловая скорость (*мгновенная*) абсолютно твердого тела

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.1.15)$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения в соответствии с правилом правого винта (рис. 1.1.4).

Угловое ускорение (мгновенное) $\vec{\beta}$ абсолютно твердого тела (рис. 1.1.5)

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (1.1.16)$$

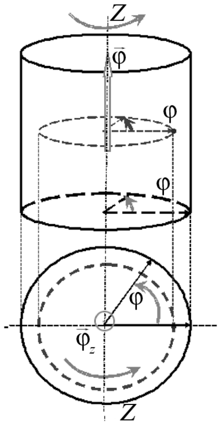


Рис. 1.1.3. Простое (осевое) вращение абсолютно твердого тела; $\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота

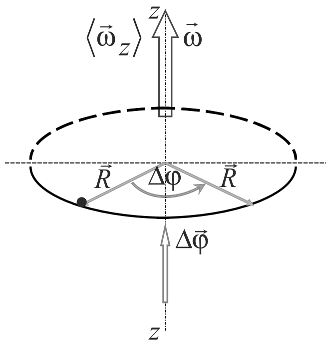
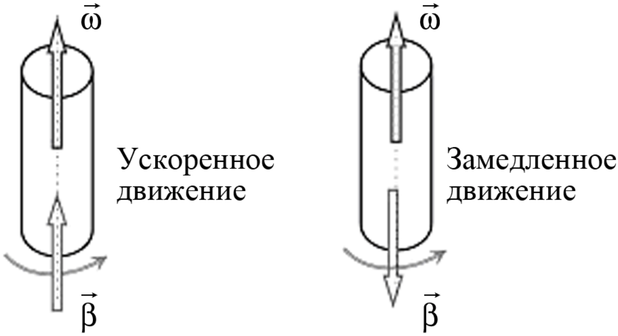


Рис. 1.1.4. Векторы углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$

В равнопеременном вращении кинематические уравнения в *координатной* форме:

$$\left.\begin{aligned}&\beta_z = \text{const},\\ &\omega_z(t) = \omega_{0z} + \beta_z t,\\ &\varphi_z(t) = \varphi_{0z} + \omega_{0z}t + \frac{\beta_z t^2}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{1.1.17}$$

Здесь величины φ_{0z} и ω_{0z} есть начальные (в момент времени t = 0) значения соответствующих проекций.



а *б*

Рис. 1.1.5. Векторы угловой скорости и углового ускорения при ускоренном (*а*) и замедленном (*б*) вращениях

1.1.3. Взаимосвязь линейных и угловых характеристик движения

При осевом вращении каждая точка абсолютно твердого тела движется по орбите, т.е. ее движение является поступательным (рис. 1.1.6). Следовательно, угловые и линейные характеристики движения связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right], \tag{1.1.18}$$

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\beta}, \vec{R}\right], \tag{1.1.19}$$

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{R}\frac{\vec{R}}{R} = -\omega^2\vec{R}, \tag{1.1.20}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\beta^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}. \tag{1.1.21}$$

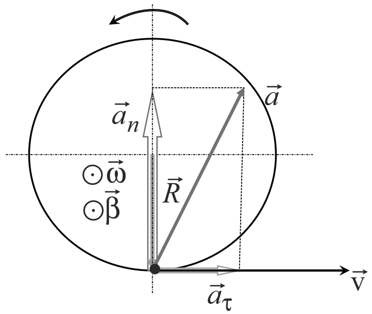


Рис. 1.1.6. Линейные и угловые характеристики ускоренного осевого вращения абсолютно твердого тела (или орбитального движения материальной точки)

Примеры решения задач

Пример 1.1.1. Тело брошено под углом $\alpha = 60°$ к горизонту в однородном *гравитационном поле Земли* напряженностью g. Величина g имеет размерность ускорения и поэтому носит название *ускорения свободного падения* (напряженность гравитационного поля других планет обозначается буквой G). Выведите кинематические уравнения движения и уравнение траектории. Определите начальную скорость v_0 тела, если оно побывало на одной и той же высоте спустя $t_1 = 1$ с и $t_2 = 3$ с после начала движения, и величину этой высоты h (рис. 1).

Найдите тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в начальный момент движения.

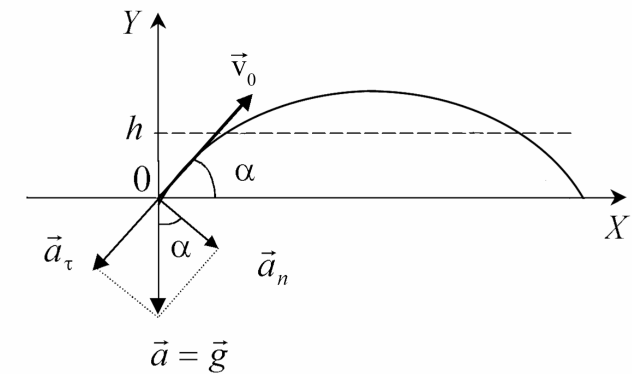


Рис. 1

Решение

По условию задачи

$$y(t_1) = y(t_2) = h. \tag{1}$$

Поскольку

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

то

$$(v_0 \sin\alpha)t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = (v_0 \sin\alpha)t_2 - \frac{gt_2^2}{2}. \tag{2}$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2\sin\alpha}. \tag{3}$$

Тогда в соответствии с формулой (2)

$$h = y(t_1) = \frac{g(t_1 + t_2)t_1}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1 t_2}{2}. \tag{4}$$

Нормальное и тангенциальное ускорения равны

$$a_n = g\cos\alpha,$$

$$a_\tau = g\sin\alpha.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\mathrm{v}_0 = \frac{9{,}81(1+3)}{2\sin 60^\circ} = 22{,}7 \text{ м/с},$$

$$a_n = 9{,}81\cos 60^\circ = 4{,}91 \text{ м/с}^2,$$

$$a_\tau = 9{,}81\sin 60^\circ = 8{,}50 \text{ м/с}^2,$$

$$h = \frac{9{,}81 \cdot 1 \cdot 3}{2} = 14{,}7 \text{ м}.$$

Пример 1.1.2. Спутник движется по круговой орбите на высоте h = 500 км над поверхностью Марса (рис. 1). Найдите орбитальную скорость спутника, если масса Марса равна M = 6,4 · 10^{23} кг, а радиус планеты равен $R_{\text{М}}$ = 3,4 Мм.

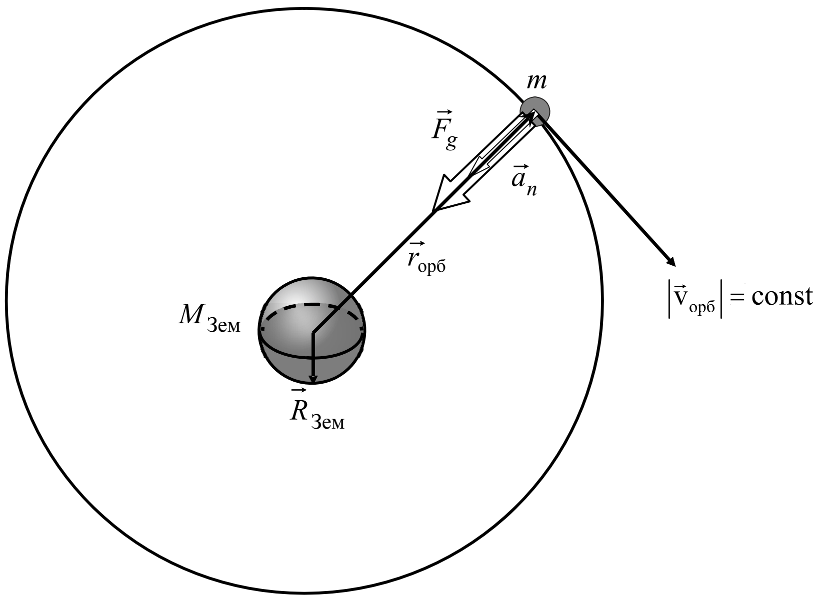


Рис. 1

Решение

В соответствии с условием задачи необходимо определить круговую (т.е. *первую космическую*) скорость спутника. Используем формулу

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}, \tag{1}$$

где $r = R_{\text{М}} + h$.

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{23}}{3{,}4 \cdot 10^{6} + 5 \cdot 10^{5}}} = 3{,}31 \text{ км/с}.$$

Пример 1.1.3. Материальная точка начинает двигаться по окружности, радиус которой r = 10 см, с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,4 см/с^2= $4{\cdot}10^{-3}$ м/с^2. Через какой промежуток времени t вектор ускорения $\vec{a}$ образует с вектором скорости $\vec{v}$ угол $\gamma = 60°$? Какой путь S пройдет за это время движущаяся точка? На какой угол φ повернется радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из центра окружности к движущейся точке? Движение происходит по часовой стрелке (рис. 1).

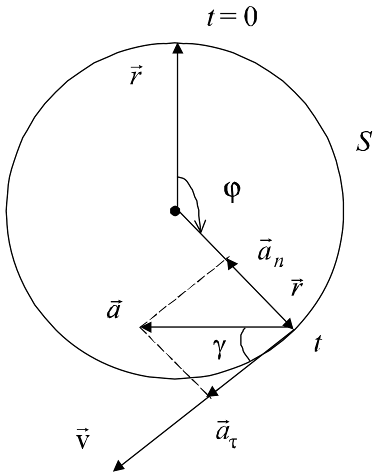


Рис. 1

Решение

Материальная точка движется по окружности. Поскольку движение равноускоренное, то модуль скорости $|\vec{v}|$ движущейся точки, а следовательно, и модуль нормального ускорения непрерывно возрастают со временем. Тангенциальное ускорение, по условию задачи, постоянно. Следовательно, вектор полного ускорения $\vec{a}$ со временем изменяется как по модулю, так и по направлению.

Угол γ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{v}$ зависит от соотношения между нормальным a_n и касательным a_τ ускорениями:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{v^2}{ra_\tau}. \qquad (1)$$

Постоянство тангенциального ускорения позволяет найти уравнение, описывающее изменение со временем пути S, пройденного точкой, или угла поворота φ радиус-вектора $\vec{r}$ (см. рис. 1).

Следовательно, мгновенная скорость движущейся точки (при условии, что $v_0 = 0$)

$$v = a_\tau t. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), получаем

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{(a_\tau t)^2}{ra_\tau} = \frac{a_\tau t^2}{r}.$$

Тогда время будет равно

$$t = \sqrt{\frac{r\operatorname{tg}\gamma}{a_\tau}}. \qquad (3)$$

Путь может быть найден с учетом уравнения (2):

$$S = \int_0^t v\,dt = \int_0^t a_\tau t\,dt = \frac{a_\tau t^2}{2}. \qquad (4)$$

Угол поворота изменяется со временем также по квадратичному закону:

$$\varphi = \frac{S}{r} = \frac{a_\tau t^2}{2r}. \qquad (5)$$

Подставим числовые значения в формулы (3) – (5) и выполним вычисления:

$$t = \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot \mathrm{tg}60^\circ}{0{,}004}} = 6{,}58\ \text{с},$$

$$S = \frac{0{,}004 \cdot 6{,}58^2}{2} = 8{,}66\ \text{см},$$

$$\varphi = \frac{0{,}004 \cdot 6{,}58^2}{2 \cdot 0{,}1} = 0{,}866\ \text{рад}.$$

Домашние задания

Задача 1.1.1

Материальная точка движется так, что ее начальная скорость $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, а конечная $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$. Найдите вектор приращения скорости, приращение модуля скорости и модуль вектора приращения, а также определите величину модуля среднего ускорения спустя время *t*.

Шифр	*t,* с	$\Delta\vec{v}$	$\Delta\lvert\vec{v}\rvert$, м/с	$\lvert\Delta\vec{v}\rvert$, м/с	$\lvert a \rvert$, м/с^2
1	–	?	–	–	–
2	–	–	?	–	–
3	–	–	–	?	–
4	2	–	–	–	?
5	?	–	–	–	1,87

Задача 1.1.2

Волчок вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω_1. Ось волчка с угловой скоростью ω_2 описывает конус, образуя с вертикалью угол α. Полная угловая скорость волчка, равная по абсолютной величине ω, составляет с вертикалью угол β. Определите неизвестную величину.

Шифр	ω_1, рад/с	ω_2, рад/с	α, градус	ω, рад/с	β, градус
1	25	4,5	25,0	–	?
2	14	5,4	?	16	–
3	–	3,7	7,5	?	5
4	?	4,1	18,0	–	4
5	14	10,0	15,0	?	10

Задача 1.1.3

Колесо радиусом R вращается так, что зависимость от времени угла поворота радиуса колеса задается уравнением $\varphi(t) = 2t + t^3$ (рад). Для точек, лежащих на ободе колеса, определите неизвестную величину через время t после начала отсчета времени.

Шифр	R, м	t, с	$\lvert\vec{v}\rvert$, м/с	ω, рад/с	$\lvert\vec{a}_\tau\rvert$, м/с^2	$\lvert\vec{a}_n\rvert$, м/с^2	$\lvert\vec{a}\rvert$, м/с^2
1	0,1	2	?	–	–	–	–
2	0,1	2	–	?	–	–	–
3	0,1	2	–	–	?	–	–
4	0,1	2	–	–	–	?	
5	0,1	2	–	–	–	–	?

Задача 1.1.4

С башни высотой h брошен горизонтально камень со скоростью v_0. Камень упал на землю через время t со скоростью v на расстоянии L (по горизонтали) от подножия башни. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Определите неизвестную величину.

Шифр	h, м	v_0, м/с	t, с	v, м/с	L, м
1	?	25	–	40	–
2	35	15	–	–	?
3	–	?	2,2	38	–
4	–	10	2	?	–
5	–	–	3	?	45

Задача 1.1.5

Тело брошено со скоростью v_0 с башни высотой h вверх под углом α к горизонту и упало на землю через промежуток времени τ на расстоянии L (по горизонтали) от подножия башни. Определите неизвестную величину.

Шифр	v_0, м/с	α, градус	h, м	τ, с	L, м
1	–	48	?	3,2	40
2	?	45	2,4	–	37
3	50	?	7,5	4,1	–
4	18	45	14,0	–	?
5	–	45	10,0	?	65

Задача 1.1.6

Тело брошено с башни высотой h вверх под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Дальность бросания равна L (по горизонтали) от подножия башни, скорость в момент падения на землю v. Определите неизвестную величину.

Шифр	h, м	α, градус	v_0, м/с	L, м	v, м/с
1	19	?	17	24	–
2	28	54	?	15	–
3	37	21	5	?	–
4	?	46	23	65	–
5	16	35	–	15	?

Задача 1.1.7

С вершины холма, склон которого составляет с горизонтом угол β, брошен с начальной скоростью v_0 камень вверх под углом α к горизонту. Точка падения камня находится от вершины на расстоянии L (считая вдоль склона холма). Определите неизвестную величину.

Шифр	v_0, м/с	α, градус	β, градус	L, м
1	15	15	10	?
2	?	40	32	60
3	25	25	18	?
4	?	55	25	120
5	40	35	20	?

Задача 1.1.8

Спутник движется по круговой орбите со скоростью v на расстоянии h от поверхности планеты. Масса планеты равна $M = k \cdot M_З$, где $M_З$ – масса Земли. Радиус планеты равен R. Определите неизвестную величину.

Шифр	R, Мм	h, Мм	$k = M/M_З$	v, км/с
1	3,0	1,45	0,81	?
2	1,74	?	0,012	1,5
3	6,4	7,2	1,0	?
4	70,0	?	200,0	27,0
5	3,4	5,0	0,11	?

Задача 1.1.9

Скорость ракеты на высоте H, равной $x \cdot R_З$, где $R_З$ – радиус Земли, равна v. Ракета запущена с планеты с начальной скоростью v_0. Масса планеты равна $M = y \cdot M_З$, где $M_З$ – масса Земли. Определите неизвестную величину.

Шифр	v_0, км/с	v, км/с	x	y
1	11,2	?	1	1
2	?	7,93	1	1
3	10,4	7,38	0,95	?
4	5,0	?	0,53	0,011
5	?	2,34	0,27	0,0012

1.2. Динамика

1.2.1. Масса

Масса – скалярная физическая величина m, количественно характеризующая инертные и гравитационные свойства тела.

Инертная масса характеризует способность тела сопротивляться изменению своего состояния (покоя или движения), например во ***втором законе Ньютона***:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{m}, \qquad (1.2.1)$$

где $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ – сумма сил, действующих на тело.

Гравитационная масса характеризует способность тела создавать гравитационное поле и взаимодействовать с внешними гравитационными полями, например в ***законе всемирного тяготения:***

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = m\vec{g}\,, \qquad (1.2.2)$$

где γ – гравитационная постоянная;

M и m – массы взаимодействующих тел;

r – расстояние между телами;

$\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Согласно *принципу эквивалентности* гравитационной и инертной масс каждая масса является *одновременно* и инертной, и гравитационной.

1.2.2. Момент инерции

Момент инерции – физическая величина, количественно характеризующая инертность твердого тела, проявляющуюся во вращательном движении.

Момент инерции материальной точки (рис. 1.2.1):

$$\mathfrak{I} = mr^2, \qquad (1.2.3)$$

где m – масса материальной точки;

r – расстояние от оси вращения.

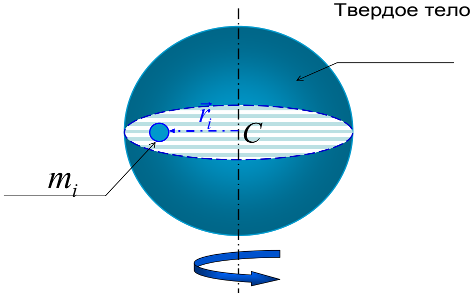


Рис. 1.2.1. К определению момента инерции материальной точки

Для системы абсолютно твердых тел момент инерции относительно оси (например, z) равен сумме моментов инерции всех тел относительно этой оси.

$$\mathfrak{I} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2. \qquad (1.2.4)$$

Момент инерции однородного твердого тела с плотностью ρ равен

$$\mathfrak{I} = \int_m r^2\,\mathrm{d}m = \int_V r^2\,\rho\,\mathrm{d}V. \qquad (1.2.5)$$

Теорема Штейнера: момент инерции $\mathfrak{I}$ тела относительно произвольной оси есть сумма момента инерции $\mathfrak{I}_C$ относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции тела (т. C) (см. рис. 1.2.1), и произведения массы m тела на квадрат расстояния d между осями:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_C + md^2. \qquad (1.2.6)$$

1.2.3. Импульс

Импульс – векторная физическая величина, количественно характеризующая запас (количество и направленность) поступательного движения:

$$\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}\ .$$

1.2.4. Момент импульса

Момент импульса $\vec{L}$ – физическая векторная величина, характеризующая количество и направленность запасенного твердым телом простого вращательного движения (или запас поступательного движения материальной точки в угловых характеристиках).

1.2.5. Осевой момент импульса

Вектор осевого момента импульса $\vec{L}_z^{\text{осев}}$ параллелен вектору угловой скорости, направлен по оси вращения и определяется по формуле

$$\vec{L}_z^{\text{осев}} = \Im\,\vec{\omega}_z\,, \qquad (1.2.7)$$

где $\vec{L}_z^{\text{осев}}$ – аксиальный вектор;

$\Im$ – момент инерции тела относительно оси Z (рис. 1.2.2);

$\vec{\omega}_z$ – угловая скорость твердого тела относительно оси Z.

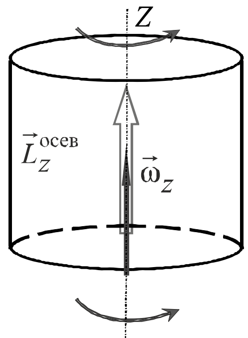


Рис. 1.2.2. Осевое вращение абсолютно твердого тела

1.2.6. Орбитальный момент импульса

Вектор орбитального момента импульса определяется как векторное произведение радиус-вектора центра инерции тела на его полный импульс:

$$\vec{L}^{\text{орбит}} = \left[\vec{R}_C, \vec{P} \right], \tag{1.2.8}$$

где $\vec{L}^{\text{орбит}}$ – аксиальный вектор.

Направление $\vec{L}^{\text{орбит}}$ находится по правилу правого винта.

Для материальной точки возможно только *поступательное* движение, которое также можно характеризовать орбитальным моментом импульса (рис. 1.2.3).

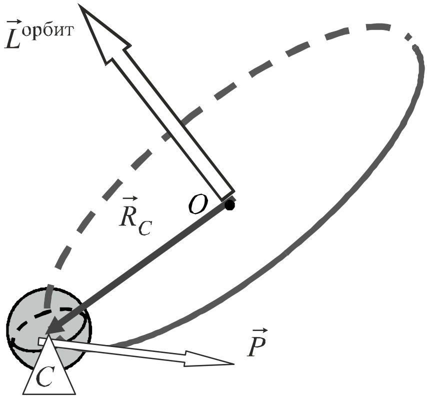


Рис. 1.2.3. Орбитальный момент импульса материальной точки

Для материальной точки

$$\vec{L}^{\text{орбит}} = [\vec{r},\ \vec{p}\,], \tag{1.2.9}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки;
$\vec{p}$ – импульс материальной точки.

1.2.7. Сила

Сила – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения – как по величине, так и по направлению – импульса тела в результате взаимодействия данного тела с другими телами или полями:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.2.10}$$

Это определение применимо и к потенциальным, и к непотенциальным силам.

1.2.8. Момент силы

Для описания вращательного движения понятие силы необходимо, но недостаточно.

Чтобы сила стала достаточной характеристикой, необходимо указать радиус-вектор, проведенный из т. O на оси вращения в точку приложения силы (рис. 1.2.4). *Момент силы* $\vec{M}_F$ является причиной возникновения и изменения вращательного движения.

Момент силы $\vec{M}_F$ относительно т. O равен

$$\vec{M}_{\vec{F}}\,(O) = [\vec{r}, \vec{F}]\,. \tag{1.2.11}$$

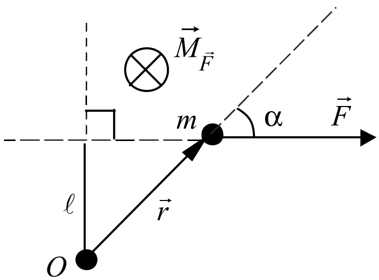


Рис. 1.2.4. Момент силы

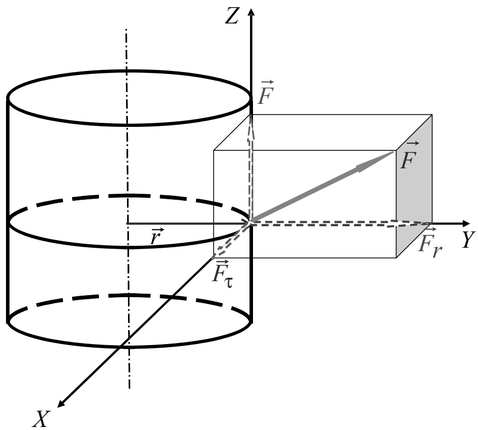


Рис. 1.2.5. Разложение силы $\vec{F}$ по осям координат

Если разложить силу $\vec{F}$ по осям координат так, как показано на рис. 1.2.5:

$$\vec{F} = \vec{F}_X + \vec{F}_Y + \vec{F}_Z = \vec{F}_\tau + \vec{F}_r + \vec{F}_\parallel\,, \tag{1.2.12}$$

то

$$\vec{M}_{\vec{F}} = [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}, \vec{F}_\tau] + [\vec{r}, \vec{F}_r] + [\vec{r}, \vec{F}_\parallel]. \tag{1.2.13}$$

Момент силы относительно оси Z создается только тангенциальной составляющей силы:

$$(\vec{M}_{\vec{F}})_Z = [\vec{r}, \vec{F}_\tau]. \tag{1.2.14}$$

1.2.9. Полная энергия. Формула Эйнштейна

Энергия – скалярная физическая величина, являющаяся полной и наиболее общей характеристикой состояния системы.

Состояние системы определяется ее движением и конфигурацией, т.е. взаимным расположением ее частей. Движение системы характеризуется *кинетической энергией* K, а конфигурация – *потенциальной энергией* U.

Полная энергия определяется как сумма

$$E = K + U + E_{\text{внутр}}, \tag{1.2.15}$$

где $E_{\text{внутр}}$ – внутренняя энергия тела.

Кинетическая и потенциальная энергии в сумме составляют *механическую энергию.*

Энергия тела в системе отсчета, связанной с его центром масс:

$$E_0 = E_{\text{внутр}} = \sum_i E_0^{(i)} + E_{\text{мех}}\,. \tag{1.2.16}$$

Формула Эйнштейна для полной энергии *свободной* частицы:

$$E = \gamma\, E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = mc^2, \tag{1.2.17}$$

где γ – релятивистский фактор;

c – скорость света в какууме.

В системе центра масс $m = m_0$ – *масса покоя*, а

$$E = E_0 = m_0 c^2 \tag{1.2.18}$$

– энергия покоя.

1.2.10. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия – это скалярная физическая величина, количественно характеризующая запас движения (табл. 1.2.1), которое может превращаться в другой вид движения, а энергия, соответственно, – в другую, например – в *потенциальную энергию.*

Релятивистская кинетическая энергия определяется по формуле

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = E_0(\gamma - 1) = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \tag{1.2.19}$$

где $\beta = \dfrac{v}{c}$.

При малых скоростях $\beta << 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2,$$

поэтому

$$K = E_0 \frac{1}{2}\beta^2 = m_0 c^2 \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0 v^2}{2}. \qquad (1.2.20)$$

Таблица 1.2.1

Материальная точка	$K = \dfrac{mv^2}{2}, (m \equiv m_0)$
Система материальных точек или абсолютно твердое тело (в поступательном движении)	$K = \dfrac{1}{2} M v_C^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_C^2}{M} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{P}_C, \vec{v}_C\right)$, где $M = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$
Абсолютно твердое тело (во вращательном или в орбитальном движениях)	$K = \dfrac{1}{2}\Im\omega^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{L^2}{\Im} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{L}, \vec{\omega}\right)$

1.2.11. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия – скалярная физическая величина, характеризующая взаимодействие тел с другими телами или с полями. Потенциальная энергия характеризует скрытый запас энергии, который определяется конфигурацией системы, т.е. взаимным расположением частей системы.

Упругое взаимодействие (рис. 1.2.6):

$$U = \frac{kx^2}{2}, \qquad (1.2.21)$$

где k – коэффициент упругости.

Гравитационное взаимодействие:

а) точечных масс (рис. 1.2.7)

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}; \qquad (1.2.22)$$

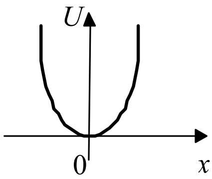


Рис. 1.2.6. Потенциальная кривая упругого взаимодействия

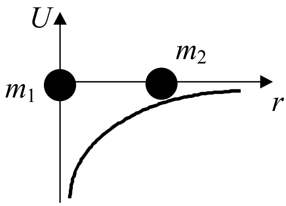


Рис. 1.2.7. Потенциальная кривая гравитационного взаимодействия точечных масс

б) в однородном гравитационном поле ($\vec{g}$ = const) (рис. 1.2.8)

$$U = mgh. \qquad (1.2.23)$$

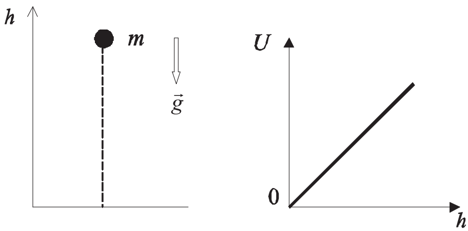


Рис. 1.2.8. Потенциальная кривая взаимодействия точечной массы с однородным гравитационным полем

1.2.12. Работа

Работа (A) – скалярная физическая величина, характеризующая изменение энергии:

$$A = \int_1^2 \mathrm{d}E = \Delta E\ . \qquad (1.2.24)$$

Работа силы $\vec{F}$ на пути $\mathrm{d}\vec{S}$ равна (в *линейных* характеристиках)

$$A = \int_1^2 \left(\mathrm{d}\vec{p}, \vec{\mathrm{v}}\right) = \int_1^2 \left(\vec{F}, \mathrm{d}\vec{S}\right). \qquad (1.2.25)$$

Работа при повороте, характеризуемом вектором углового перемещения $\mathrm{d}\vec{\varphi}$, равна (в *угловых* характеристиках)

$$A=\int_{1}^{2}\left(\mathrm{d}\vec{L},\vec{\omega}\right)=\int_{1}^{2}\left(\vec{M},\mathrm{d}\vec{\varphi}\right). \qquad (1.2.26)$$

1.2.13. Мощность сил

Мощность (N) характеризует быстроту совершения работы или быстроту изменения энергии:

$$N=\frac{\delta A}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.2.27)$$

В стационарных силовых полях, где $\vec{F}\neq\vec{F}(t)$:

– в поступательном движении

$$N=d\,\frac{\delta A}{\mathrm{d}t}=\frac{(\vec{F},\mathrm{d}\vec{S})}{\mathrm{d}t}=(\vec{F},\vec{\mathrm{v}}); \qquad (1.2.28)$$

– во вращательном движении

$$N=\frac{\delta A}{\mathrm{d}t}=\frac{(\vec{M},\mathrm{d}\vec{\varphi})}{\mathrm{d}t}=(\vec{M},\ \vec{\omega}). \qquad (1.2.29)$$

1.2.14. Законы динамики

Основной закон динамики материальной точки (второй закон Ньютона):

$$\vec{a}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i, \qquad (1.2.30)$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \qquad (1.2.31)$$

Основной закон динамики абсолютно твердого тела

В орбитальном (поступательном) движении (в угловых характеристиках):

$$\vec{\beta}=\frac{1}{\mathfrak{I}}\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i, \qquad (1.2.32)$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}^{\text{орбит}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left[\vec{R}\vec{p}\right]}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i\,. \tag{1.2.33}$$

Основной закон динамики движения абсолютно твердого тела в простом (осевом) вращении

Уравнения, выражающие этот закон, аналогичны уравнениям для орбитального движения материальной точки:

$$\vec{\beta}=\frac{1}{\Im}\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i \tag{1.2.34}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}^{\text{осев}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\Im\vec{\omega}\right)}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i\,, \tag{1.2.35}$$

но под действием суммы моментов изменяется во времени *осевой* момент импульса и возникает угловое ускорение (рис. 1.2.9):

$$\vec{M}=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i=\left[\vec{r},\vec{F}_\tau\right]=\frac{\mathrm{d}\vec{L}^{\text{осев}}}{\mathrm{d}t}=\Im\vec{\beta}\,. \tag{1.2.36}$$

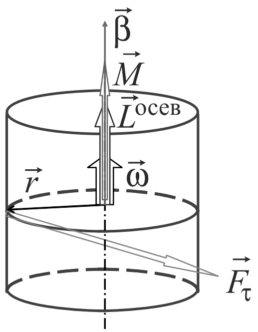


Рис. 1.2.9. Ускоренное вращение абсолютно твердого тела

Примеры решения задач

Пример 1.2.1. Через блок в виде диска массой m_0 перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузики массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$) (рис. 1). Трением в системе блок–ось следует пренебречь. С каким ускорением будут двигаться грузики, если их предоставить самим себе?

Решение

Сначала рассмотрим поступательное движение грузиков m_1 и m_2 как материальных точек, чьи массы сосредоточены в их центрах инерции (см. рис. 1).

Уравнения второго закона Ньютона будут выглядеть так:

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1, \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Силы натяжения нитей T_1 и T_2 не могут быть равными, так как мы должны учитывать вращение блока, масса которого не равна нулю. Модули ускорений грузиков равны между собой ($|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$) из-за нерастяжимости нити.

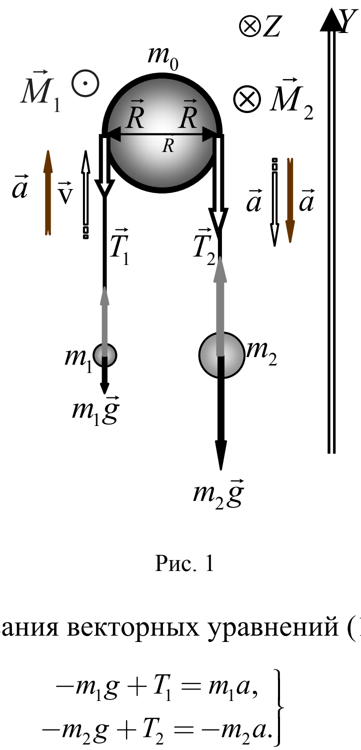


Рис. 1

После проецирования векторных уравнений (1) на ось Y получаем

$$\left.\begin{aligned} -m_1 g + T_1 = m_1 a, \\ -m_2 g + T_2 = -m_2 a. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Теперь рассмотрим простое (осевое) вращение блока массой m_0 относительно оси Z, проходящей через центр инерции диска перпендикулярно его плоскости (см. рис. 1). Вращение блока является результатом совместного действия моментов сил натяжения:

$$\left.\begin{aligned} \vec{M}_1 &= \left[\vec{R}, \vec{T}_1\right], \\ \vec{M}_2 &= \left[\vec{R}, \vec{T}_2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Поэтому уравнение основного закона динамики для осевого вращения блока представим в виде

$$\left[\vec{R}, \vec{T}_1\right] + \left[\vec{R}, \vec{T}_2\right] = \Im\,\vec{\beta}, \tag{4}$$

где $\vec{\beta}$ – угловое ускорение вращения блока.

Так как ускорение поступательного и прямолинейного движения грузиков является тангенциальным, то

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\beta}, \vec{R}\right], \tag{5}$$

откуда (в модулях)

$$\beta = \frac{a}{R}. \tag{6}$$

Момент $\vec{M}_1$ будет вращать блок против часовой стрелки, а момент $\vec{M}_2$ – по часовой стрелке. Принимая направление вращения по часовой стрелке за положительное и с учетом того, что $m_2 > m_1$, после проецирования уравнения (4) на ось вращения Z (направлена «от нас»), получаем

$$-RT_1 + RT_2 = \frac{1}{2} m_0 R^2 \frac{a}{R}. \tag{7}$$

Таким образом, полная система уравнений динамики для данного движения грузиков и блока имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &-m_1 g + T_1 = m_1 a, \\ &-m_2 g + T_2 = -m_2 a, \\ &-RT_1 + RT_2 = \frac{1}{2} m_0 R^2 \frac{a}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Решив совместно эти три уравнения, получим

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_0}{2}}, \qquad (9)$$

что совпадает с результатом формулы (7) в Примере 1.3.2.

Пример 1.2.2. Однородный шар массой m скатывается с наклонной плоскости высотой h (рис. 1, 2). Найдите конечную линейную скорость движения шара (на выходе с наклонной плоскости).

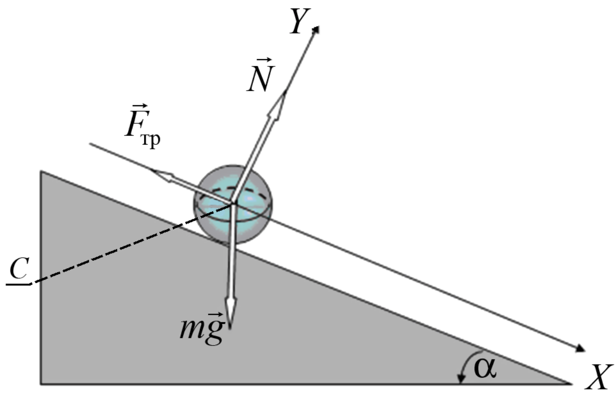


Рис. 1

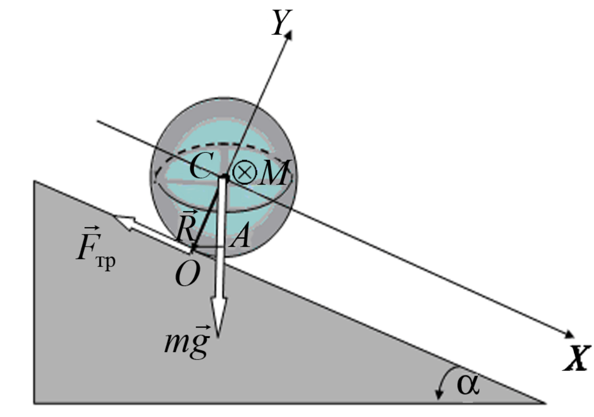


Рис. 2

Решение

На шар (рис. 1) действуют три силы – тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Рассмотрим поступательное движение шара как движение материальной точки. Указанные выше три силы приложены в центре инерции – т. C.

Уравнение основного закона динамики материальной точки (второй закон Ньютона):

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} = m\vec{a} . \qquad (1)$$

В проекциях на оси координат

$$\left.\begin{aligned} X:&\quad mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma,\\ Y:&\quad -mg\cos\alpha + N = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где α – предполагаемый угол между наклонной плоскостью и ее основанием.

Вращающий момент может быть создан или силой трения относительно центра инерции (т. C), или силой тяжести относительно мгновенного центра вращения (т. O) (рис. 2).

1. Рассмотрим случай, когда вращение относительно центра инерции (т. C) создается силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (см. рис. 1).

Уравнение основного закона динамики для осевого вращения шара:

$$\vec{M} = \left[\vec{R}, \vec{F}_{\text{тр}}\right] = \Im_C\vec{\beta} , \qquad (3)$$

где $\Im_C$ – момент инерции шара относительно оси, проходящей через т. C;

$\vec{\beta}$ – угловое ускорение шара.

В проекции на ось вращения, проходящую через т. C, уравнение (3) запишется так:

$$RF_{\text{тр}} = \Im_C\beta. \qquad (4)$$

Поскольку

$$\Im_C = \frac{2}{5}mR^2 , \qquad (5)$$

а

$$\beta = \frac{a}{R} , \qquad (6)$$

где a – тангенциальное ускорение шара в прямолинейном поступательном движении,

то уравнение (4) может быть записано так:

$$RF_{\text{тр}} = \frac{2}{5} mR^2 \frac{a}{R}, \quad \text{или} \quad F_{\text{тр}} = \frac{2}{5} ma. \tag{7}$$

Объединим в систему уравнения (2) и (7). Получим

$$\left.\begin{aligned} mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} &= ma, \\ F_{\text{тр}} &= \frac{2}{5} ma. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где угол $\alpha = \angle OCA$.

Отсюда

$$mg\sin\alpha = \frac{7}{5} ma, \quad \text{или} \quad g\sin\alpha = \frac{7}{5} a. \tag{9}$$

Поскольку из кинематики известно, что

$$\text{v}^2 = 2\alpha\ell, \tag{10}$$

а из геометрии известно, что

$$\ell = \frac{h}{\sin\alpha}, \tag{11}$$

то после подстановки в (10) формул (11) и (9) получим

$$\text{v} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}, \tag{12}$$

что совпадает с результатом (8) в Примере 1.3.3.

2. Рассмотрим случай, когда вращение относительно т. O создается силой тяжести $m\vec{g}$ (см. рис. 2).

Уравнение основного закона динамики для осевого вращения

$$\vec{M} = \left[\vec{R}, m\vec{g}\right] = \Im_O \vec{\beta}, \tag{13}$$

или, в проекции на мгновенную ось вращения, проходящую через т. O,

$$Rmg\sin\alpha = \Im_O\beta, \tag{14}$$

где $\alpha = \angle OCA$ – равен углу между наклонной плоскостью и ее основанием, а

$$\beta = a/R.$$

Произведение $R\sin\alpha = OA$ (см. рис. 2) представляет собой плечо силы тяжести. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через т. O, найдем по теореме Штейнера:

$$\Im_O = \Im_C + mR^2. \tag{15}$$

Таким образом, уравнение (14) может быть переписано в виде

$$Rmg\sin\alpha = \left(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right)\frac{a}{R}. \tag{16}$$

Поскольку из кинематики следует, что

$$\text{v}^2 = 2a\ell, \tag{17}$$

а из геометрии известно, что

$$\ell = \frac{h}{\sin\alpha}, \tag{18}$$

то после подстановки (16) и (18) в формулу (17) получим

$$\text{v} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}, \tag{19}$$

что совпадает с результатом формулы (12) в данном Примере и с результатом формулы (8) в Примере 1.3.3.

Домашние задания

Задача 1.2.1

К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через закрепленный блок, подвешены два груза массами $m_1 = m_2$. На один из грузов положен перегрузок массой m_3. Перегрузок давит на груз с силой N. Трением в осях следует пренебречь. Блок считайте колесом, масса которого M распределена равномерно по ободу. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	M, кг	N, Н
1	1	1	0,5	1	?
2	?	–	0,5	2	4
3	–	0,8	?	1,5	3,5
4	1	–	0,6	2	?
5	–	?	0.4	2.2	3,5

Задача 1.2.2

На гладком столе лежит брусок массой M кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых m_1 и m_2. Силы натяжения каждого из шнуров равны соответственно T_1 и T_2. Ускорение, с которым движется брусок, равно a. Массой блоков и трением следует пренебречь. Определите неизвестную величину.

Шифр	M, кг	m_1, кг	m_2, кг	a, м/с^2	T_1, Н	T_2, Н
1	4	1	2	?	11,2	16,8
2	?	2	3	1,4	–	–
3	3	?	1	1	5,83	–
4	1	3	?	2	–	37,4
5	2	3	4	1,09	?	–

Задача 1.2.3

К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный невесомый блок, подвешены два груза массами M_1 и M_2 каждый. На один из грузов положен перегрузок массой m. Сила, с которой перегрузок давит на груз, равна N. Ускорение, с которым движутся грузы, равно a. Трением следует пренебречь. Определите неизвестную величину.

Шифр	M_1, кг	M_2, кг	m, кг	a, м/с^2	N, Н
1	1	1	0,5	–	?
2	?	3	–	2	3
3	3	?	–	3	2
4	1	3	?	–	4
5	1	2	–	?	4

Задача 1.2.4

К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы массами m_1 и m_2. Ускорение, с которым движутся грузы, равно a. Сила натяжения шнура равна T.

Во время движения грузов весы показывают значение P. Массой блока и шнура следует пренебречь. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	T, Н	a, м/с^2	P, Н
1	1,5	3	–	–	?
2	?	3	24,5	1,63	–
3	–	?	30	3,8	–
4	2	4	–	?	49
5	3	–	?	–	–

Задача 1.2.5

По горизонтальной поверхности с коэффициентом трения k движется брусок массой m_1, соединенный при помощи перекинутой через блок нити со свисающим бруском массой m_2. Ускорение брусков равно a, сила натяжения нити T. Определите неизвестную величину.

Шифр	k	m_1, кг	m_2, кг	a, м/с^2	T, Н
1	0,20	0,36	0,52	–	?
2	0,15	8,3	?	2,7	–
3	0,10	4,1	7,9	?	–
4	?	0,24	0,38	1,9	–
5	0,20	?	0,45	–	1,63

Задача 1.2.6

Шарик массой m, прикрепленный с помощью нити длиной L к вращающейся вертикальной оси, описывает окружность в горизонтальной плоскости, совершая в единицу времени n оборотов. При этом нить образует с вертикалью угол β, а сила ее натяжения равна T. Определите неизвестную величину.

Шифр	m, г	L, см	n, об/мин	β, градус	T, Н
1	220	?	45	–	3,5
2	–	48	?	60	–
3	760	92	58	–	?
4	–	88	60	?	–
5	320	90	62	–	?

Задача 1.2.7

Тело соскальзывает с высоты h по наклонной плоскости с углом β и движется далее по горизонтальному участку. Путь, пройденный телом по горизонтальному участку до полной остановки, равен S.

Коэффициент трения на наклонном и горизонтальном участках одинаков и равен k. Определите неизвестную величину.

Шифр	h, м	β, градус	S, м	k
1	3,7	30	?	0,15
2	?	60	28	0,25
3	1,5	45	2,9	?
4	2,4	?	4,5	0,2
5	4,2	60	?	0,10

Задача 1.2.8

На верхнем конце наклонной плоскости укреплен легкий блок, через который перекинута нить с грузами массами m_1 и m_2 на концах. Груз m_1 скользит вниз по наклонной плоскости, поднимая висящий на другом конце груз массой m_2. Угол наклонной плоскости с горизонтом α, коэффициент трения между грузом массой m_1 и плоскостью равен k, ускорение грузов a. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	α, градус	k	a, м/с^2
1	6,7	?	17	0,2	0,40
2	?	2,3	25	0,1	0,45
3	1,7	0,7	48	?	2,10
4	7,4	3,8	?	0,3	0,84
5	5,1	2,5	37	0,1	?

Задача 1.2.9

На горизонтальный вал радиусом R с моментом инерции $\Im$ намотана нить, к концу которой привязан груз массой m. Груз опускается с ускорением a, при этом сила натяжения нити равна T. Определите неизвестную величину.

Шифр	R, см	$\Im$, кг·м^2	m, кг	a, м/с^2	T, Н
1	47	1,3	3,4	–	?
2	36	2,8	5,3	?	–
3	86	?	7,7	2,7	–
4	53	3,8	?	1,5	–
5	?	0,8	4,2	0,8	–

Задача 1.2.10

Через блок, представляющий собой однородный диск радиусом R и массой m_1, перекинута нить с грузами массами m_2 и m_3 на концах.

Угловое ускорение блока равно β, ускорение грузов равно a. Определите неизвестную величину.

Шифр	R, см	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	β, рад/с^2	a, м/с^2
1	?	0,65	0,82	0,49	18	–
2	–	?	2,4	1,9	–	0,95
3	25	4,8	3,6	1,4	?	–
4	–	0,95	2,1	1,4	–	?
5	30	0,80	?	2,4	21	–

Задача 1.2.11

Шкив с моментом инерции $\mathfrak{I}$ имеет две цилиндрические ступени радиусами R_1 и R_2. На цилиндры намотаны в противоположных направлениях нити с грузами массой m_1 и m_2 на концах. Угловое ускорение шкива равно β, причем $\beta > 0$, если груз массой m_1 опускается. Определите неизвестную величину.

Шифр	$\mathfrak{I}$, кг·м^2	R_1, см	R_2, см	m_1, кг	m_2, кг	β, рад/с^2
1	1,4	23,0	34,0	1,70	?	–1,5
2	7,2	29,0	44,0	?	2,10	+0,7
3	0,4	14,0	19,0	0,63	0,48	?
4	0,015	7,3	12,1	0,26	0,18	?
5	?	19,0	27,0	0,50	0,75	–1,2

Задача 1.2.12

Тела массами m_1 и m_2 связаны невесомой нерастяжимой нитью. Тело массой m_1 находится на гладкой горизонтальной поверхности, а тело массой m_2 висит на нити, перекинутой через блок, укрепленный у края стола. Ускорение, с которым будет двигаться тело массой m_2, если второе тело отпустить, равно a. Трением в осях следует пренебречь. Блок считайте колесом, масса которого M распределена равномерно по ободу. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	M, кг	a, м/с^2
1	20	5	1	?
2	?	4	2	2
3	15	?	3	1,5
4	10	3	?	2
5	15	4	1,8	?

1.3. Законы сохранения

1.3.1. Закон сохранения импульса

Для замкнутых систем справедлив *закон сохранения импульса* – полный (суммарный) импульс замкнутой системы тел сохраняется при любых процессах, происходящих в этой системе:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const}, \qquad (1.3.1)$$

или

$$m_1\vec{\text{v}}_1 + m_2\vec{\text{v}}_2 + \ldots + m_N\vec{\text{v}}_N = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + \ldots + m_N\vec{u}_N, \qquad (1.3.2)$$

где $\vec{\text{v}}_i$ – скорость *i*-й материальной точки до взаимодействия;

$\vec{u}_i$ – ее скорость после взаимодействия (i = 1, …, N).

1. Закон сохранения импульса замкнутой системы можно рассматривать как обобщение *закона инерции* – ***первого закона Ньютона*****:** для свободно движущейся частицы (одной материальной точки, $N = 1$)

$$m\vec{\text{v}} = \text{const} \Rightarrow \vec{\text{v}} = \text{const} \Rightarrow \vec{a} = 0\,. \qquad (1.3.3)$$

2. Рассмотрим замкнутую систему двух (N = 2) материальных точек (рис. 1.3.1):

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}, \qquad (1.3.4)$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = 0\,. \qquad (1.3.5)$$

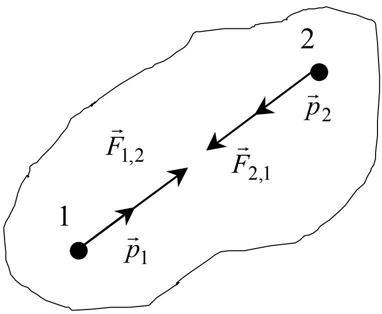


Рис. 1.3.1. Взаимодействие двух материальных точек

Следовательно, векторная сумма сил будет равна нулю:

$$\vec{F}^{1\to 2}+\vec{F}^{2\to 1}=0\,, \qquad (1.3.6)$$

и это выражает ***третий закон Ньютона*** – действие равно противодействию.

1.3.2. Закон сохранения момента импульса

В замкнутой системе суммарный момент импульса сохраняется:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i=\text{const}\,. \qquad (1.3.7)$$

1.3.3. Закон сохранения энергии

Энергия тела в системе отсчета, связанной с его центром масс:

$$E_0=E_{\text{внутр}}=\sum_i E_0^{(i)}+E_{\text{мех}}\,. \qquad (1.3.8)$$

1. ***Взаимодействие тел без диссипации (рассеяния) энергии***

Механическая энергия замкнутой и изолированной от любых внешних воздействий системы тел, в которой действуют лишь консервативные силы, есть величина постоянная:

$$E'_{\text{мех}}\;=\;E''_{\text{мех}}\;\text{ и }\left(\sum_i E_0^{(i)}\right)'=\left(\sum_i E_0^{(i)}\right)''\,. \qquad (1.3.9)$$

2. ***Взаимодействие тел при наличии диссипации энергии***

В замкнутой и изолированной системе остается постоянной сумма всех видов энергии (включая и немеханические):

$$\left(\sum_i E_0^{(i)}\right)'+E'_{\text{мех}}=\left(\sum_i E_0^{(i)}\right)''+E''_{\text{мех}}\,. \qquad (1.3.10)$$

При неупругих взаимодействиях внутренняя энергия изменяется на величину

$$Q=\left(\sum_i E_0^{(i)}\right)''-\left(\sum_i E_0^{(i)}\right)'\,.$$

Примеры решения задач

Пример 1.3.1. Два упругих шарика подвешены на тонких нитях рядом так, что они находятся на одной высоте и касаются друг друга (рис. 1). Длина нитей равна l_1 = 10 см и l_2 = 6 см, масса шариков m_1 = 8 г и m_2 = 20 г. Меньший шарик отклонили на угол $\alpha = 60°$ и отпустили. На какие высоты поднимутся шарики после абсолютно упругого центрального удара?

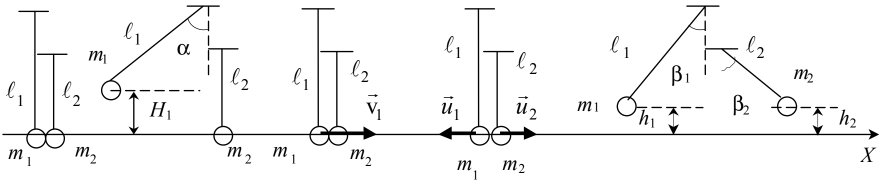


Рис. 1

Решение

Высоты, на которые поднимутся шарики после абсолютно упругого удара, можно определить из законов сохранения энергии, т.е.

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} = m_1 g h_1 \quad \text{и} \quad \frac{m_2 u_2^2}{2} = m_2 g h_2 \,. \tag{1}$$

Отсюда

$$h_1 = \frac{u_1^2}{2g}; \quad h_2 = \frac{u_2^2}{2g} \,. \tag{2}$$

Скорости шариков u_1 и u_2 после соударения находим из законов сохранения энергии и импульса (считаем систему замкнутой, так как в момент удара $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_1 \mathrm{v}_1^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \\ m_1 \vec{\mathrm{v}}_1 &= m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Уравнение закона сохранения в проекции на ось X может быть записано в виде

$$m_1 \mathrm{v}_1 = m_2 u_2 - m_1 u_1. \tag{4}$$

Систему (3) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} m_1\left(\mathrm{v}_1^2-u_1^2\right)&=m_2u_2^2,\\ m_1\left(\mathrm{v}_1+u_1\right)&=m_2u_2.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Поделим первое уравнение системы (3) на второе и получим

$$\mathrm{v}_1-u_1=u_2.$$

Система уравнений (5) заменится более простой:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{v}_1-u_1&=u_2,\\ m_1\left(\mathrm{v}_1+u_1\right)&=m_2u_2.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Отсюда находим

$$u_1=\frac{\left(m_2-m_1\right)\mathrm{v}_1}{m_1+m_2},\tag{7}$$

$$u_2=\frac{2m_1\mathrm{v}_1}{m_1+m_2}.\tag{8}$$

Скорость первого шара до удара находим из закона сохранения энергии

$$m_1gH_1=\frac{m_1\mathrm{v}_1^2}{2},\tag{9}$$

где

$$H_1=\ell_1\left(1-\cos\alpha\right).\tag{10}$$

После подстановки (10) в формулу (9) получим выражение для скорости v_1:

$$\mathrm{v}_1=\sqrt{2g\ell_1\left(1-\cos\alpha\right)}.\tag{11}$$

Формулы для скоростей u_1 и u_2 получаются после подстановки (11) в формулы (7) и (8):

$$u_1=\frac{\left(m_2-m_1\right)}{m_1+m_2}\sqrt{2g\ell_1\left(1-\cos\alpha\right)},\tag{12}$$

$$u_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2g\ell_1\left(1-\cos\alpha\right)}.\tag{13}$$

Подставим (12) в формулу (2). Получим

$$h_1 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \ell_1 \left(1 - \cos\alpha\right).$$

Подставим (13) в формулу (2). Получим

$$h_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \ell_1 \left(1 - \cos\alpha\right).$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$h_1 = \left(\frac{0,02 - 0,008}{0,008 + 0,02}\right)^2 \cdot 0,1\left(1 - 0,5\right) = 0,00918 \text{ м } = \text{ } 9,18 \text{ мм},$$

$$h_2 = \left(\frac{2 \cdot 0,008}{0,008 + 0,02}\right)^2 \cdot 0,1\left(1 - 0,5\right) = 0,0163 \text{ м } = \text{ } 1,63 \text{ см}.$$

Пример 1.3.2. Через блок в виде диска массой m_0 перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузики массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$) (рис. 1). Трением в системе блок–ось следует пренебречь. С каким ускорением будут двигаться грузики, если их предоставить самим себе?

Решение

Пусть в начальный момент времени грузики закреплены на одном уровне (см. рис. 1). Если предоставить грузики самим себе, то грузик массой m_2 ($m_2 > m_1$) опустится вниз на расстояние h, а грузик массой m_1 поднимется вверх на то же расстояние (вследствие нерастяжимости нитей) (см. рис. 1). Источником энергии для движения системы грузиков является высвободившаяся потенциальная энергия U_2 грузика m_2. Эта энергия будет израсходована на увеличение потенциальной энергии U_1 грузика m_1 и сообщение обоим грузикам кинетической энергии K_1 и K_2. Энергия будет израсходована также и на вращение блока (диска) – его кинетическая энергия K_0.

Закон сохранения энергии запишем в виде

$$U_2 = U_1 + K_1 + K_2 + K_0 \tag{1}$$

или в развернутом виде

$$m_2gh = m_1gh + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{\Im\omega^2}{2}. \qquad (2)$$

Модули скоростей v_1 и v_2 грузиков массами m_1 и m_2 будут одинаковыми $(|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v)$, так как ускорения грузиков одинаковы по модулю из-за нерастяжимости нитей.

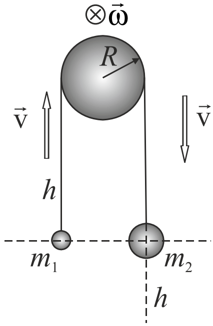


Рис. 1

В уравнении (2) момент инерции диска равен

$$\Im = \frac{1}{2}m_0R^2,$$

так как ось вращения проходит через центр инерции диска перпендикулярно его плоскости, а угловая скорость вращения блока (диска)

$$\omega = \frac{v}{R}, \qquad (3)$$

где R – радиус блока.

Записав кинематические уравнения для движения грузиков

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{at^2}{2}, \\ v &= at, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

при условии равенства нулю начальной скорости v_0 движения грузиков, получим

$$v^2 = 2ah. \qquad (5)$$

Подставив (3) и (5) в уравнение (2), получим

$$m_2gh = m_1gh + \frac{m_1 2ah}{2} + \frac{m_2 2ah}{2} + \frac{\frac{1}{2}m_0R^2\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2}. \tag{6}$$

Отсюда

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2}}, \tag{7}$$

что совпадает с результатом формулы (9) в Примере 1.2.1.

Пример 1.3.3. Однородный шар массой *m* скатывается с наклонной плоскости высотой *h* (рис. 1). Найдите конечную линейную скорость движения шара (на выходе с наклонной плоскости).

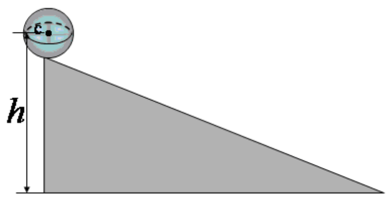


Рис. 1

Решение

Движение осуществляется в результате превращения потенциальной энергии шара в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения шара:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{\Im\omega^2}{2}. \tag{1}$$

Здесь мы пренебрегаем затратами энергии на преодоление трения качения.

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр инерции:

$$\Im = \frac{2}{5}mR^2. \tag{2}$$

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью v соотношением

$$\omega = \frac{\mathrm{v}}{R}. \tag{3}$$

Из кинематических уравнений для движения получаем

$$\left.\begin{aligned} \ell &= \frac{at^2}{2}, \\ \mathrm{v} &= at, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где ℓ – длина наклонной плоскости.

Из уравнений (4) следует

$$\mathrm{v}^2 = 2a\ell. \tag{5}$$

Из геометрии

$$\ell = \frac{h}{\sin\alpha}. \tag{6}$$

Тогда из формулы (1) с учетом (2) – (6) получим

$$mgh = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{m\mathrm{v}^2}{5} = \frac{7}{10}m\mathrm{v}^2. \tag{7}$$

Окончательный результат

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}, \tag{8}$$

что совпадает с результатами формул (12) и (19) в Примере 1.2.2.

Пример 1.3.4. Стержень длиной ℓ и массой M может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (рис. 1). В середину стержня попадает пуля массой m, летящая в горизонтальном направлении со скоростью v, и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

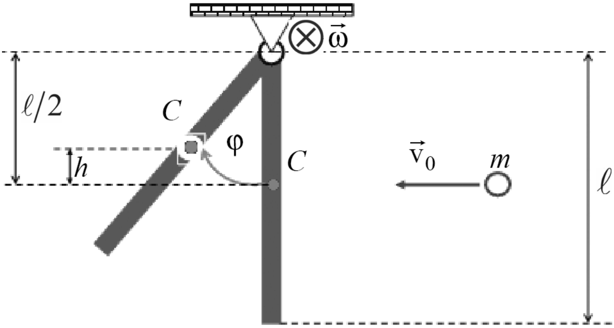


Рис. 1

Решение

Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями.

Рассмотрим подробнее явления, происходящие при ударе. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω и сообщает ему кинетическую энергию

$$K = \frac{\Im\omega^2}{2}, \tag{1}$$

где $\Im$ – момент инерции стержня относительно оси вращения.

Затем стержень поворачивается на искомый угол φ и останавливается, причем центр масс его поднимается на высоту

$$h = \frac{\ell}{2}(1 - \cos\varphi).$$

В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией

$$U = Mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos\varphi). \tag{2}$$

В соответствии с законом сохранения энергии приравниваем правые части формул (1) и (2) и получаем

$$Mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos\varphi) = \frac{\Im\omega^2}{2}.$$

Отсюда

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\Im\omega^2}{Mg\ell}.$$

Подставив в эту формулу выражение для момента инерции стержня относительно оси вращения

$$\Im = \frac{1}{3}M\ell^2, \qquad (3)$$

получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\ell\omega^2}{3g}. \qquad (4)$$

Чтобы из формулы (4) найти φ, необходимо предварительно определить значение ω. В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, поэтому его момент импульса $\vec{L}_{01} = \Im\vec{\omega}_0 = 0$. Начальный орбитальный момент импульса пули

$$\vec{L}_{02} = \left[\vec{r}, m\vec{\mathrm{v}}_0\right], \qquad (5)$$

где $r = \frac{\ell}{2}$ – расстояние точки попадания пули от оси вращения.

При попадании в стержень пуля сообщает ему угловое ускорение и участвует во вращении стержня вокруг оси.

В конечный момент удара стержень имел угловую скорость $\vec{\omega}$, а пуля – линейную скорость $\vec{\mathrm{v}}$, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения. Так как $\vec{\mathrm{v}} = \left[\vec{\omega},\ \vec{r}\right]$, то конечные моменты импульсов пули $\vec{L}_2$ и стержня $\vec{L}_1$ соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} &\vec{L}_1 = \Im\,\vec{\omega}, \\ &\vec{L}_2 = \left[\vec{r}, m\vec{\mathrm{v}}\right] \ = \ mr^2\vec{\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Применив закон сохранения момента импульса, можем написать

$$\vec{L}_{01} + \vec{L}_{02} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \tag{7}$$

или

$$\left[\vec{r},\ m\vec{\mathrm{v}}_0\right] \ = \ \Im\vec{\omega} + mr^2\vec{\omega}\,. \tag{8}$$

В проекции на ось вращения

$$rm\mathrm{v}_0 \ = \ \Im\omega + mr^2\omega \tag{9}$$

и тогда

$$\omega = \frac{m\mathrm{v}_0\dfrac{\ell}{2}}{\dfrac{1}{3}M\ell^2 + m\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{6m\mathrm{v}_0}{(4M+3m)\ell}\,. \tag{10}$$

Подставим формулу (10) в выражение (4). Получим

$$\varphi = \arccos\left[1 - \frac{\ell}{3g}\left(\frac{6m\mathrm{v}_0}{(4M+3m)\ell}\right)^2\right].$$

Пример 1.3.5. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом R, стоит человек массой m. Масса платформы равна M. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найдите, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью u' относительно платформы (рис. 1).

Решение

Угловую скорость вращения платформы найдем из закона сохранения момента импульса:

$$0 = \vec{L}^{\text{орб}}_{\text{чел}} + \vec{L}^{\text{осев}}_{\text{плат}}\,, \tag{1}$$

где

$$\vec{L}^{\text{орб}}_{\text{чел}} = \left[\vec{R}, m\vec{u}\right] \tag{2}$$

и

$$\vec{L}^{\text{осев}}_{\text{плат}} = \Im\vec{\omega}\,. \tag{3}$$

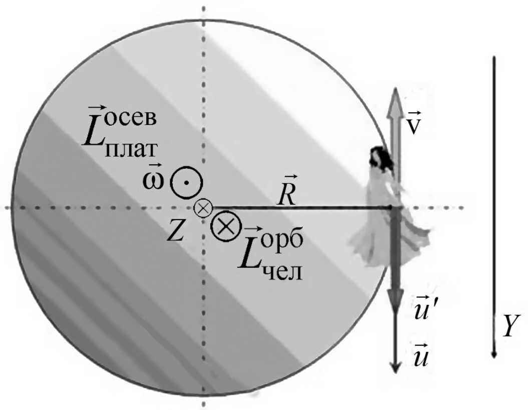


Рис. 1

Так как моменты импульсов человека и платформы противоположно направлены, то

$$Rmu - \Im\,\omega = 0. \tag{4}$$

Платформа имеет форму диска, следовательно:

$$\Im = \frac{1}{2}MR^2. \tag{5}$$

Скорость человека относительно Земли $\vec{u}$ найдем из закона сложения скоростей:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v},$$

где $\vec{u}'$ – скорость человека относительно платформы;
$\vec{v}$ – скорость краевых точек платформы относительно Земли.

Векторы $\vec{u}'$ и $\vec{v}$ противоположно направлены, следовательно:

$$u = u' - v = u' - \omega R. \tag{6}$$

Подставим (6) и (5) в формулу (4). Получим

$$m\left(u' - \omega R\right)R = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega,$$

$$2mu'R = (M + 2m)R^2\omega. \tag{7}$$

Отсюда

$$\omega = \frac{2mu'}{(M+2m)R}. \qquad (8)$$

Подставим в формулу (8) числовые значения и выполним вычисления:

$$\omega = \frac{2 \cdot 80 \cdot 2}{(240 + 2 \cdot 80) \cdot 2} = 0{,}4 \text{ рад/с}.$$

Домашние задания

Задача 1.3.1

Маленькие шарики массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) находятся на концах стержня длиной ℓ и массой m, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. Угловая скорость стержня при прохождении через вертикальное положение равна ω. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, г	m_2, г	m, г	ℓ, см	ω, рад/с
1	?	50	310	150	3,2
2	280	260	170	?	1,5
3	160	?	220	30	2,3
4	45	18	?	45	5,1
5	120	75	250	40	?

Задача 1.3.2

На разных склонах наклонной плоскости, образующих с горизонтом углы α_1 и α_2, находятся грузы массами m_1 и m_2. Нить, связывающая грузы, перекинута через легкий блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. Коэффициент трения между грузами и плоскостью равен k, ускорение грузов равно a ($a > 0$, если система движется в сторону груза массой m_2). Определите неизвестную величину.

Шифр	α_1, градус	α_2, градус	m_1, кг	m_2, кг	k	a, м/с^2
1	55	25	2,2	4,3	0,17	?
2	40	27	?	7,9	0,20	+1,3
3	20	35	1,6	1,5	?	+0,24
4	65	35	4,8	5,6	0,15	?
5	32	48	3,3	?	0,10	–2,0

Задача 1.3.3

Тело массой m пустили вверх по наклонной плоскости, составляющей угол β с горизонтом. Начальная скорость тела равна v, коэффициент трения между телом и плоскостью k, работа против силы трения A. Наибольшая высота, на которую поднялось тело, равна h. Определите неизвестную величину.

Шифр	m, кг	β, градус	v, м/с	k	A, Дж	h, м
1	–	30	3,3	0,25	–	?
2	–	45	6,0	?	–	1,5
3	?	60	–	0,15	0,59	0,80
4	5,3	20	–	0,2	?	4,4
5	9,4	–	?	–	1,2	3

Задача 1.3.4

Шайба соскальзывает с высоты h_1 по наклонной плоскости с углом α_1 к горизонту, затем поднимается на другую наклонную плоскость с углом α_2 до высоты h_2. Коэффициент трения шайбы о плоскости равен k. Определите неизвестную величину.

Шифр	h_1, м	α_1, градус	h_2, м	α_2, градус	k
1	?	11	12,6	42	0,15
2	24,0	15	17,0	10	?
3	9,0	36	?	12	0,05
4	8,5	50	4,6	?	0,20
5	15,2	?	9,4	55	0,10

Задача 1.3.5

Шарик массой m падает на горизонтальную поверхность стола с высоты h_1 и, отскочив, поднимается на высоту h_2. Время соударения равно τ, средняя сила взаимодействия шарика со столом F. Определите неизвестную величину.

Шифр	m, г	h_1, м	h_2, м	τ, мс	F, Н
1	12	?	0,35	0,045	1500
2	120	1,7	1,4	?	3650
3	?	1,9	1,5	0,18	540
4	45	2,4	?	0,49	900
5	28	1,35	0,75	0,60	?

Задача 1.3.6

Человек массой m_1, стоящий на одном конце первоначально покоящейся тележки массой m_2 и длиной ℓ, прыгает со скоростью v относительно земли под углом α к горизонту и попадает на другой конец тележки. Массу колес, а также силы сопротивления движению тележки не учитывать. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	ℓ, м	v, м/с	α, градус
1	70	?	2,6	4,0	35
2	?	200	5,2	6,5	55
3	60	240	?	5,0	40
4	45	160	3,1	5,5	?
5	55	120	7,0	?	25

Задача 1.3.7

Шарик скатывается без проскальзывания с высоты h по одной наклонной плоскости и поднимается на другую. Углы плоскостей с горизонтом α_1 и α_2, скорость шарика в нижней точке равна v, время движения шарика до наивысшей точки подъема τ. Определите неизвестную величину.

Шифр	h, см	α_1, градус	α_2, градус	v, см/с	τ, с
1	–	18	26	?	5,0
2	–	28	?	210	2,0
3	65	?	22	–	3,2
4	–	32	17	260	?
5	?	25	55	–	3,0

Задача 1.3.8

Копром забивают сваю массой m_1 в грунт на глубину S при каждом ударе. Средняя сила сопротивления грунта F. Подъемная часть копра – груз массой m_2, свободно падающей на сваю с высоты h. Сразу после удара груз и свая имеют скорость v. Масса $m_1 < m_2$. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	S, см	F, кН	m_2, кг	h, м	v, м/с
1	95	8	?	640	2,3	–
2	?	15	60	480	1,9	–
3	135	?	70	970	–	1,1
4	185	30	100	830	?	–
5	120	12	180	670	–	?

Задача 1.3.9

Два шарика массами m_1 и m_2, подвешенные на нитях одинаковой длины ℓ, касаются друг друга. Первый шарик отклоняют на высоту h и отпускают, после чего происходит упругий центральный удар. Углы отклонения нитей после удара α_1 и α_2. Угол α_1 отрицателен, если шарик после удара отклоняется назад. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	m_2, кг	ℓ, см	h, см	α_1, градус	α_2, градус
1	0,17	0,32	?	30	–	+25,0
2	?	0,18	64	16	–2,1	–
3	0,43	0,12	250	27	–	?
4	0,058	?	130	27	–	+4,3
5	0,12	0,75	76	24	?	–

Задача 1.3.10

Пуля, летящая горизонтально, попадает в центр шара, подвешенного на очень легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули равна $m = x \cdot M$, где M – масса шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара равно ℓ. Скорость пули равна v. Стержень с шаром отклонился после удара пули на угол α. Определите неизвестную величину.

Шифр	x	ℓ, м	v, м/с	α, градус
1	0,001	1	?	10
2	?	1	500	8
3	0,002	?	400	12
4	0,001	1,5	450	?
5	0,0011	1,1	?	9

Задача 1.3.11

На рельсах стоит платформа массой M_1. На платформе укреплено орудие массой M_2, из которого произведен выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда m, его скорость относительно орудия в момент выстрела v. В результате выстрела платформа откатилась на расстояние S. Коэффициент трения платформы о рельсы равен k. Определите неизвестную величину.

Шифр	M_1, т	M_2, т	m, кг	v, м/с	S, м	k
1	10	5	100	500	?	0,002
2	?	4	80	550	300	0,002
3	9	?	90	510	290	0,001
4	10	5,5	85	?	300	0,001
5	9	5	80	530	280	?

Задача 1.3.12

Снаряд массой M разрывается на два осколка в верхней точке параболической траектории на высоте H. В момент разрыва скорость снаряда была равна v. Первый осколок массой m_1 полетел вертикально вниз и достиг Земли через время t. Скорость второго осколка сразу после разрыва равна v_2. Определите неизвестную величину.

Шифр	M, кг	H, м	v, м/с	m_1, кг	t, с	v_2, м/с
1	1	60	100	0,6	0,5	?
2	?	55	105	0,5	0,5	300
3	1,2	?	100	0,8	0,4	320
4	1	50	?	0,5	0,6	300
5	1,2	60	110	?	0,5	310

Задача 1.3.13

Снаряд, летящий со скоростью v, разрывается на два осколка массами m_1 и m_2, разлетающиеся под углом α со скоростями v_1 и v_2. Определите неизвестную величину.

Шифр	v, м/с	m_1, кг	m_2, кг	α, градус	v_1, м/с	v_2, м/с
1	800	28	65	25	730	?
2	700	14	8	95	?	830
3	?	35	50	120	170	400
4	320	?	23	30	450	180
5	700	45	17	?	710	900

Задача 1.3.14

Частица массой m_1, летящая со скоростью v_{01}, испытывает упругое нецентральное столкновение с покоящейся частицей массой m_2. После столкновения частицы разлетаются под углом α со скоростями v_1 и v_2. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_2/m_1	v_{01}, км/с	α, градус	v_1, км/с	v_2, км/с
1	–	2000	160	?	1100
2	2	2100	–	950	?
3	16	–	?	500	28
4	?	–	60	25	35
5	5	500	130	?	–

Задача 1.3.15

Человек массой m_1 находится на первоначально покоящейся горизонтальной платформе, представляющей собой однородный диск массой m_2 и радиусом R_2. Когда человек идет по окружности радиусом R_1 со скоростью v относительно платформы, сама платформа вращается вокруг вертикальной оси (без трения) с частотой вращения n. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	R_1, м	m_2, кг	R_2, м	v, м/с	n, об/мин
1	85	1,9	170	?	2,1	1,8
2	75	1,9	240	2,8	?	3,1
3	70	2,4	?	3,9	1,3	0,85
4	?	2,7	200	3,5	2,3	2,5
5	65	2,3	140	4,5	1,1	?

Задача 1.3.16

Человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и ловит мяч массой m, летящий в горизонтальном направлении на расстоянии d от вертикальной оси вращения скамьи. После этого скамья стала вращаться с угловой скоростью ω. Момент инерции человека и скамьи $\mathfrak{I}$. Скорость мяча равна v. Определите неизвестную величину.

Шифр	m, кг	d, см	ω, рад/с	$\mathfrak{I}$, кг·м^2	v, м/с
1	0,3	60	1	6	?
2	0,4	60	?	10	33,9
3	0,3	70	0,8	?	25
4	?	50	2,5	6,42	45
5	0,734	?	3,0	8	50

Задача 1.3.17

В центре вращающейся скамьи Жуковского стоит человек, держащий на вытянутых руках на расстоянии d_1 друг от друга две гири. Скамья вращается с частотой ν_1. Человек сближает гири до расстояния d_2, и частота увеличивается до ν_2. Работа, произведенная человеком, равна A. Каждая гиря имеет массу m. Момент инерции человека относительно оси скамьи считайте постоянным, а гири – материальными точками. Определите неизвестную величину.

Шифр	d_1, см	d_2, см	ν_1, Гц	ν_2, Гц	m, кг	A, Дж
1	150	80	1	1,5	2	?
2	?	70	1	1,4	1,5	50
3	140	?	1,5	2	2	40
4	145	80	?	1,3	1,8	45
5	150	70	1,5	2	?	50

Задача 1.3.18

Колесо массой m и внешним радиусом R скатывается (без проскальзывания) с наклонной плоскости длиной ℓ и углом наклона α, достигая внизу скорости v. Момент инерции колеса равен $\Im$. Начальная скорость колеса равна нулю. Определите неизвестную величину. Потерями энергии на трение качения следует пренебречь.

Шифр	m, кг	R, см	ℓ, м	α, градус	v, м/с	$\Im$, кг·м^2
1	2	5	2	30	2,5	?
2	?	4	2,5	35	3	0,02
3	3	?	3	45	2	0,01
4	2	2	?	30	4	0,015
5	4	4	3	?	3	0,012

Задача 1.3.19

Пуля массой m_1 летит со скоростью v_0, пробивает нижний конец доски массой m_2 и длиной ℓ и вылетает со скоростью v. Доска после попадания пули отклоняется от вертикали на угол α. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, г	v_0, м/с	v, м/с	m_2, кг	ℓ, см	α, градус
1	?	600	450	4,6	145	5,1
2	5,6	500	?	2,8	120	6,3
3	9,4	170	120	?	78	3,5
4	8,2	350	210	17,5	95	?
5	4,5	?	200	1,1	62	3,0

Задача 1.3.20

Тонкая квадратная пластинка со стороной a и массой m_1 может вращаться вокруг вертикальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. В центр пластинки перпендикулярно к ней упруго ударяется шарик массой m_2, летящий со скоростью v_0. После удара скорость шарика v, угловая скорость пластинки ω. Скорость $v < 0$, если шарик после удара движется назад. Определите неизвестную величину.

Шифр	a, см	m_1, кг	m_2, г	v_0, м/с	v, м/с	ω, рад/с
1	–	1,20	?	4,1	–2,7	–
2	60	?	110	–	–1,3	2,9
3	75	1,90	650	7,8	–	?
4	45	1,25	120	?	–	2,0
5	–	0,48	15	3,5	?	–

1.4. Механические колебания

Колебательное движение (колебание) – это изменение состояния вещества или поля, характеризующееся повторяемостью во времени определенной физической величины ξ.

1.4.1. Линейный гармонический осциллятор (ЛГО)

Колебательная система, совершающая собственные колебания по гармоническому закону

$$\xi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{1.4.1}$$

называется *линейным гармоническим осциллятором*. Здесь:

A – амплитуда;

ω_0 – циклическая частота, $\omega_0 = 2\pi/T_0$;

T_0 – период собственных колебаний;

$\omega_0 t + \varphi = \Phi$ – фаза колебания.

1.4.1.1. Пружинный маятник

Дифференциальное уравнение собственных колебаний пружинного маятника

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{1.4.2}$$

где k – коэффициент упругости (жесткость) пружины;

x – линейное смещение от положения равновесия.

Уравнение гармонических колебаний пружинного маятника

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{1.4.3}$$

Собственная циклическая (круговая) частота $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ зависит от параметров колебательной системы:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{1.4.4}$$

1.4.1.2. Физический маятник

Дифференциальное уравнение собственных колебаний физического маятника

$$\ddot{\theta} + \frac{\ell_{\text{ф}} m g}{\Im}\theta = 0, \qquad (1.4.5)$$

где $\ell_{\text{ф}}$ – длина физического маятника;

θ – угловое смещение от положения равновесия.

Уравнение гармонических колебаний физического маятника:

$$\theta(t) = \theta_{\max}\cos\left(\sqrt{\frac{mg\ell_{\text{ф}}}{\Im}}t + \varphi\right). \qquad (1.4.6)$$

Собственная циклическая (круговая) частота $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ зависит от параметров колебательной системы:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell_{\text{ф}}}{\Im}}. \qquad (1.4.7)$$

1.4.1.3. Математический маятник

Математический маятник – это частный случай физического маятника: размерами тела массой m пренебрегаем по сравнению с длиной подвеса.

Так как момент инерции материальной точки относительно точки *подвеса* равен

$$\Im = m\ell^2, \qquad (1.4.8)$$

то собственная частота колебаний математического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \qquad (1.4.9)$$

1.4.2. Характеристики ЛГО

Зависимость потенциальной энергии от времени

$$U(t) = U_{\max}\cos^2\omega_0 t. \qquad (1.4.10)$$

Зависимости скорости колебания и кинетической энергии от времени

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin\omega_0 t, \qquad (1.4.11)$$

$$K(t) = K_{max} \sin^2 \omega_0 t . \qquad (1.4.12)$$

Зависимость ускорения ЛГО от времени

$$\ddot{\xi}(t) = \frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t . \qquad (1.4.13)$$

Возвращающая сила пропорциональна ускорению:

$$F(t) = -mA\,\omega_0^2 \cos\,\omega_0 t. \qquad (1.4.14)$$

Так же будет выглядеть и зависимость от времени момента возвращающей силы, действующей на физический (математический) маятник.

1.4.3. Затухающие колебания

1.4.3.1. Пружинный маятник

Второй закон Ньютона для пружинного маятника в вязкой среде:

$$F_x^{\text{трен}} + F_x^{\text{упр}} = m\ddot{x}, \qquad (1.4.15)$$

где $F_x^{\text{трен}}$ – сила вязкого трения, $F_x^{\text{трен}} = -r\dot{x}$, здесь r – коэффициент трения;

$F_x^{\text{упр}}$ – сила упругости, $F_x^{\text{упр}} = -kx$.

Тогда *дифференциальное уравнение затухающих колебаний пружинного маятника*

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (1.4.16)$$

где

$$\beta = \frac{r}{2m} \qquad (1.4.17)$$

– коэффициент затухания.

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$x = A(t)\cos(\omega' t + \varphi), \qquad (1.4.18)$$

где

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad (1.4.19)$$

– частота затухающих колебаний;

T' – период затухающих колебаний.

Затухающие колебания – это пример квазипериодического процесса, так как в каждом периоде амплитуда уменьшается по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}\ . \tag{1.4.20}$$

1.4.3.2. Режимы затухания

$\beta < \omega_0$ – *квазипериодический колебательный режим.*

$\beta = \omega_0$ – *критический режим*: период колебаний обращается в бесконечность, т.е. движение перестает быть периодическим.

Условие *критического режима* для пружинного маятника:

$$r_{\text{кр}} = 2\sqrt{km}\ . \tag{1.4.21}$$

Коэффициент затухания

$$\beta = 1/\tau_e\ , \tag{1.4.22}$$

где τ_e – время релаксации.

1.4.3.3. Параметры затухающих колебаний

Логарифмический декремент затухания λ:

$$\lambda = \beta T' = \frac{1}{\tau_e} T' = \frac{1}{N_e}\ , \tag{1.4.23}$$

где N_e – число колебаний, в течение которых амплитуда убывает в e раз.

Добротность Q определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e = \frac{\omega'}{2\beta}\ . \tag{1.4.24}$$

При *слабом* затухании для пружинного маятника

$$Q = \frac{F_{\text{упр}}^{\max}}{F_{\text{тр}}^{\max}} = \frac{kA}{r v_{\max}} = \frac{\omega_0}{2\beta}\ . \tag{1.4.25}$$

1.4.4. Вынужденные колебания

Вынужденными колебаниями называются колебания, происходящие под действием внешней переменной (периодической) силы, работа которой компенсирует потери энергии на преодоление трения (в механических колебательных системах).

1.4.4.1. Пружинный маятник

В соответствии со *вторым законом Ньютона*

$$\vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F} = m\vec{a}\,, \tag{1.4.26}$$

где

$$F = F_0 \cos\omega t \tag{1.4.27}$$

– внешняя периодическая сила, действующая на пружинный маятник.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний пружинного маятника можно представить в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t\,, \tag{1.4.28}$$

где

$$f_0 = \frac{F_0}{m} \tag{1.4.29}$$

– приведенная сила.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\,. \tag{1.4. 30}$$

1.4.4.2. Резонанс

Резонансом называют явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при стремлении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний ($\omega \to \omega_0$).

Функция $A(\omega)$ достигает экстремума при частоте вынуждающей силы ω, равной

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,, \tag{1.4.31}$$

где $\omega_{\text{рез}}$ – резонансная частота.

Если $\omega \to 0$, то

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{m(k/m)} = \frac{F_0}{k} = A_{\text{стат}}, \qquad (1.4.32)$$

где $A_{\text{стат}}$ – статическая амплитуда.

При достижении резонансной частоты $\omega \to \omega_{\text{рез}}$ амплитуда стремится к резонансной величине

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \qquad (1.4.33)$$

где $A_{\text{рез}}$ – резонансная амплитуда.

При *критическом* затухании

$$\beta = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \beta_{\text{крит}}. \qquad (1.4.34)$$

Добротность можно представить как отношение резонансной амплитуды к статической, т.е. как *коэффициент усиления*:

$$Q = \frac{A_{\text{рез}}}{A_{\text{стат}}}. \qquad (1.4.35)$$

При *слабом затухании* добротность равна

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}. \qquad (1.4.36)$$

Примеры решения задач

Пример 1.4.1. Точка совершает колебания по закону $x(t) = A \sin \omega_0 t$. В некоторый момент времени смещение точки оказалось равным $x_1 = 5$ см. Когда же фаза колебаний Ф увеличилась вдвое, смещение стало равным $x_2 = 8$ см. Определите амплитуду колебаний A.

Решение

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A\sin\Phi_1, \\ x_2 &= A\sin\Phi_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

По условию задачи $\Phi_2 = 2\Phi_1$. Следовательно:

$$\sin\Phi_2 = \sin\left(2\Phi_1\right) = 2\sin\Phi_1\cos\Phi_1 \cdot$$

Тогда систему уравнений (1) перепишем так:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A\sin\Phi_1, \\ x_2 &= 2A\sin\Phi_1\cos\Phi_1, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = A\sin\Phi_1, \\ x_2 = 2x_1\cos\Phi_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Выразим из системы уравнений (2)

$$\left.\begin{aligned} \sin\Phi_1 &= \frac{x_1}{A}, \\ \cos\Phi_2 &= \frac{x_2}{2x_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2\Phi_1 + \cos^2\Phi_1 = 1\,. \qquad (4)$$

Подставим (3) в тождество (4). Получим

$$\frac{x_1^{\,2}}{A^2} + \frac{x_2^{\,2}}{4x_1^{\,2}} = 1\,.$$

Отсюда выразим амплитуду колебаний

$$A = \frac{2x_1^{\,2}}{\sqrt{4x_1^{\,2} - x_2^{\,2}}}\,.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$A = \frac{2\cdot\left(0{,}05\right)^2}{\sqrt{4\left(0{,}05\right)^2 - \left(0{,}08\right)^2}} = 0{,}0833 \text{ м}.$$

Пример 1.4.2. Диск радиусом $R = 0{,}24$ м колеблется около горизонтальной оси Z, проходящей через середину (т. O) одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска (рис. 1). Определите приведенную длину $\ell_{\text{привед}}$ и период колебаний T_0 такого маятника.

Решение

Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\Im}{mgd}}\,, \tag{1}$$

где $\Im$ – момент инерции диска относительно оси Z, проходящей через т. O;

m – масса диска;

d – длина физического маятника, т.е. расстояние от точки подвеса (т. O) до центра инерции (т. C).

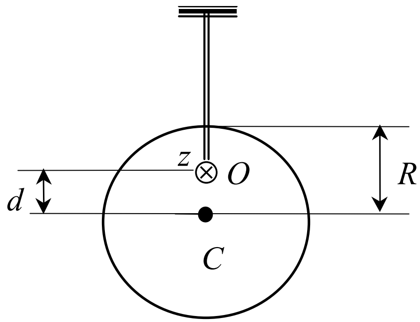


Рис. 1

Момент инерции $\Im$ относительно оси Z, проходящей через точку подвеса диска, определяем по теореме Штейнера:

$$\Im = \Im_C + md^2\,, \tag{2}$$

где $\Im_C = \frac{1}{2}mR^2$ – момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр инерции;

$d = \frac{R}{2}$.

Подставим эти значения в формулу (2) и получим

$$\Im = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2.$$

Тогда в соответствии с формулой (1) период колебаний физического маятника будет равен

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{4}mR^2}{mg\ \frac{R}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}\ . \qquad (3)$$

Поскольку приведенная длина физического маятника есть длина такого математического маятника, который колеблется синхронно с данным физическим, то воспользуемся формулой периода колебаний математического маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{\text{привед}}}{g}}\ .$$

Отсюда с учетом формулы (3)

$$\ell_{\text{привед}} = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = \frac{3}{2}R\ . \qquad (4)$$

Подставим числовые значения в формулы (3) и (4) и выполним вычисления:

$$T_0 = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{3\cdot 0{,}24}{2\cdot 9{,}81}} = 1{,}20\ \text{с};$$

$$\ell_{\text{привед}} = \frac{3}{2}\cdot 0{,}24 = 0{,}36\ \text{м}.$$

Пример 1.4.3. К пружине подвешен груз. Зная, что максимальная кинетическая энергия гармонических колебаний груза равна $K_{\max} = 1$ Дж, найдите коэффициент упругости (жесткость) пружины k. Амплитуда колебаний равна $A = 0{,}05$ м.

Решение

Груз на пружине (пружинный маятник) совершает гармонические колебания по закону

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\ .$$

Скорость колебаний маятника выражается уравнением

$$\mathrm{v}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\ ,$$

где

$$A\omega_0 = v_{max}, \qquad (1)$$

здесь v_{max} – амплитуда скорости.

Поэтому с учетом формулы (1) максимальная кинетическая энергия пружинного маятника равна

$$K_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \qquad (2)$$

Подставим квадрат собственной частоты колебаний пружинного маятника

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

в формулу (2) и получим, что максимальная кинетическая энергия равна

$$K_{max} = \frac{kA^2}{2}.$$

Отсюда может быть найдена жесткость пружины

$$k = \frac{2K_{max}}{A^2}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$k = \frac{2 \cdot 1}{0,05^2} = 800 \text{ Н/м.}$$

Эту задачу можно решить другим способом. В соответствии с законом сохранения энергии

$$K_{max} = U_{max}$$

или

$$K_{max} = \frac{kA^2}{2}.$$

Отсюда можно найти жесткость пружины k.

Пример 1.4.4. Пружинный маятник массой $m = 5$ г совершает затухающие колебания. В течение $t = 50$ с тело потеряло 60 % своей энергии. Определите коэффициент сопротивления среды r.

Решение

В соответствии с условием задачи, к моменту времени t энергия маятника

$$W = 0{,}4W_0, \tag{1}$$

где W_0 – энергия в начальный момент времени.

Как известно, полная энергия колебаний маятника пропорциональна квадрату амплитуды:

$$W = \frac{kA^2}{2}, \tag{2}$$

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \tag{3}$$

Подставив (3) в формулу (2), получим закон изменения полной энергии затухающих колебаний

$$W(t) = \frac{kA_0^2}{2} e^{-2\beta t} = W_0 e^{-2\beta t}. \tag{4}$$

Сравнивая формулы (1) и (4), находим, что

$$e^{-2\beta t} = 0{,}4.$$

Отсюда

$$\beta = \frac{\ln 2{,}5}{2t}. \tag{5}$$

С другой стороны,

$$\beta = \frac{r}{2m}, \tag{6}$$

откуда

$$r = 2m\beta.$$

Подставив (5) в формулу (6), получим

$$r = \frac{m \ln 2{,}5}{t}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$r = \frac{0,005 \cdot \ln 2,5}{50} = 9,16 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с.}$$

Пример 1.4.5. При неизменной амплитуде вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний оказывается одинаковой для частот $\omega_1 = 100$ рад/с и $\omega_2 = 300$ рад/с (рис. 1). Определите резонансную частоту. Затуханием следует пренебречь.

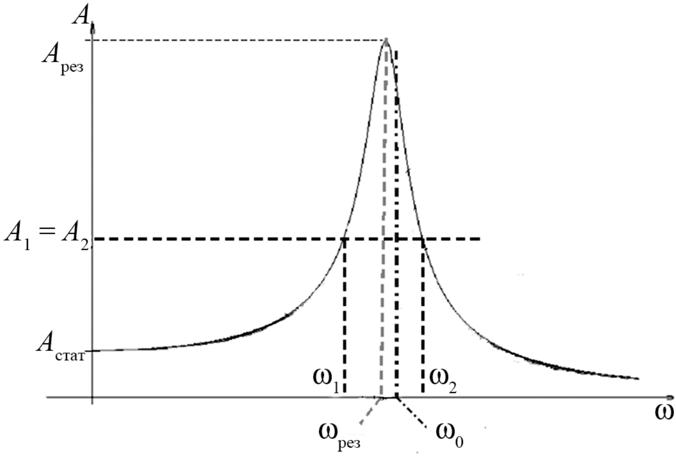


Рис. 1

Решение

Амплитуда вынужденных колебаний при частоте $\omega_1 < \omega_0$ равна

$$A_1 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}}. \tag{1}$$

Амплитуда вынужденных колебаний при частоте $\omega_2 > \omega_0$ равна

$$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_2^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_2^2}}. \tag{2}$$

При малом затухании ($\beta \to 0$) формулы (1) и (2) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2}, \\ A_2 &= \frac{f_0}{\omega_2^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В соответствии с условием задачи

$$A_1 = A_2. \quad (4)$$

Тогда из формул (3) и (4) следует, что

$$\omega_2^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 - \omega_1^2. \quad (5)$$

Из равенства (5) найдем собственную частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}}.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{100^2 + 300^2}{2}} = 224 \text{ с}^{-1}.$$

Резонансная частота равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

При малом затухании резонансная частота практически совпадает с собственной частотой, т.е.

$$\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 = 224 \text{ с}^{-1}.$$

Домашние задания

Задача 1.4.1

Материальная точка совершает гармонические колебания с периодом T_0 и амплитудой A. Когда смещение точки равно x_1, то скорость ее равна v_1, а при смещении x_2 скорость ее равна v_2. Смещение и скорость определяются по абсолютной величине. Определите неизвестную величину.

Шифр	A, см	x_1, мм	v_1, см/с	x_2, мм	v_2, см/с	T_0, с
1	–	?	6,8	2,5	4,4	1,1
2	3,7	2,5	6,3	?	7,1	–
3	–	3,4	7,5	4,5	6,3	?
4	?	10,0	4,3	8,7	6,9	–
5	–	1,7	?	1,3	2,8	4,9

Задача 1.4.2

Точка совершает колебания по закону $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$. Период колебаний равен T_0, амплитуда равна A. Скорость точки в тот момент времени, когда смещение точки от положения равновесия равно x, составляет v. Определите неизвестную величину.

Шифр	T_0, с	A, мм	x, мм	v, см/с
1	2	50	25	?
2	?	45	30	15
3	1,5	?	20	10
4	2	45	?	13
5	1	50	25	?

Задача 1.4.3

Материальная точка совершает колебания по закону $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Через время t от начала движения смещение точки от положения равновесия составило x, скорость v_x, а ускорение a_x. Амплитуда равна A, циклическая частота равна ω и начальная фаза колебаний равна φ_0. Определите неизвестную величину.

Шифр	t, с	x, см	v_x, см/с	a_x, см/с^2	A, см	ω_0, рад/с	φ_0, рад
1	–	5	62	–	?	10,4	–
2	–	5	–	540	–	?	–
3	0,1	5	–	–	7,78	10,4	?
4	–	3	?	–	4	13	–
5	?	7	–	–	10	5	–0,167

Задача 1.4.4

Физический маятник совершает колебания около горизонтальной оси с периодом T_1. Если к нему прикрепить небольшой груз массой m на расстоянии ℓ ниже оси, то период колебания будет равен T_2. Момент инерции маятника относительно оси равен $\Im$. Определите неизвестную величину.

Шифр	T_1, с	m, кг	ℓ, см	T_2, с	$\Im$, кг·см^2
1	1,48	0,45	55	?	3000
2	1,75	0,85	?	2,05	600
3	?	0,12	40	1,85	1700
4	1,65	?	25	1,42	2300
5	0,68	0,41	25	0,83	?

Задача 1.4.5

К концам одного стержня массой m и длиной ℓ прикреплены шарики массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$). Период малых колебаний системы относительно горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его середину, равен T_0. Определите неизвестную величину.

Шифр	m, г	m_1, г	m_2, г	T_0, с	ℓ, см
1	140	75	35	2,1	?
2	270	380	?	1,9	60
3	72	130	115	?	35
4	?	92	21	2,4	80
5	25	?	12	1,7	37

Задача 1.4.6

Амплитуда колебаний математического маятника длиной ℓ за время t_1 уменьшается в z_1 раз, за время t_2 – в z_2 раз. Логарифмический декремент затухания колебаний маятника равен δ. Определите неизвестную величину.

Шифр	ℓ, см	t_1, с	z_1	t_2, с	z_2	δ
1	70	180	?	–	–	0,005
2	–	?	3,0	130	2,0	–
3	?	–	–	220	3,5	0,012
4	45	90	2,5	–	–	?
5	–	350	1,5	610	?	–

Задача 1.4.7

За время t полная механическая энергия математического маятника длиной ℓ уменьшилась в z раз. Период собственных колебаний маятника равен T_0, логарифмический декремент колебаний δ. Определите неизвестную величину.

Шифр	t, с	ℓ, м	z	T_0, с	δ
1	250	?	3,1	–	0,003
2	?	1,25	1,5	–	0,02
3	140	–	2,0	1,0	?
4	90	–	2,5	?	0,007
5	75	0,85	?	–	0,016

Задача 1.4.8

Амплитуда колебаний математического маятника длиной ℓ за время t уменьшилась в z раз. За это время маятник совершил N полных колебаний. Логарифмический декремент затухания равен δ. Коэффициент затухания равен β. Определите неизвестную величину.

Шифр	ℓ, м	t, мин	z	β, с$^{-1}$	N	δ
1	1	10	?	–	–	?
2	?	9	2	–	–	$3\cdot10^{-3}$
3	1,5	?	–	–	269	–
4	2	–	–	?	–	$2{,}5\cdot10^{-3}$
5	–	–	3	–	?	$4{,}4\cdot10^{-3}$

Задача 1.4.9

Пружинный маятник (жесткость пружины k, масса груза m) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r. Коэффициент затухания равен β. Резонансная амплитуда равна $A_{\text{рез}}$. Амплитудное значение вынуждающей силы равно F_0. Определите неизвестную величину.

Шифр	k, Н/м	m, г	r, кг/с	$A_{\text{рез}}$, м	F_0, мН
1	10	100	$2\cdot10^{-2}$	?	10
2	20	50	0,01	0,05	?
3	20	?	0,02	0,05	10
4	?	0,01	0,02	0,01	1
5	0,26	0,1	?	0,01	1

Задача 1.4.10

Пружинный маятник совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления r. Амплитудное значение вынуждающей силы равно F_0, резонансная амплитуда равна $A_{\text{рез}}$, а частота собственных колебаний равна ν_0. Затухание следует считать малым. Определите неизвестную величину.

Шифр	r, г/с	F_0, мкН	$A_{\text{рез}}$, см	ν_0, Гц
1	1	?	0,5	10
2	5	314	?	1
3	0,01	31,4	0,1	?
4	?	3,14	1	0,1
5	0,1	?	10	100

1.5. Упругие волны

1.5.1. Основные законы, уравнения и формулы

Упругие волны – процесс распространения упругой деформации в веществе, например распространение звука.

Дифференциальное волновое уравнение упругой волны:

$$\Delta\vec{S} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\vec{S}}{\partial t^2}. \qquad (1.5.1)$$

Уравнение упругой плоской волны:

$$S = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \qquad (1.5.2)$$

где S – смещение частицы вещества из положения равновесия.

Скорость упругой волны (фазовая скорость)

$$u = \sqrt{\frac{M}{\rho}}, \qquad (1.5.3)$$

где M – модуль упругости;
ρ – плотность вещества.

1. *В твердых телах*:

При распространении *поперечных* упругих волн модуль M – это *модуль сдвига G*, который характеризует упругость *формы*.

При распространении *продольных* упругих волн модуль M – это *модуль нормальной упругости Юнга E*, который характеризует упругость *объема*.

2. *В жидкостях*:

При распространении *продольных* упругих волн модуль M – это *модуль объемной упругости K*. Модуль $K = \frac{1}{B}$, где B – *модуль всестороннего сжатия* жидкости.

3. *В газах*:

При *изотермическом* процессе распространения упругих *продольных* волн (при низких частотах) модуль M – это давление газа P:

$$u = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \qquad (1.5.4)$$

где R – универсальная газовая постоянная;
T – абсолютная температура;
μ – молярная масса.

При *адиабатическом* процессе (см. п. 2.2.6) распространения упругих *продольных* волн (при высоких частотах) модуль M – это произведение коэффициента Пуассона γ на давление газа:

$$u=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}=\sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}}\,. \qquad (1.5.5)$$

1.5.2. Энергетика упругой волны

Полная энергия волны складывается из потенциальной и кинетической энергии:

$$W = U + K. \qquad (1.5.6)$$

Объемные плотности потенциальной и кинетической энергии равны между собой:

$$w_{п}= w_{к}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\sin^2\left(\omega t-kx\right). \qquad (1.5.7)$$

Объемная плотность полной энергии равна

$$w=w_{п}+w_{к}=\rho A^2\omega^2\sin^2\left(\omega t-kx\right)=w_{max}\sin^2\left(\omega t-kx\right). \qquad (1.5.8)$$

Процесс переноса энергии характеризуется следующими величинами:

1. Поток энергии (мощность источника упругой волны)

$$\Phi=\frac{W}{t}, \qquad (1.5.9)$$

где W – полная энергия, переносимая волной через поперечную площадку $S_{\perp}$ за время t.

2. Плотность потока энергии

$$j=\frac{\Phi}{S_{\perp}}=\frac{W}{S_{\perp}t}=\frac{wV}{S_{\perp}t}=\frac{w\left(S_{\perp}tu\right)}{S_{\perp}t}=wu\,, \qquad (1.5.10)$$

где V – объем вещества, в котором распространяется волна со скоростью u, $V = S_{\perp}tu.$

Вектор плотности потока энергии – вектор Умова:

$$\vec{j}=w\vec{u}\,. \qquad (1.5.11)$$

3. Интенсивность волны – модуль среднего значения вектора Умова:

$$I=\left|\vec{j}\right|=\overline{w}\left|\vec{u}\right|=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u. \qquad (1.5.12)$$

1.5.3. Эффект Доплера в акустике

Эффект Доплера заключается в том, что при относительном движении источника и приемника в среде частота ν *принимаемой упругой волны отличается от частоты* ν_0 *испускаемой упругой волны.*

Поскольку упругие волны распространяются только в среде, внутри которой могут двигаться источник и приемник, рассматривают не только их относительное движение, но и их движение относительно среды.

1. *Движется источник, приемник покоится* (рис. 1.5.1).

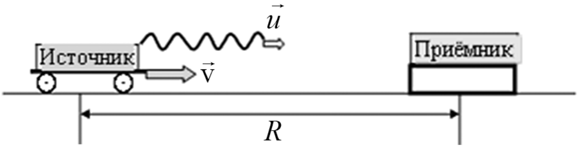


Рис. 1.5.1. Эффект Доплера: источник движется

Частота волны, воспринимаемой приемником, будет равна

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 + \frac{v}{u}}, \tag{1.5.13}$$

если источник удаляется от приемника, и

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{u}}, \tag{1.5.14}$$

если источник приближается к приемнику.

2. *Движется приемник, источник покоится* (рис. 1.5.2).

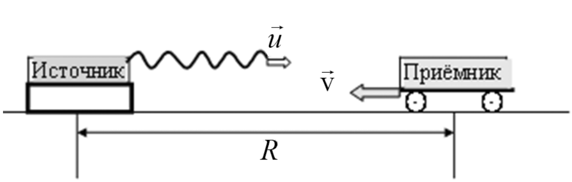


Рис. 1.5.2. Эффект Доплера: приемник движется

Частота волны, воспринимаемой приемником, будет равна

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\text{v}}{u}\right), \qquad (1.5.\ 15)$$

если источник удаляется от приемника, и

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{\text{v}}{u}\right), \qquad (1.5.16)$$

если источник приближается к приемнику.

Примеры решения задач

Пример 1.5.1. Составьте уравнение плоской продольной волны, распространяющейся в стальном образце. Период колебания частиц в волне $T = 1{,}2$ с, амплитуда $A = 2$ мкм. Плотность стали $\rho = 7800$ кг/м^3. Модуль Юнга для стали $E = 200$ ГПа. Найдите скорость распространения волны v и длину волны λ. Получите уравнения для скорости колебания частиц v_S; для относительной деформации образца стали, в котором распространяется волна ε; для объемной плотности потенциальной $w_\text{п}$, кинетической $w_\text{к}$ и полной w энергий; для модуля вектора плотности потока энергии (вектора Умова) $\left|\vec{j}\right|$.

Решение

Уравнение волны

$$S(x,t) = 2\cdot 10^{-6}\cos\left[\frac{2\pi}{1{,}2}\left(t - \sqrt{\frac{7800}{2\cdot 10^{11}}}\right)\right] = 2\cdot 10^{-6}\cos\pi\left(1{,}67t - 3{,}2910^{-4}x\right), \text{ м.}$$

Скорость распространения волны

$$u = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{11}}{7800}} = 5{,}06\cdot 10^{3}\ \text{м/с.}$$

Длина волны

$$\lambda = uT = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{11}}{7800}}\cdot 1{,}2 = 6{,}08\cdot 10^{3}\ \text{м.}$$

Скорость колебания частиц в волне

$$\mathrm{v}_s=\frac{\partial S}{\partial t}=-A\omega\sin\left(\omega t-kx\right)=-2\cdot 10^{-6}\,\frac{2\cdot 3{,}14}{1{,}2}\sin\left[\frac{2\pi}{1{,}2}\left(t-\sqrt{\frac{7800}{2\cdot 10^{11}}}\cdot x\right)\right]=$$

$$=-1{,}05\cdot 10^{-5}\sin\pi\left(1{,}67t-3{,}29\cdot 10^{-4}x\right),\ \text{м/с}.$$

Относительная деформация в образце стали

$$\varepsilon=\frac{\partial S}{\partial x}=Ak\sin(\omega t-kx)=$$

$$=2\cdot 10^{-6}\,\frac{2\cdot 3{,}14}{1{,}2}\sqrt{\frac{7800}{2\cdot 10^{11}}}\cdot\sin\left[\frac{2\pi}{1{,}2}\left(t-\sqrt{\frac{7800}{2\cdot 10^{11}}}\cdot x\right)\right]=$$

$$=2{,}07\cdot 10^{-9}\sin\pi\left(1{,}67t-3{,}29\cdot 10^{-4}x\right).$$

Объемные плотности потенциальной и кинетической энергий (1.5.7):

$$w_{\text{п}}=w_{\text{к}}=\left(2\cdot 10^{-6}\right)^2\frac{2\cdot 3{,}14^2}{1{,}2^2}\cdot 7800\sin^2\left[\frac{2\pi}{1{,}2}\left(t-\sqrt{\frac{7800}{2\cdot 10^{11}}}\cdot x\right)\right]=$$

$$=4{,}27\cdot 10^{-7}\sin^2\left[\pi\left(1{,}67t-3{,}29\cdot 10^{-4}x\right)\right],\ \text{Дж/м}^3.$$

Объемная плотность полной энергии (1.5.10):

$$w=8{,}54\cdot 10^{-7}\sin^2\ \pi\left(1{,}67t-3{,}29\cdot 10^{-4}x\right)\ ,\ \text{Дж/м}^3\,.$$

Закон изменения модуля вектора Умова (1.5.11) – (1.5.12):

$$\left|\vec{j}\right|=\left(2\cdot 10^{-6}\right)^2\frac{4\cdot 3{,}14^2}{1{,}2^2}\sqrt{2\cdot 10^{11}\cdot 7800}\cdot\sin^2\left[\frac{2\pi}{1{,}2}\left(t-\sqrt{\frac{7800}{2\cdot 10^{11}}}\cdot x\right)\right]=$$

$$=4{,}33\cdot 10^{-3}\sin^2\left[\pi\left(1{,}67t-3{,}29\cdot 10^{-4}x\right)\right],\ \text{Вт/м}^2.$$

Пример 1.5.2. Скорый поезд приближается к стоящему на путях электровозу со скоростью v = 72 км/ч. Электровоз подает звуковой сигнал частотой ν_0 = 0,6 кГц. Определите частоту ν сигнала, воспринимаемого машинистом скорого поезда. Звук распространяется в воздухе при температуре T = 300 К. Молярная масса воздуха μ = 0,029 кг/моль.

Решение

По условию задачи приемник (скорый поезд) приближается к неподвижному источнику (электровозу). При этих условиях формула эффекта Доплера (1.5.15):

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\text{v}}{u}\right), \tag{1}$$

Рассчитаем скорость звука в воздухе, считая процесс распространения звука *адиабатическим* (см. п. 2.2.6),

$$u = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \tag{2}$$

где R – универсальная газовая постоянная;

γ – коэффициент Пуассона.

Коэффициент Пуассона есть отношение удельной теплоемкости газа при постоянном давлении к удельной теплоемкости газа при постоянном объеме, которое, в свою очередь, может быть найдено по формуле

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}, \tag{3}$$

где i – число степеней свободы молекулы газа.

Так как воздух состоит в основном из жестких двухатомных молекул (O_2, N_2, H_2), то число степеней свободы $i = 5$. Следовательно, по формуле (3) $\gamma = 1{,}4$.

Подставив (3) в (2), получим формулу для расчета частоты сигнала, воспринимаемого машинистом скорого поезда:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\text{v}}{\sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}}\right). \tag{4}$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\nu = 600\left(1 + \frac{20}{\sqrt{1{,}4 \cdot \frac{8{,}31 \cdot 300}{0{,}029}}}\right) = 641 \text{ Гц}.$$

Домашние задания

Задача 1.5.1

Скорость звука в некотором газе при давлении P равна u (для больших частот). Плотность газа ρ. Коэффициент Пуассона для данного газа равен γ (см. п. 2.2.6). Определите неизвестную величину.

Шифр	P, кПа	u, м/с	ρ, кг/м^3	γ	N	T, К	μ, кг/моль
1	101	308	1,78	?	–	–	–
2	–	?		–	1	300	0,004
3	?	542	1,43	–	2	–	–
4	–	?		–	2	400	0,032
5	200	420	?	–	3	–	–

Задача 1.5.2

Звуковая волна переходит из газа, состоящего из жестких молекул, содержащих N атомов, в твердую среду. Отношение скорости звука в газе к скорости звука в твердой среде равно z. Модуль Юнга для твердого тела равен E, плотность тела равна ρ, температура воздуха равна T. Процесс распространения звука в воздухе считайте *адиабатическим* (см. п. 2.2.6). Определите неизвестную величину.

Шифр	N	γ	μ, кг/моль	T, К	ρ, кг/м^3	E, ГПа	z
1	2	–	0,029	293	2600	69	?
2	3	–	0,044	273	?	200	0,052
3	–	1,4	0,028	?	10500	74	0,133
4	1	–	0,004	293	19300	?	0,227
5	–	1,4	?	273	8930	98	0,0951

Задача 1.5.3

Два поезда идут навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. Первый поезд дает свисток с частотой ν_0. Частота колебаний звука, который слышит пассажир второго поезда: 1) перед встречей поездов равна ν_1; 2) после встречи поездов равна ν_2. Скорость звука равна u. Определите неизвестную величину.

Шифр	v_1, м/с	v_2, м/с	ν_0, Гц	u, м/с	ν_1, Гц	ν_2, Гц
1	20	15	600	340	–	?
2	20	15	600	340	?	–
3	15	20	?	340	–	544
4	15	20	?	340	669	–
5	20	20	600	?	–	544

Задача 1.5.4

На одной и той же нормали к стенке находятся источник звуковых колебаний, частота которых равна ν_0, и приемник. Источник и приемник неподвижны, а стенка удаляется от источника и приемника со скоростью v. Приемник измеряет частоту колебаний ν_2. Частота биений, которую регистрирует приемник, равна $\Delta\nu$*. Скорость звука равна *u*. Определите неизвестную величину.

Шифр	ν_0, Гц	v, м/с	*u*, м/с	$\Delta\nu$, Гц	ν_2, Гц
1	1700	6	340	?	–
2	1700	6	340	–	?
3	?	50	1450	50	–
4	750	50	1450	–	?
5	200	?	340	100	–

* Частота биений $\Delta\nu = |\nu_2 - \nu_0|$.

Глава 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

2.1. Молекулярно-кинетическая теория

2.1.1. Количество вещества

Числом Авогадро называется число атомов, содержащихся в 12 г углерода:

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Отношение числа молекул N в макрообъекте к числу Авогадро N_A есть *число молей*, или *количество вещества*:

$$\nu = \frac{N}{N_A}. \qquad (2.1.1)$$

Объем одного моля газа (V_1) при нормальных условиях* составляет $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3. Число молей газа, содержащихся в объеме V, можно записать и так:

$$\nu = \frac{V}{V_1}. \qquad (2.1.2)$$

Концентрация n – число частиц в единице объема, связана с плотностью, молярной массой μ и числом Авогадро соотношением

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu}, \qquad (2.1.3)$$

где ρ – плотность вещества:

$$\rho = \frac{m}{V}. \qquad (2.1.4)$$

Средняя длина свободного пробега λ – среднее расстояние, пробегаемое молекулой газа между двумя последовательными столкновениями, – определяется формулой

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma n}. \qquad (2.1.5)$$

---

* Давление $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па; температура $T_0 = 273$ К.

В этой формуле величина $\sigma = \pi d^2$ – площадь *эффективного поперечного сечения соударения молекул.*

Среднее время свободного пробега τ – время между двумя последовательными столкновениями – зависит от средней скорости $\langle \mathrm{v} \rangle$ молекул и λ:

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle \mathrm{v} \rangle}. \tag{2.1.6}$$

2.1.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории (МКТ)

$$P = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{кин}} \rangle, \tag{2.1.7}$$

где $\langle \varepsilon_{\text{кин}} \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы, определяемая выражением

$$\langle \varepsilon_{\text{кин}} \rangle = \frac{1}{2} m_0 \langle \mathrm{v}^2 \rangle, \tag{2.1.8}$$

где m_0 – масса одной молекулы.

2.1.3. Статистические распределения

2.1.3.1. Распределение Максвелла

Функция Максвелла – функция распределения молекул по скоростям –

$$F(\mathrm{v}) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \mathrm{v}^2 \exp\left(-\frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2kT} \right). \tag{2.1.9}$$

В формуле (2.1.9) отношение $\dfrac{m_0}{k}$ можно заменить отношением $\dfrac{\mu}{R}$, что удобнее, так как молярную массу газа можно определить без труда в соответствии с формулами (2.1.2) – (2.1.3):

$$\frac{m_0}{k} = \frac{\mu}{R}, \tag{2.1.10}$$

где m_0 – масса одной молекулы ($N = 1$), а постоянная Больцмана k

связана с универсальной газовой постоянной R соотношением

$$k = \frac{R}{N_A}. \tag{2.1.11}$$

Функция Максвелла $F(\mathrm{v})$ имеет максимум при значении скорости

$$\mathrm{v}_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \tag{2.1.12}$$

которое вычисляется из условия $\dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{v})}{\mathrm{dv}} = 0$ и называется *наиболее вероятной скоростью*.

Средняя скорость молекул $\langle \mathrm{v} \rangle$ определяется по формуле

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \int_0^\infty \mathrm{v}F(\mathrm{v})\mathrm{dv} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty \exp\left(-\frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2kT}\right)\mathrm{v}^2 \mathrm{dv} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \tag{2.1.13}$$

Среднее значение квадрата скорости $\langle \mathrm{v}^2 \rangle$ найдем по формуле

$$\langle \mathrm{v}^2 \rangle = \int_0^\infty \mathrm{v}^2 F(\mathrm{v})\mathrm{dv} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty \exp\left(-\frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2kT}\right)\mathrm{v}^4 \mathrm{dv} =$$
$$= \frac{3kT}{m_0} = \frac{3RT}{\mu}. \tag{2.1.14}$$

Средней квадратичной скоростью называется величина

$$\mathrm{v}_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle \mathrm{v}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \tag{2.1.15}$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул $\langle \varepsilon_{\text{кин}} \rangle$ равна

$$\langle \varepsilon_{\text{кин}} \rangle = \frac{m_0 \langle \mathrm{v}^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2}kT. \tag{2.1.16}$$

Наравне с уравнением (2. 1.7) – уравнение

$$P = nkT \tag{2.1.17}$$

также называют ***основным уравнением МКТ***.

2.1.3.2. Барометрическая формула

Формула

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right) \tag{2.1.18}$$

носит название *барометрической формулы*[*].

2.1.3.3. Распределение Больцмана

Зависимость концентрации n молекул газа от высоты выводится на основе формулы (2.1.18) с использованием основного уравнения МКТ (2.1.17):

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right). \tag{2.1.19}$$

Заменив молярную массу массой одной молекулы, получим следующее выражение для концентрации молекул газа:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right). \tag{2.1.20}$$

2.1.4. Внутренняя энергия идеального газа

Внутренняя энергия идеального газа равна суммарной кинетической энергии движения молекул:

$$U = N\langle \varepsilon_{\text{кин}} \rangle, \tag{2.1.21}$$

где средняя кинетическая энергия молекулы газа определяется формулой

$$\langle \varepsilon_{\text{кин}} \rangle = \frac{1}{2} kT\left(i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}\right). \tag{2.1.22}$$

Здесь i – *число степеней свободы молекулы – количество независимых координат, с помощью которых может быть однозначно задано положение молекулы в пространстве.*

---

[*] Формула (2.1.18) справедлива на высотах до 11 км для изотермической атмосферы.

Число степеней свободы для различных молекул представлено в табл. 2.1.1.

Таблица 2.1.1

Число атомов в молекуле N	Число степеней свободы			
	$i_{пост}$	$i_{вращ}$	$i_{колеб}$	Полное число степеней свободы i
1	3	–	–	3
2	3	2	1	6
3 (нелинейная молекула)	3	3	3	9
3 (линейная молекула)	3	2	4	9
$N \geq 4$ (нелинейная молекула)	3	3	$3N - 6$	$3N$
$N \geq 4$ (линейная молекула)	3	2	$3N - 5$	$3N$

2.1.5. Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы молекулы

На каждую поступательную и вращательную степень свободы молекулы приходится средняя энергия, равная $\frac{kT}{2}$, *а на каждую колебательную степень свободы приходится средняя энергия, равная* (kT), *которая делится поровну между потенциальной и кинетической энергией.*

Внутренняя энергия одного моля $U_{мол}$ идеального газа ($\nu = 1$) равна

$$U_{мол} = \frac{1}{2}kTN_A\left(i_{пост} + i_{вращ} + 2i_{колеб}\right) = \\ = \frac{1}{2}RT\left(i_{пост} + i_{вращ} + 2i_{колеб}\right) = \frac{i}{2}RT. \tag{2.1.23}$$

Внутренняя энергия произвольного количества газа массы m определяется по формуле

$$U = \frac{i}{2}kTN = \frac{1}{2}\frac{m}{\mu}RT\left(i_{пост} + i_{вращ} + 2i_{колеб}\right). \tag{2.1.24}$$

Примеры решения задач

Пример 2.1.1. Найдите число атомов N и их концентрацию n в медной монете массой m = 5 г. Оцените размер d атома меди. Плотность меди ρ = 8600 кг/м^3.

Решение

Число атомов меди N найдем по формуле

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \tag{1}$$

где μ – молярная масса меди, которую определим по таблице Д.И. Менделеева (~ относительная атомная масса).

Концентрацию n найдем по формуле

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu}. \tag{2}$$

Поскольку в твердых телах атомы плотно примыкают друг к другу, размер атома d примерно равен расстоянию между атомами, следовательно,

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Проверим размерность величины d:

$$[N] = \left[\frac{m}{\mu} N_A\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль}} = 1,$$

$$[n] = \left[\frac{\rho N_A}{\mu}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{моль}} = \text{м}^{-3},$$

$$[d] = \left[\sqrt[3]{\frac{1}{n}}\right] = \sqrt[3]{\text{м}^3} = \text{м}.$$

Представим размерность исходных данных задачи в системе СИ: $m = 5$ г $= 5 \cdot 10^{-3}$ кг, $\rho = 8600$ кг/м^3, $\mu = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и проведем расчет

$$N = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} = 4,7 \cdot 10^{22},$$

$$n = \frac{8600 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} = 8,1 \cdot 10^{28} \text{м}^{-3},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{8,1 \cdot 10^{28}}} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{м}.$$

Пример 2.1.2. Найдите молярную массу газовой смеси, состоящей из одной части (по массе) водорода и восьми частей кислорода.

Решение

Обозначим массы водорода и кислорода m_1 и m_2, молярные массы соответственно μ_1 и μ_2. Молярная масса смеси равна

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\nu}, \tag{1}$$

где ν – количество смеси (в молях).

Количество смеси равно

$$\nu = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}, \tag{2}$$

тогда с учетом формулы (2) для молярной массы получим выражение

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}}. \tag{3}$$

Учитывая, что по условию $m_2 = 8m_1$, окончательно с учетом формулы (3) получаем следующее выражение для μ:

$$\mu = \frac{9\mu_1\mu_2}{8\mu_1 + \mu_2}.$$

Проверим размерность молярной массы μ:

$$[\mu] = \frac{9\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль}^2} = \text{кг/моль}.$$

Представим размерность молярных масс в системе СИ: $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и проведем расчет

$$\mu = \frac{9 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 32 \cdot 10^{-3}} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Пример 2.1.3. При нормальных условиях (давление P = 101,3 кПа, температура T = 300 К) найдите концентрацию n молекул воздуха, плотность воздуха ρ, среднее расстояние ℓ между молекулами и среднюю длину свободного пробега молекул λ. Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, средний диаметр молекул $d = 0,3$ нм.

Решение

Концентрацию молекул найдем из основного уравнения МКТ. Тогда

$$n = \frac{P}{kT}. \tag{1}$$

Плотность воздуха ρ получим, умножив концентрацию на массу одной молекулы, которую можно найти, зная молярную массу воздуха:

$$\rho = \frac{\mu}{N_A} n. \tag{2}$$

Среднее расстояние между молекулами равно

$$\ell = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Средняя длина свободного пробега равна

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n}. \tag{4}$$

Проверим размерность искомых величин.

$$[n] = \left[\frac{P}{kT}\right] = \frac{\text{Па} \cdot \text{К}}{\text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{м}^{-3},$$

$$[\rho] = \left[\frac{\mu}{N_A} n\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$[\ell] = \left[\sqrt[3]{\frac{1}{n}}\right] = \sqrt[3]{\text{м}^3} = \text{м},$$

$$[\lambda] = \left[\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n}\right] = \frac{\text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{м}.$$

Представим размерность исходных данных задачи в системе СИ: $P = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К, $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м и проведем расчет

$$n=\frac{1{,}013\cdot 10^{5}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 273}=2{,}7\cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3},$$

$$\rho=\frac{29\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}7\cdot 10^{25}}{6\cdot 10^{23}}=1{,}3\ \text{кг/м}^{3},$$

$$\ell=\sqrt[3]{\frac{1}{2{,}7\cdot 10^{-25}}}=3{,}3\cdot 10^{-9}\ \text{м},$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi\left(3\cdot 10^{-10}\right)^{2}\cdot 2{,}7\cdot 10^{25}}=9{,}4\cdot 10^{-8}\ \text{м}.$$

Пример 2.1.4. Для газовой смеси, состоящей из кислорода массой m_1 = 1 г и гелия массой m_2 = 8 г при температуре t = 27 °С, найдите внутреннюю энергию U.

Решение

Кислород – двухатомный газ, при температуре t = 27 °С колебательные степени свободы не возбуждаются, поэтому число степеней свободы для кислорода $i_1 = 5$. Гелий – одноатомный газ, число степеней свободы $i_2 = 3$. Полная внутренняя энергия всего количества смеси равна

$$U=\frac{1}{2}RT\left(5\frac{m_1}{\mu_1}+3\frac{m_2}{\mu_2}\right).$$

Проверим размерность внутренней энергии:

$$[U]=\left[\frac{1}{2}RT\left(5\frac{m_1}{\mu_1}+3\frac{m_2}{\mu_2}\right)\right]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}}=\text{Дж}.$$

Представим размерность данных задачи в системе СИ: m_1 = 1 г = = 10^{-3} кг, m_2 = 8 г = $8\cdot 10^{-3}$ кг, T = 27 °С + 273 = 300 К и проведем расчет

$$U=\frac{8{,}31\cdot 300}{2}\left(5\cdot\frac{10^{-3}}{32\cdot 10^{-3}}+3\cdot\frac{8\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10^{-3}}\right)=7670\ \text{Дж}=7{,}67\ \text{кДж}.$$

Пример 2.1.5. Найдите для кислорода при температуре T = 300 К наиболее вероятную, среднюю и среднюю квадратичную скорости молекул. Определите относительное число молекул $\frac{\Delta N}{N}$, скорости которых отличаются от наиболее вероятной не более чем на 1 %.

Решение

Наиболее вероятная скорость может быть найдена по формуле

$$\mathrm{v}_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \qquad (1)$$

средняя скорость – по формуле

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \int_0^\infty \mathrm{v}F(\mathrm{v})d\mathrm{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \qquad (2)$$

а средняя квадратичная скорость – по формуле

$$\mathrm{v}_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \qquad (3)$$

Проведем расчеты по формулам (1) – (3):

$$\mathrm{v}_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2\cdot 8{,}31\cdot 300}{32\cdot 10^{-3}}} = 395 \text{ м/с},$$

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \sqrt{\frac{8\cdot 8{,}31\cdot 300}{\pi\cdot 32\cdot 10^{-3}}} = 445 \text{ м/с},$$

$$\mathrm{v}_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3\cdot 8{,}31\cdot 300}{32\cdot 10^{-3}}} = 483 \text{ м/с}.$$

Определим теперь относительное число молекул, скорости которых отличаются от $\mathrm{v}_{\text{вер}}$ не более чем на 1 %. Поскольку интервал значений скорости $\Delta\mathrm{v} = (\mathrm{v}_{\text{вер}} + 0{,}01\mathrm{v}_{\text{вер}}) - (\mathrm{v}_{\text{вер}} - 0{,}01\mathrm{v}_{\text{вер}}) = 0{,}02\mathrm{v}_{\text{вер}} << \mathrm{v}_{\text{вер}}$, то искомое число молекул равно

$$\frac{\Delta N}{N} = F(\mathrm{v}_{\text{вер}})\Delta\mathrm{v} = 4\pi\mathrm{v}_{\text{вер}}^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{m_0\mathrm{v}_{\text{вер}}^2}{2kT}\right)\cdot 0{,}02\mathrm{v}_{\text{вер}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\exp(-1)\cdot 0{,}02 = 0{,}017.$$

Пример 2.1.6. Пылинки массой $m = 10^{-18}$ г взвешены в воздухе. Определите толщину слоя воздуха, в пределах которого концентрация пылинок различается не более чем на 1 %. Температура T воздуха во всем объеме одинакова и равна 300 К.

Решение

При равновесном распределении пылинок концентрация их зависит только от координаты z по оси, направленной вертикально. В этом случае к распределению пылинок можно применить формулу Больцмана

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{потенц}}}{kT}\right). \tag{1}$$

Так как в однородном поле силы тяжести $\varepsilon_{\text{потенц}} = mgz$, то

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right). \tag{2}$$

По условию задачи, изменение Δn концентрации с высотой мало по сравнению с n $(\Delta n / n = 0{,}01)$, поэтому без существенной погрешности изменение концентрации Δn можно заменить дифференциалом $\mathrm{d}n$. После дифференцирования выражения (2) получим

$$\mathrm{d}n = -n\frac{mg}{kT}\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right). \tag{3}$$

С учетом формулы Больцмана (2) получим

$$\mathrm{d}n = -n\frac{mg}{kT}\mathrm{d}z\ . \tag{4}$$

Отсюда находим изменение координаты z:

$$\mathrm{d}z = -\frac{kT}{mg}\frac{\mathrm{d}n}{n}. \tag{5}$$

Знак «минус» показывает, что положительным изменениям координаты ($\mathrm{d}z > 0$) соответствует уменьшение относительной концентрации $(\mathrm{d}n < 0)$.

В формуле (5) опустим знак «минус» (в данном случае он несуществен) и заменим дифференциалы $\mathrm{d}z$ и $\mathrm{d}n$ конечными приращениями Δz и Δn:

$$\Delta z = \frac{kT}{mg}\frac{\Delta n}{n}. \quad (6)$$

Подставив в формулу (6) значения величин $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $T = 300$ К, $g = 9{,}81$ м/с^2, $\Delta n / n = 0{,}01$ и произведя вычисления, найдем

$$\Delta z = 4{,}23 \text{ мм}.$$

Как видно из полученного результата, концентрация даже таких маленьких пылинок ($m = 10^{-18}$ г) очень быстро изменяется с высотой.

Пример 2.1.7. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $P = 79$ кПа, благодаря чему летчик считает высоту h_1 полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с $t_1 = 5$ °C до $t_2 = 1$ °C. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление P_0 у поверхности Земли считайте нормальным.

Решение

Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right). \quad (1)$$

Барометр может показывать неизменное давление P при различных температурах t_1 и t_2 за бортом только в том случае, если самолет находится не на высоте h_1 (которую летчик считает неизменной), а на некоторой другой высоте h_2.

Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h_1}{RT_1}\right); \quad P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h_2}{RT_2}\right), \quad (2)$$

где T_1 и T_2 – значения температур по шкале Кельвина.

Найдем отношение P_0/P, и обе части полученных равенств прологарифмируем:

$$\ln\frac{P_0}{P} = \frac{\mu g h_1}{RT_1}; \quad \ln\frac{P_0}{P} = \frac{\mu g h_2}{RT_2}. \quad (3)$$

Из полученных соотношений (3) выразим высоты h_2 и h_1 и найдем их разность:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{R}{\mu g} \ln\left(\frac{P_0}{P}\right)\left(T_2 - T_1\right). \tag{4}$$

Подставим в выражение (4) значения физических величин и получим

$$\Delta h = -28{,}5 \text{ м}.$$

Знак «минус» означает, что $h_2 < h_1$ и, следовательно, самолет снизился на 28,5 м по сравнению с предполагаемой высотой.

Домашние задания

Задача 2.1.1

При температуре t давление газа равно P, средняя длина свободного пробега молекул λ. Эффективное сечение молекулы газа равно σ. Определите неизвестную величину.

Шифр	t, °C	P, кПа	λ, мкм	$\sigma \cdot 10^{20}$, м^2
1	+350	?	0,5	68
2	?	500	0,04	34
3	–13	120	?	20
4	+460	?	45,0	44
5	+17	17	?	24

Задача 2.1.2

При температуре t и давлении P молекула газа испытывает в единицу времени z соударений с другими молекулами. Масса моля газа μ, эффективный диаметр молекулы d, средняя длина свободного пробега λ. Определите неизвестную величину.

Шифр	t, °C	P, мм рт. ст.	$z \cdot 10^{-9}$, с$^{-1}$	μ, кг/моль	d, нм	λ, нм
1	+280	2600	?	0,002	0,28	–
2	–106	490	–	–	0,22	?
3	+25	?	4	0,032	0,36	–
4	–45	30	?	0,028	0,38	–
5	?	360	–	–	0,29	75

Задача 2.1.3

В баллоне объемом V находится смесь кислорода и гелия. Число молекул кислорода равно N_1, число молекул гелия N_2. Температура смеси равна T, давление P. Среднее значение молярной массы смеси равно μ. Определите неизвестную величину.

Шифр	V, м^3	$N_1 \cdot 10^{-21}$	$N_2 \cdot 10^{-21}$	T, К	P, Па	μ, кг/моль
1	0,45	–	8,4	290	140	?
2	0,15	5,1	–	?	230	0,013
3	0,31	?	–	410	275	0,017
4	?	–	0,6	530	250	0,022
5	0,25	6,6	0,9	500	?	–

Задача 2.1.4

Смесь содержит газ с молярной массой μ_1 в количестве m_1 и газ с молярной массой μ_2 в количестве m_2. При давлении P и температуре t плотность смеси равна ρ. Определите неизвестную величину.

Шифр	μ_1, кг/моль	m_1, г	μ_2, кг/моль	m_2, г	P, кПа	t, °С	ρ, г/м^3
1	0,028	170	0,004	22	29	?	160
2	0,044	480	0,032	230	6,5	+150	?
3	0,002	270	0,020	690	?	–85	390
4	0,028	150	0,032	?	10	+27	120
5	0,020	?	0,040	320	18	80	210

Задача 2.1.5

В сосуде объемом V находится смесь двух газов: газ с молярной массой μ_1 в количестве m_1 и газ с молярной массой μ_2 в количестве m_2. При температуре t давление в сосуде P. Определите неизвестную величину.

Шифр	V, л	μ_1, кг/моль	m_1, г	μ_2, кг/моль	m_2, г	t, °С	P, МПа
1	4,1	0,044	21	0,032	12	+63	?
2	0,75	0,028	0,15	0,002	0,14	–15	?
3	?	0,002	1,1	0,004	2,9	+75	0,4
4	4,5	0,032	4,2	0,020	?	+21	0,17
5	4,6	0,032	23	0,004	15	?	1,2

Задача 2.1.6

Некоторая масса молекулярного азота находится при температуре T и давлении P. Запас кинетической энергии поступательного движения молекул газа составляет $E_к$. Средняя квадратичная скорость молекул азота равна $v_{ср.кв}$, масса газа равна m, число жестких молекул газа равно N, объем газа равен V, концентрация n. Определите неизвестную величину.

Шифр	T, К	P, кПа	$E_к$, Дж	$v_{ср.кв}$, м/с	m, кг	N	n, м$^{-3}$	V, м^3
1	300	100	6,3	?	–	–	–	–
2	300	–	6,3	–	–	?	–	–
3	300	–	–	517	?	$1{,}015 \cdot 10^{21}$	–	–
4	300	100	–	–	–	–	?	–
5	–	100	6,3	–	–	–	–	?

Задача 2.1.7

Идеальный газ находится в цилиндре, закрытом поршнем. Газ занимает объем V_1 при температуре T_1 и давлении P_1. При переходе газа в новое состояние давление повысилось до P_2, а объем увеличился до V_2. При этом средняя квадратичная скорость молекул изменилась в k раз. Определите неизвестную величину.

Шифр	V_1, м^3	T_1, К	P_1, кПа	P_2, кПа	V_2, м^3	T_2, К	k
1	10	–	98	100	10,5	–	?
2	?	–	98	100	10,5	–	2
3	–	250	–	–	–	?	1,035
4	–	250	–	–	–	268	?
5	5	–	101	?	15	–	3

Задача 2.1.8

Одинаковые частицы массой m каждая распределены в *однородном гравитационном поле напряженностью* G. Отношение концентраций частиц, находящихся на эквипотенциальных уровнях, отстоящих друг от друга на $\Delta h = h_2 - h_1$, равно n_1/n_2. Температура T во всех слоях считается одинаковой. Определите неизвестную величину.

Шифр	m, г	G, мкН/кг	Δh, м	T, К	n_1/n_2
1	10^{-12}	0,2	10	290	?
2	10^{-12}	?	10	290	148
3	10^{-12}	2	?	290	1,65
4	?	10	1000	290	14,8
5	$1{,}08 \cdot 10^{-15}$	1,0	10	?	99,8

Задача 2.1.9

Барометр на высоте h показывает давление P газа, молярная масса которого равна μ. На Земле барометр показывал давление $P_0 = 100$ кПа. Считать, что для данного газа температура T не изменяется с высотой. Определите неизвестную величину.

Шифр	P, кПа	T, К	h, м	μ, кг/моль
1	90	290	?	0,029
2	95,8	77	100	?
3	97,7	400	?	0,032
4	?	1000	10	0,002
5	99,9	?	1	0,004

2.2. Термодинамика. Первое начало термодинамики

2.2.1. Уравнения состояния идеального газа

Уравнение Клапейрона – Менделеева

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \tag{2.2.1}$$

где R – универсальная газовая постоянная, $R = kN_A = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Закон Бойля – Мариотта:

$$PV = \text{const}, \tag{2.2.2}$$

если количество вещества ν и температура T постоянны (*изотермический* процесс).

Закон Гей-Люссака:

$$\frac{V}{T} = \text{const}, \tag{2.2.3}$$

если количество вещества ν и давление P постоянны (*изобарический* процесс).

Закон Шарля:

$$\frac{P}{T} = \text{const}, \tag{2.2.4}$$

если количество вещества ν и объем V постоянны (*изохорический* процесс).

2.2.2. Основные понятия

2.2.2.1. Внутренняя энергия

Внутренняя энергия как ***функция состояния*** однозначно определяется состоянием системы: каждому состоянию системы присуще только одно значение энергии. Изменение энергии при переходе системы из одного состояния в другое описывается соотношением

$$\Delta U = U_2 - U_1 . \tag{2.2.5}$$

2.2.2.2. Работа

Количество энергии, переданное системой (системе) в процессе расширения или сжатия газа, называют *работой* A. Работу A принято считать положительной, если при этом энергия передается от системы внешним телам (работу совершает система). В противном случае величина работы A считается отрицательной (работа совершается над системой). Элементарная работа равна

$$\delta A = PS\mathrm{d}\ell = F\mathrm{d}\ell = P\mathrm{d}V , \tag{2.2.6}$$

где P – давление газа;
S – площадь поршня;
$\mathrm{d}\ell$ – бесконечно малое перемещение поршня;
F – сила давления;
$\mathrm{d}V$ – изменение объема.

Полная работа равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P\mathrm{d}V . \tag{2.2.7}$$

2.2.2.3. Теплота

Количество энергии, переданное системой (системе) в процессе теплообмена, называют *количеством теплоты*, или *теплотой* Q. Теплота Q считается *положительной*, если она передается от внешних тел к системе, и *отрицательной*, если она передается от системы внешним телам.

2.2.3. Первое начало термодинамики

Количество тепла, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение работы над внешними телами:
– в интегральной форме

$$Q = \Delta U + A ; \tag{2.2.8}$$

– в дифференциальной форме

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A , \tag{2.2.9}$$

где δQ и δA – *элементарные* значения теплоты и работы;
$\mathrm{d}U$ – *полный дифференциал* внутренней энергии.

2.2.4. Теплоемкость идеального газа

Теплоемкостью тела (системы) называют количество тепла, которое необходимо сообщить этому телу, чтобы увеличить его температуру на один кельвин:

$$C = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}. \qquad (2.2.10)$$

Размерность теплоемкости $[C] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Теплоемкость, отнесенная к единице массы вещества, называется *удельной теплоемкостью* ($C^{\text{уд}}$):

$$C^{\text{уд}} = \frac{\delta Q}{m\mathrm{d}T}. \qquad (2.2.11)$$

Размерность удельной теплоемкости $[\mathrm{C}^{\text{уд}}] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}}$.

Теплоемкость, отнесенная к одному молю вещества, называется *молярной теплоемкостью* ($C^{\text{мол}}$):

$$C^{\text{мол}} = \frac{\delta Q}{\nu \cdot \mathrm{d}T}. \qquad (2.2.12)$$

Размерность молярной теплоемкости $[\mathrm{C}^{\text{мол}}] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$.

Между молярной и удельной теплоемкостями существует очевидное соотношение

$$C^{\text{мол}} = \mu C^{\text{уд}}, \qquad (2.2.13)$$

где μ – молярная масса вещества.

Изохорическая теплоемкость

Изохорическая молярная теплоемкость $C_V^{\text{мол}}$ идеального газа

$$C_V^{\text{мол}} = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{i}{2}R, \qquad (2.2.14)$$

$$C_V^{\text{уд}} = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}. \qquad (2.2.15)$$

Изобарическая теплоемкость

Изобарическая молярная теплоемкость $C_P^{\text{мол}}$ идеального газа

$$C_P^{\text{мол}} = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_P = C_V^{\text{мол}} + R = \frac{i+2}{2}R, \qquad (2.2.16)$$

$$C_P^{\text{уд}} = C_V^{\text{уд}} + \frac{R}{\mu} = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}. \qquad (2.2.17)$$

Эти формулы выражают *уравнение Майера*.

Коэффициент (постоянная) Пуассона, или *показатель адиабаты*:

$$\gamma = \frac{C_P^{\text{мол}}}{C_V^{\text{мол}}} = \frac{i+2}{i}. \qquad (2.2.18)$$

2.2.5. Политропические процессы

Политропическими процессами называются процессы, происходящие при постоянной теплоемкости.

Уравнение политропического процесса может быть записано в виде

$$PV^n = \text{const}. \qquad (2.2.19)$$

Показатель политропы:

$$n = \frac{C^{\text{мол}} - C_P^{\text{мол}}}{C^{\text{мол}} - C_V^{\text{мол}}}. \qquad (2.2.20)$$

В табл. 2.2.1 представлены значения теплоемкости C для различных политропических процессов.

Таблица 2.2.1

Процесс	n	C
Изобарический	0	C_P
Изотермический	1	∞
Изохорический	∞	C_V
Адиабатический	γ	0

2.2.6. Адиабатический процесс

Адиабатический процесс осуществляется без теплообмена с внешней средой:

$$Q = 0.$$

Первое начало термодинамики для адиабатического процесса принимает следующий вид:

$$-\Delta U = A. \qquad (2.2.21)$$

Уравнения адиабатического процесса – *уравнения Пуассона*:

$$\left.\begin{aligned} &P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}, \\ &T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}, \\ &\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\gamma-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.22)$$

2.2.7. Работа идеального газа в политропических процессах

Изобарический процесс (P = const):

$$\delta A = P\mathrm{d}V \Rightarrow A = \int_1^2 P\mathrm{d}V = P\int_1^2 \mathrm{d}V = P\left(V_2 - V_1\right). \qquad (2.2.23)$$

Изохорический процесс $(V = \text{const})$:

$$A = 0, \text{ так как } \Delta V = 0. \qquad (2.2.24)$$

Изотермический процесс $(T = \text{const})$:

$$A = \int_1^2 P\mathrm{d}V = \int_1^2 \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}\mathrm{d}V = \frac{m}{\mu}RT\int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (2.2.25)$$

Адиабатический процесс (Q = 0):

$$A = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right) \qquad (2.2.26)$$

или

$$A = -\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{m}{\mu}C_V^{\text{мол}}\left(T_1 - T_2\right)\cdot \qquad (2.2.27)$$

2.2.8. Первое начало термодинамики для изопроцессов

Изохорический процесс

Для изохорического процесса

$$V = \text{const} \Rightarrow \mathrm{d}V = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Rightarrow \delta Q = \mathrm{d}U = \nu\, C_V^{\text{мол}} \cdot \mathrm{d}T,$$

$$Q = \nu\, C_V^{\text{мол}}\, \Delta T. \qquad (2.2.28)$$

Изобарический процесс

Для изобарического процесса

$$P = \text{const} \Rightarrow \delta Q = \mathrm{d}U + \delta A = \nu\, C_V^{\text{мол}} \cdot \mathrm{d}T + \nu R \cdot \mathrm{dT} = \nu\, C_P^{\text{мол}} \cdot \mathrm{d}T,$$

$$Q = \nu\, C_P^{\text{мол}}\, \Delta T. \qquad (2.2.29)$$

Изотермический процесс

Для изотермического процесса

$$T = \text{const} \Rightarrow \mathrm{d}T = 0 \Rightarrow \mathrm{d}U = 0 \Rightarrow \delta Q = \delta A,$$

$$Q = A = \nu RT \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (2.2.30)$$

Адиабатический (изэнтропический) процесс

Для адиабатического (изэнтропического) процесса

$$S = \text{const} \Rightarrow \delta Q = 0 \Rightarrow \delta A = -\mathrm{d}U,$$

$$A = -\Delta U = -\nu C_V \Delta T\ . \qquad (2.2.31)$$

Примеры решения задач

Пример 2.2.1. Вычислите удельные теплоемкости неона и водорода при постоянных объеме ($C_V^{\text{уд}}$) и давлении ($C_P^{\text{уд}}$), принимая эти газы за идеальные.

Решение

Удельная теплоемкость идеальных газов в изохорических процессах:

$$C_V^{\text{уд}} = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}. \tag{1}$$

Для неона (одноатомный газ) $i_1 = 3$, $\mu_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Подставив в формулу (1) значения i_1, μ_1 и R, произведем вычисления:

$$C_V^{\text{уд}} = 624 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}; \; C_P^{\text{уд}} = 1{,}04 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Для водорода (двухатомный газ) $i_2 = 5$, $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Расчеты по той же формуле дают следующие значения удельных изохорических теплоемкостей водорода:

$$C_V^{\text{уд}} = 10{,}4 \text{ кДж/(кг·К)}; \; C_P^{\text{уд}} = 14{,}6 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Пример 2.2.2. Вычислите удельные теплоемкости $C_V^{\text{уд}}$ и $C_P^{\text{уд}}$ смеси неона и водорода. Массовые доли газов соответственно равны $\omega_1 = 0{,}8$ и $\omega_2 = 0{,}2$.

Решение

Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме C_V найдем из следующих рассуждений. Теплоту, необходимую для нагревания смеси на ΔT, выразим двумя соотношениями

$$Q = C_V^{\text{уд}}\left(m_1 + m_2\right)\Delta T, \tag{1}$$

$$Q = \left[\left(C_V^{\text{уд}}\right)_1 m_1 + \left(C_V^{\text{уд}}\right)_2 m_2\right]\Delta T, \tag{2}$$

где $C_V^{\text{уд}}$ – удельная теплоемкость смеси;

m_1 и m_2 – масса неона и масса водорода соответственно;

$\left(C_V^{\text{уд}}\right)_1$ и $\left(C_V^{\text{уд}}\right)_2$ – удельные теплоемкости неона и водорода соответственно.

Для каждого из газов удельная изохорическая теплоемкость рассчитывается по формуле

$$C_V^{\text{уд}} = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}. \tag{3}$$

Приравняв правые части выражений (1) и (2) и разделив обе части полученного равенства на ΔT, найдем

$$C_V^{\text{уд}}\left(m_1 + m_2\right) = \left(C_V^{\text{уд}}\right)_1 m_1 + \left(C_V^{\text{уд}}\right)_2 m_2, \tag{4}$$

откуда выразим

$$C_V^{\text{уд}} = \left(C_V^{\text{уд}}\right)_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \left(C_V^{\text{уд}}\right)_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

Пусть

$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \text{ и } \omega_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \tag{6}$$

выражают массовые доли неона и водорода соответственно. Тогда с учетом (6) формула (5) примет вид

$$C_V^{\text{уд}} = \left(C_V^{\text{уд}}\right)_1 \omega_1 + \left(C_V^{\text{уд}}\right)_2 \omega_2 \cdot \tag{7}$$

Подставив в формулу (7) числовые значения параметров, найдем

$$C_V^{\text{уд}} = 2{,}58 \text{ кДж/(К·кг)}.$$

Рассуждая таким же образом, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси в изобарических процессах:

$$C_P^{\text{уд}} = \left(C_P^{\text{уд}}\right)_1 \omega_1 + \left(C_P^{\text{уд}}\right)_2 \omega_2, \tag{8}$$

где для каждого из газов изобарическая теплоемкость рассчитывается по формуле

$$C_P^{\text{уд}} = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_P = \frac{\mathrm{d}U + \delta A}{\mathrm{d}T} = \frac{\left(i+2\right)}{2}\frac{R}{\mu}. \tag{9}$$

Произведем вычисления по этой формуле и найдем

$$C_P^{\text{уд}} = 3{,}73 \text{ кДж/(К·кг)}.$$

Пример 2.2.3. Определите количество теплоты, поглощаемой водородом массой m = 0,2 кг при нагревании его от температуры t_1 = = 0 °C до температуры t_2 = 100 °C при постоянном давлении. Найдите также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Решение

Количество теплоты Q, поглощаемое газом при изобарическом нагревании, определяется по формуле

$$Q = mC_P^{\text{уд}} \Delta T, \tag{1}$$

где m – масса нагреваемого газа;

$C_P^{\text{уд}}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении;

ΔT – изменение температуры газа.

Как известно, удельная теплоемкость при постоянном давлении C_P находится по формуле

$$C_P^{\text{уд}} = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_P = \frac{\mathrm{d}U + \delta A}{\mathrm{d}T} = \frac{(i+2)}{2}\frac{R}{\mu}. \tag{2}$$

Тогда получим, что количество теплоты можно определить так:

$$Q = m\left(\frac{i+2}{2}\right)\frac{R}{\mu}\Delta T. \tag{3}$$

Произведем вычисления по формуле (3) и найдем

$$Q = 291 \text{ кДж.}$$

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T. \tag{4}$$

После подстановки в формулу (4) числовых значений величин и вычислений получим

$$\Delta U = 208 \text{ кДж.}$$

Работу расширения газа определим по формуле, выражающей первое начало термодинамики:

$$A = Q - \Delta U. \tag{5}$$

Подставив в формулу (5) числовые значения Q и ΔU, найдем

$$A = 83 \text{ кДж}.$$

Пример 2.2.4. Кислород занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $P_1 = 200$ кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $P_3 = 500$ кПа. Постройте график процесса и найдите: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную газом работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

Решение

Построим график процесса (рис. 1). На графике точками 1, 2, 3 обозначены состояния газа, характеризуемые параметрами (P_1, V_1, T_1), (P_1, V_2, T_2), (P_3, V_2, T_3).

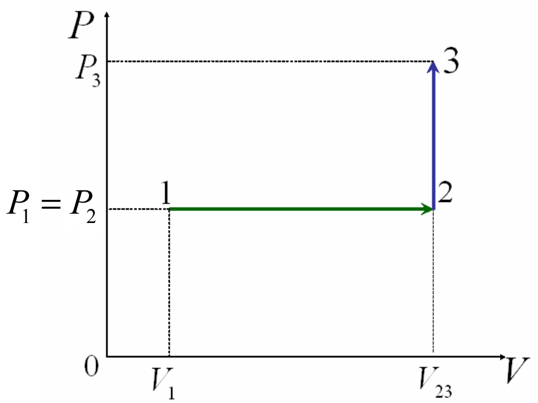


Рис. 1

1. Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния 1 в состояние 3 выражается формулой

$$\Delta U = \nu C_V^{\text{мол}} \cdot \Delta T, \qquad (1)$$

где ν – число молей газа;

$C_V^{\text{мол}}$ – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме;

ΔT – разность температур, соответствующих конечному 3 и начальному 1 состояниям, т. е. $\Delta T = T_3 - T_1$.

Так как

$$C_V^{\text{мол}} = \frac{i}{2}R\,, \tag{2}$$

то

$$\Delta U = \nu C_V^{\text{мол}} \cdot \Delta T_{31} = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_3 - T_1\right). \tag{3}$$

Температуры T_1 и T_3 выразим из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$T_1 = \frac{\mu P_1 V_1}{mR};\; T_3 = \frac{\mu P_2 V_2}{mR}. \tag{4}$$

С учетом (4) выражение (3) принимает вид

$$\Delta U = \left(\frac{i}{2}\right)\left(P_3 V_2 - P_1 V_1\right). \tag{5}$$

Подставив в формулу (5) значения величин, учитывая, что для кислорода как двухатомного газа $i = 5$, и произведя вычисления, получим

$$\Delta U = 3{,}25 \text{ МДж}.$$

2. Полная работа, совершаемая газом, равна $A = A_1 + A_2$, где A_1 – работа на участке 1–2; A_2 – работа на участке 2–3.

На участке 1–2 давление постоянно ($P_1 = P_2$). Работа в этом случае выражается формулой $A_1 = P_1\Delta V = P_1\left(V_2 - V_1\right)$. На участке 2–3 объем газа не изменяется и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю ($A_2 = 0$). Таким образом,

$$A = A_1 = P_1\left(V_2 - V_1\right). \tag{6}$$

Подставив в формулу (6) числовые значения физических величин и произведя вычисления, получим

$$A = 0{,}4 \text{ МДж}.$$

3. Согласно первому началу термодинамики количество теплоты Q, переданное газу, будет равно

$$Q = A + \Delta U = 3{,}65 \text{ МДж}.$$

Пример 2.2.5. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0{,}02$ кг при температуре $T = 300$ К. Водород начал расширяться адиабатически, увеличив свой объем в пять раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в пять раз (рис. 1). Найдите температуру T_2 в конце адиабатического расширения и работу A, совершенную газом.

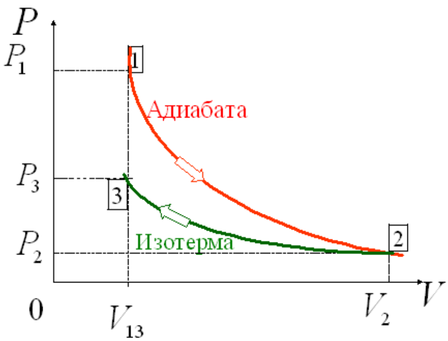


Рис. 1

Решение

Температуры и объемы газа, совершающего адиабатический процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}, \tag{1}$$

где γ – показатель адиабаты (для водорода как двухатомного газа $\gamma = 1{,}4$).

Отсюда получаем выражение для конечной температуры T_2:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}. \tag{2}$$

Подставив числовые значения заданных величин в формулу (2), найдем

$$T_2 = 300 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{1,4-1} = 157 \text{ К}.$$

Работа A газа при адиабатическом расширении равна

$$A_1 = -\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\left(T_1 - T_2\right). \quad (3)$$

Подставив в формулу (3) числовые значения величин, получим

$$A_1 = \frac{0{,}02}{2\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{5}{2}\cdot 8{,}31\cdot\left(300-157\right) = 29{,}8 \text{ кДж.}$$

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии выражается формулой

$$A_2 = RT_2\frac{m}{\mu}\ln\left(V_3/V_2\right). \quad (4)$$

Произведем вычисления по формуле (4) и найдем

$$A_2 = -21 \text{ кДж.}$$

Знак «минус» показывает, что при сжатии газа работа совершена внешними силами.

Общая работа, совершенная газом при рассмотренных выше процессах, равна

$$A = A_1 + A_2 = 29{,}8 + (-21) = 8{,}8 \text{ кДж.}$$

Домашние задания

Задача 2.2.1

Смесь содержит m_1 двухатомного газа с молярной массой μ_1 и m_2 трехатомного газа с молярной массой μ_2. Удельные теплоемкости смеси при постоянном объеме и постоянном давлении равны C_V и C_P. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, г	μ_1, кг/моль	m_2, г	μ_2, кг/моль	C_V, Дж/ (кг·К)	C_P, Дж/ (кг·К)
1	?	0,028	185	0,064	650	–
2	170	0,032	?	0,048	–	880
3	330	0,040	150	0,018	–	?
4	140	0,002	230	0,024	?	–
5	750	0,032	170	0,044	–	?

Задача 2.2.2

Разность удельных теплоемкостей некоторого газа равна (C_P – – C_V). Жесткие молекулы газа состоят из N атомов. Молярная масса этого газа равна μ, его удельная теплоемкость при постоянном объеме равна C_V, а при постоянном давлении его удельная теплоемкость равна C_P. Определите неизвестную величину.

Шифр	($C_P - C_V$), Дж/(кг·К)	μ, кг/моль	C_V, Дж/(кг·К)	N	C_P, Дж/(кг·К)
1	260	?	–	–	–
2	–	0,044	–	3	?
3	–	0,004	?	1	–
4	297	–	–	?	1039
5	189	–	567	?	–

Задача 2.2.3

Для смеси, содержащей m_1 двухатомного газа с молярной массой μ_1 и m_2 одноатомного газа с молярной массой μ_2, отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме равно γ. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, г	μ_1, кг/моль	m_2, г	μ_2, кг/моль	γ
1	280	–	330	0,004	1,60
2	500	0,002	130	0,004	?
3	26	0,028	45	?	1,49
4	–	0,071	46	0,020	1,55
5	100	0,032	?	0,040	1,45

Задача 2.2.4

Идеальный газ с удельными теплоемкостями при постоянном давлении C_P и постоянном объеме C_V (отношение теплоемкостей $C_p/C_V = \gamma$) совершает политропный процесс с показателем политропы n. Удельная теплоемкость газа в этом процессе равна C. Определите неизвестную величину.

Шифр	C_P, кДж/(кг·К)	C_V, кДж/(кг·К)	$\gamma = C_P/C_V$	n	C, кДж/(кг·К)
1	–	?	1,67	1,3	–0,55
2	1,95	–	1,1	?	+2,6
3	–	10,4	1,1	?	–7,5
4	5,20	3,1	–	1,2	?
5	0,91	0,5	–	2,3	?

Задача 2.2.5

В цилиндре под невесомым поршнем находился воздух в объеме V_1 при температуре t_1 и атмосферном давлении P_1. После погружения цилиндра в воду с температурой t_2 на глубину h объем воздуха уменьшится до объема V_2. Определите неизвестную величину.

Шифр	V_1, л	P_1, мм рт. ст.	t_1, °C	V_2, л	h, м	t_2, °C
1	9,3	400	–3	?	4,5	+19
2	?	570	+77	2,5	8,5	+15
3	0,39	710	?	0,34	1,5	+25
4	6,1	750	+57	3,7	5	?
5	2,4	565	+26	1,9	?	+12

Задача 2.2.6

Два сосуда соединены трубкой с краном. В одном находится кислород массой m_1 под давлением P_1, а в другом – углекислый газ массой m_2 под давлением P_2. После открывания крана и перемешивания газов давление смеси стало равным P. Температура газов до и после перемешивания одинаковая. Определите неизвестную величину.

Шифр	m_1, кг	P_1, кПа	m_2, кг	P_2, кПа	P, кПа
1	4,7	320	2,9	?	300
2	6,0	210	?	540	430
3	?	740	2,5	350	620
4	2,3	?	3,9	160	100
5	1,8	250	4,3	900	?

Задача 2.2.7

Из баллона объемом V, содержащего азот при температуре t_1, выпускают часть газа столь быстро, что теплообмен газа в баллоне с атмосферой за время выпуска не успевает произойти. Сразу после закрытия крана температура газа в баллоне равна t_2, давление P_2. Масса выпускаемого азота равна m. Определите неизвестную величину.

Шифр	V, л	t_1, °C	P_2, МПа	t_2, °C	m, кг
1	150	+19	?	+2	0,28
2	60	?	3,7	–15	2,24
3	?	+32	0,6	–11	0,17
4	160	+48	?	+25	0,35
5	70	+27	8,6	0	?

Задача 2.2.8

Некоторая масса газа с двухатомными молекулами при давлении P_1 имела объем V_1, а при давлении P_2 – объем V_2. Переход от первого состояния ко второму был сделан в два этапа: сначала по изобаре, а затем по адиабате. При этом количество поглощенного газом тепла равнялась Q, приращение внутренней энергии ΔU, работа газа A. Определите неизвестную величину.

Шифр	P_1, кПа	V_1, м^3	P_2, кПа	V_2, м^3	Q, кДж	ΔU, кДж	A, кДж
1	?	0,12	1050	0,48	–	+130	–
2	1300	1,3	850	1,47	–	–	?
3	130	0,95	330	0,44	–	?	–
4	710	0,8	320	0,82	?	–	–
5	750	0,84	?	0,59	–960	–	–

Задача 2.2.9

Двухатомный газ при давлении P_1 имел объем V_1, а при давлении P_2 – объем V_2. Переход из первого состояния во второе был сделан в два этапа: сначала по изотерме, затем по изохоре. Количество поглощенного газом тепла равна Q, приращение внутренней энергии ΔU, работа газа A. Определите неизвестную величину.

Шифр	P_1, кПа	V_1, м^3	P_2, кПа	V_2, м^3	Q, кДж	ΔU, кДж	A, кДж
1	900	0,18	–	0,42	–	–	?
2	440	0,83	250	0,39	–	?	–
3	?	0,045	2400	0,087	+450	–	–
4	650	0,38	1700	?	–	–380	–
5	300	0,14	320	0,11	?	–	–

Задача 2.2.10

Водород находился при давлении P_1 в объеме V_1, а при изменении объема до V_2 давление его стало равным P_2. Переход из первого состояния во второе совершался в два этапа: сначала по изохоре, затем по адиабате. Количество поглощенного газом тепла равно Q, приращение внутренней энергии ΔU, работа газа A. Определите неизвестную величину.

Шифр	P_1, кПа	V_1, м^3	P_2, кПа	V_2, м^3	Q, кДж	ΔU, кДж	A, кДж
1	170	?	230	0,83	–	+125	–
2	200	0,47	150	0,24	–	?	–
3	1200	0,65	?	1,35	–410	–	–
4	–	1,75	350	0,95	–	–	?
5	1500	0,33	250	0,68	?	–	–

2.3. Второе начало термодинамики

2.3.1. Цикл Карно

На диаграмме P–V показан *цикл Карно* (рис. 2.3.1). Он состоит из двух изотерм (1–2 и 3–4) и двух адиабат (2–3 и 4–1), которые образуют криволинейный четырехугольник.

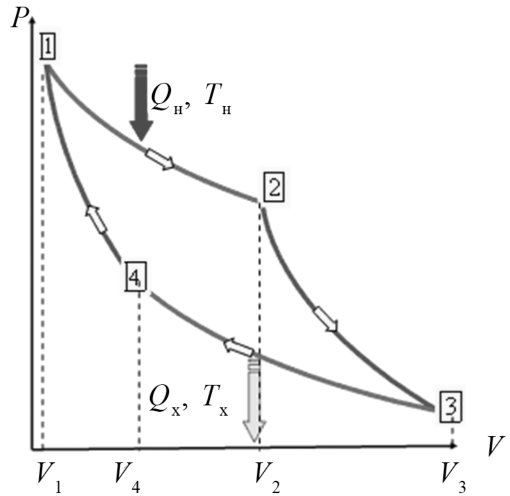


Рис. 2.3.1. График цикла Карно

Термический коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}}, \qquad (2.3.1)$$

где $Q_{\text{н}}$ – количество теплоты, полученной рабочим телом от нагревателя;
$Q_{\text{х}}$ – количество теплоты, переданное окружающей среде (холодильнику);
$T_{\text{н}}$ – температура нагревателя;
$T_{\text{х}}$ – температура холодильника.

2.3.2. Второе начало термодинамики

Каждая термодинамическая система обладает функцией состояния, называемой *энтропией*. Изменение энтропии при переходе системы из произвольно выбранного начального состояния 1 в соответствующее конечное состояние 2 равно

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \qquad (2.3.2)$$

Изменение энтропии изолированной ($\delta Q = 0$) *системы, совершившей **обратимый** круговой процесс, равно нулю,* т.е. *энтропия сохраняется*:

$$\Delta \mathrm{S} = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0, \qquad (2.3.3)$$

Второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов: *невозможно протекание самопроизвольного процесса, сопровождающееся уменьшением энтропии системы, ибо это означало бы самопроизвольный переход системы в менее вероятное состояние.*

2.3.3. Основное уравнение термодинамики

В равновесном переходе *открытых (неизолированных)* систем из состояния 1 в состояние 2 изменение энтропии равно

$$\Delta S_{1-2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}U + \delta A}{T}. \qquad (2.3.4)$$

Уравнение (2.3.4) представляет собой ***основное уравнение термодинамики.***

Если система – идеальный газ, то

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{\mu} C_V^{\text{мол}} \cdot \mathrm{d}T\,;\ \delta A = P\mathrm{d}V = \frac{m}{\mu} RT \frac{\mathrm{d}V}{V} \qquad (2.3.5)$$

и тогда изменение энтропии равно

$$\Delta S_{1-2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}U + \delta A}{T} =$$

$$= \frac{m}{\mu} C_V^{\text{мол}} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{\mu} C_V^{\text{мол}} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (2.3.6)$$

Примеры решения задач

Пример 2.3.1. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится под давлением $P_{13} = 250$ кПа и занимает объем $V_{12} = 10$ л. Сначала газ изохорически нагревают до температуры $T_{23} = 400$ К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарического сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определите термический КПД (η) цикла.

Решение

Для наглядности построим сначала график цикла, который состоит из изохоры, изотермы и изобары. В координатах (P, V) этот цикл имеет вид, представленный на рис. 1.

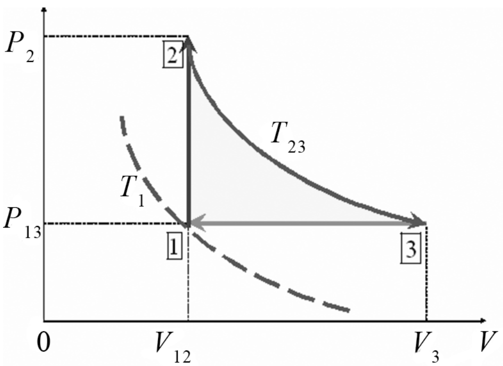


Рис. 1

Характерные точки цикла обозначим цифрами 1, 2, 3.

Термический КПД любого цикла определяется уравнением

$$\eta = \frac{Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{A_{23} - A_{31}}{Q_{12} + Q_{23}}. \qquad (1)$$

Заметим, что разность количества теплоты ($Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}$) равна работе A, совершаемой газом за цикл. Эта работа на графике в координатах (P, V) (см. рис. 1) соответствует площади цикла.

Работа газа

$$A_{123} = A_{12} + A_{23} = 0 + \frac{m}{\mu} R T_{23} \ln \frac{V_3}{V_{12}}.$$

Работа над газом

$$A_{31} = P_{13}\left(V_3 - V_{12}\right).$$

С учетом изобарического процесса 3–1:

$$\frac{V_3}{V_{12}} = \frac{T_{23}}{T_1},$$

$$V_3 = V_{12}\frac{T_{23}}{T_1},$$

поэтому

$$A_{31} = P_{13}\left(V_3 - V_{12}\right) = P_{13}V_{12}\left(\frac{T_{23}}{T_1} - 1\right). \tag{2}$$

Рабочее вещество (газ) получает количество теплоты $Q_н$ на двух участках: Q_{12} на участке 1–2 (изохорический процесс) и Q_{23} на участке 2–3 (изотермический процесс). Таким образом,

$$Q_н = Q_{12} + Q_{23}. \tag{3}$$

Количество теплоты, полученное газом при изохорическом процессе, равно

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_{23} - T_1\right). \tag{4}$$

Температуру T_1 начального состояния газа найдем, воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева:

$$T_1 = P_{13}V_{12} / \left(\nu R\right). \tag{5}$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, получим

$$T_1 = \frac{250\cdot 10^3\cdot 10^{-2}}{1\cdot 8{,}31} = 300\text{ К}.$$

Количество теплоты, полученное газом при изотермическом процессе, равно

$$Q_{23} = A_{23} = \frac{m}{\mu}RT_{23}\ln\frac{V_3}{V_{12}} = \nu RT_{23}\ln\left(V_3 / V_{12}\right), \tag{6}$$

где V_3 – объем, занимаемый газом при температуре T_{23} и давлении P_{13}

(точка 3 на графике).

Термический КПД

$$\eta = \frac{A_{23} - A_{31}}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{\nu R T_{23} \ln \frac{V_3}{V_{12}} - P_{13} V_{12} \left(\frac{T_{23}}{T_1} - 1 \right)}{\nu \frac{i}{2} R \left(T_{23} - T_1 \right) + \nu R T_2 \ln \left(V_3 / V_{12} \right)}. \tag{7}$$

В полученном выражении (7) заменим отношение объемов (V_3/V_{12}), согласно закону Гей-Люссака, отношением температур ($V_3/V_{12} = T_{23}/T_1$):

$$\eta = \frac{\nu R T_{23} \ln \frac{T_{23}}{T_1} - P_{13} V_{12} \left(\frac{T_{23}}{T_1} - 1 \right)}{\nu \frac{i}{2} R \left(T_{23} - T_1 \right) + \nu R T_{23} \ln \left(\frac{T_{23}}{T_1} \right)}. \tag{8}$$

Подставив в формулу (8) числовые значения ν, i, T_1, T_2, R и произведя вычисления, найдем

$$\eta = \frac{8{,}31 \cdot 400 \cdot \ln \frac{400}{300} - 250 \cdot 10 \cdot \left(\frac{400}{300} - 1 \right)}{2{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot \left(400 - 300 \right) + 8{,}31 \cdot 400 \cdot \ln \left(\frac{400}{300} \right)} = 0{,}04.$$

Пример 2.3.2. Нагреватель тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, имеет температуру $t_{\text{н}}$ = 200 °С. Определите температуру $T_{\text{х}}$ холодильника, если при получении от нагревателя количества теплоты $Q_{\text{н}} = 1$ Дж машина совершает работу A = 0,4 Дж. Потерями на трение и теплоотдачу следует пренебречь.

Решение

Температуру холодильника найдем, используя выражение для термического КПД машины, работающей по циклу Карно (2.3.1), откуда

$$T_{\text{х}} = T_{\text{н}} \left(1 - \eta \right). \tag{1}$$

Термический КПД тепловой машины выражает отношение количества теплоты, которое превращено в механическую работу A, к количеству теплоты $Q_{\text{Н}}$, которое получено рабочим телом тепловой машины из внешней среды (от нагревателя), т.е.

$$\eta = A/Q_{н}. \qquad (2)$$

После подстановки получим

$$T_{х} = T_{н}\left(1 - A/Q_{н}\right). \qquad (3)$$

Подставляя численные значения и учитывая, что $T_{н}$ = 473 К, после вычисления получаем

$$T_{х} = 284 \text{ К}.$$

Пример 2.3.3. Найдите изменение ΔS энтропии при нагревании воды массой m = 100 г от температуры t_1= –10 °С до температуры $t_{кип}$ = 100 °С и последующем превращении воды в пар той же температуры (рис. 1). Удельная теплоемкость воды равна 4200 Дж/(К·кг). Удельная теплота парообразования для воды равна $2{,}25\cdot10^6$ Дж/кг. Удельная теплоемкость льда равна $C_{л}$ = 2100 Дж/(К·кг). Удельная теплота плавления льда равна $q_{пл} = 3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг.

Решение

Найдем отдельно изменение энтропии при нагревании и плавлении льда, нагревании талой воды и при превращении ее в пар.

Полное изменение энтропии выразится суммой

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' + \Delta S''' + \Delta S''''. \qquad (1)$$

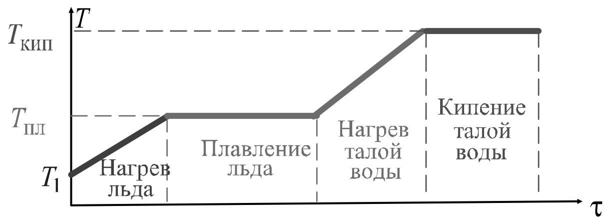


Рис. 1

1. Нагрев льда:

$$\Delta S' = \int_{T_1}^{T_{пл}} \frac{mC_{л}\,\mathrm{d}T}{T} = mC_{л}\ln\left(T_{пл}/T_1\right). \qquad (2)$$

2. Плавление льда (фазовый переход I рода – *изотермический процесс*):

$$\Delta S'' = \frac{1}{T_{\text{пл}}}\int \delta Q = \frac{Q}{T_{\text{пл}}} = \frac{q_{\text{пл}} m}{T_{\text{пл}}}. \qquad (3)$$

3. Нагрев талой воды:

$$\Delta S''' = \int\limits_{T_{\text{пл}}}^{T_{\text{кип}}} \frac{mC_{\text{в}}\mathrm{d}T}{T} = mC_{\text{в}} \ln\left(T_{\text{кип}}/T_{\text{пл}}\right). \qquad (4)$$

4. Кипение талой воды (фазовый переход I рода – *изотермический процесс*):

$$\Delta S'''' = \frac{1}{T_{\text{кип}}}\int \delta Q = \frac{Q}{T_{\text{кип}}} = \frac{q_{\text{кип}} m}{T_{\text{кип}}}. \qquad (5)$$

Изменение энтропии выражается общей формулой с подстановкой формул (2) – (5):

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' + \Delta S''' + \Delta S'''' =$$

$$= 0{,}1 \cdot \left[2100 \cdot \ln\left(\frac{273}{263}\right) + \frac{3{,}35 \cdot 10^5}{273} + 4200 \cdot \ln\left(\frac{373}{273}\right) + \frac{2{,}26 \cdot 10^6}{373} \right] = 865 \text{ Дж/К}.$$

Пример 2.3.4. Определите изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении кислорода массой $m = 10$ г от объема $V_1 = 25$ л до объема $V_2 = 100$ л.

Решение

Так как процесс изотермический, то в общем выражении для изменения энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int\limits_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \qquad (1)$$

температуру выносим за знак интеграла. Выполнив это, получим соотношение

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int \delta Q = \frac{Q}{T}. \qquad (2)$$

Количество теплоты Q, полученное газом, найдем по уравнению первого начала термодинамики. Поскольку для изотермического процесса

$$\Delta U = 0,$$

то

$$Q = A,$$

а работа A для этого процесса определяется по формуле

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(V_2 / V_1\right). \qquad (3)$$

С учетом формулы (3)

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln\left(V_2 / V_1\right).$$

Подставив сюда числовые значения и произведя вычисления, получим

$\Delta S = (10 \cdot 10^{-3}/(32 \cdot 10^{-}3)) \cdot 8{,}31 \cdot \ln(100 \cdot 10^{-3}/(25 \cdot 10^{-3})) = 3{,}60$ Дж/К.

Домашние задания

Задача 2.3.1

Цикл, совершаемый одним киломолем идеального двухатомного газа, состоит из двух изохор и двух изобар. Совершаемая газом за цикл работа равна A, количество полученного за цикл тепла Q. Минимальные значения объема и давления равны V_1 и P_1, максимальные V_2 и P_2. Определите неизвестную величину.

Шифр	P_1, кПа	P_2, кПа	V_1, м^3	V_2, м^3	A, кДж	Q, кДж
1	190	410	0,92	–	50	?
2	290	?	0,18	0,39	23	–
3	270	490	1,3	?	–	5000
4	330	400	0,075	0,135	?	–
5	170	–	0,25	0,85	50	?

Задача 2.3.2

Цикл, совершаемый одним киломолем идеального одноатомного газа, состоит из двух изохор и двух изотерм. Температуры изотермических процессов T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$). Отношение максимального объема к минимальному равно k. Работа цикла равна A, коэффициент полезного действия η. Определите неизвестную величину.

Шифр	T_1, К	T_2, К	k	A, кДж	η
1	430	170	?	–	0,4
2	740	410	–	750	?
3	400	?	2,9	2100	–
4	310	35	3,5	?	–
5	630	250	7,4	–	?

Задача 2.3.3

Один киломоль азота совершает цикл Карно в интервале температур от T_1 до T_2. Отношение максимального за цикл давления к минимальному равно k, полученное от нагревателя за цикл количество тепла Q_1, отданное холодильнику за цикл количество тепла Q_2, совершенная за цикл работа равна A. Определите неизвестную величину.

Шифр	T_1, К	T_2, К	k	Q_1, кДж	Q_2, кДж	A, кДж
1	570	310	25	–	–	?
2	490	240	25	–	–	?
3	530	270	15	–	?	–
4	620	340	17	–	?	–
5	650	310	14	?	–	–

Задача 2.3.4

Газ массой m имеет молярную массу μ. Жесткие молекулы газа состоят из N атомов. Газ расширяется изобарически до объема $V_2 = k \cdot V_1$. Изменение энтропии при этом расширении равно ΔS. Определите неизвестную величину.

Шифр	N	m, г	μ, кг/моль	k	ΔS, кДж/К
1	2	6,6	0,002	2	?
2	1	8,0	0,004	?	45,6
3	3	?	0,044	4	11,5
4	2	5,6	?	5	9,36
5	?	7,2	0,018	6	23,8

Задача 2.3.5

Газ массой m имеет молярную массу μ. Жесткие молекулы газа состоят из N атомов. В результате изохорического нагревания давление газа увеличилось в k раз. Изменение энтропии газа равно ΔS. Определите неизвестную величину.

Шифр	N	m, г	μ, кг/моль	k	ΔS, кДж/К
1	2	1,0	0,002	2	?
2	1	0,8	0,004	?	68,5
3	3	8,8	?	4	6,91
4	2	?	0,028	5	66,9
5	?	180	0,018	6	447

Задача 2.3.6

Изменение энтропии при изотермическом расширении газа массой m равно ΔS. Газ имеет молярную массу μ. Давление газа уменьшилось в k раз. Определите неизвестную величину.

Шифр	μ, кг/моль	m, г	k	ΔS, кДж/К
1	0,002	6	2	?
2	0,004	8	?	18,3
3	0,0442	?	4	23,0
4	?	5,6	5	2,67
5	0,018	18	6	?

Задача 2.3.7

Лед массой m, взятый при температуре T_1, был нагрет до температуры T_2 и мог расплавиться. Если в ходе дальнейших процессов образовалась талая вода, то она может быть нагрета до температуры T_3. Изменение энтропии газа в ходе указанных процессов равно ΔS. Удельная теплоемкость льда $C_л$ = 2100 Дж/(К·кг). Удельная теплоемкость воды $C_в$ = 4200 Дж/(К·кг). Удельная теплота плавления льда $q_{плав} = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг. Удельная теплота парообразования воды $q_{пар} =$ $= 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Определите неизвестную величину.

Шифр	m, кг	T_1, К	T_2, К	T_3, К	ΔS, кДж/К
1	0,2	263	273	273	?
2	0,2	?	263	–	16,3
3	0,2	273	?	293	304
4	0,2	258	273	373	?
5	0,2	273	273	?	245

Задача 2.3.8

Изменение энтропии при переходе некоторого газа массой m от объема V_1 при температуре T_1 к объему $V_2 = x \cdot V_1$ при температуре $T_2 = y \cdot T_1$ равно ΔS. Газ имеет молярную массу μ. Жесткие молекулы газа состоят из N атомов. Определите неизвестную величину.

Шифр	m, г	μ, кг/моль	N	x	y	ΔS, кДж/К
1	8	0,032	2	4	2	?
2	2,2	0,044	3	6	?	2,11
3	7	0,028	2	?	5	12,7
4	0,2	0,004	?	10	7	2,17
5	18	?	3	12	9	75,4

Задача 2.3.9

Изменение энтропии при переходе некоторого газа массой m от объема V_1 под давлением P_1 к объему $V_2 = x \cdot V_1$ под давлением $P_2 = P_1 / y$ равно ΔS. Газ имеет молярную массу μ. Жесткие молекулы газа состоят из N атомов. Определите неизвестную величину.

Шифр	m, г	μ, кг/моль	N	x	y	ΔS, кДж/К
1	6	0,002	2	3	1,5	?
2	8	0,032	2	4	?	104
3	11	0,044	3	?	2,5	123
4	14	0,028	?	6	2	75,4
5	2	?	1	7	3,5	38,1

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

Механика

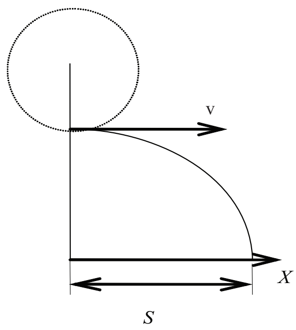
Задача 1.1

С какой наименьшей скоростью надо бросить камень из точки *A* под углом 58° к горизонту, чтобы он мог перелететь через вертикальную стену высотой 5,6 м, если точка *A* и основание стены находятся в горизонтальной плоскости на расстоянии 10 м друг от друга? Сопротивлением воздуха пренебречь. Определите уравнение траектории камня, наивысшую высоту *H* его подъема над уровнем начального положения и дальность полета *S*.

Ответ: V_0 = 13 м/с; H = 6,4 м; S = 15,5 м.

Задача 1.2

Шарик, привязанный к нити длиной 30 см, вращается в вертикальной плоскости. Когда шарик проходит через нижнее положение, нить обрывается, и через 1 с шарик падает на землю на расстоянии 9,4 м от оси вращения (по горизонтали). Какому числу оборотов в секунду соответствовала скорость вращения шарика в момент обрыва нити?



Ответ: ν = 5 об/с.

Задача 1.3

Некоторое тело начинает вращаться с постоянным угловым ускорением, равным 0,04 $с^{-2}$. Через сколько времени после начала движения полное ускорение какой-либо точки будет направлено под углом α = 76° к направлению скорости в этой точке?

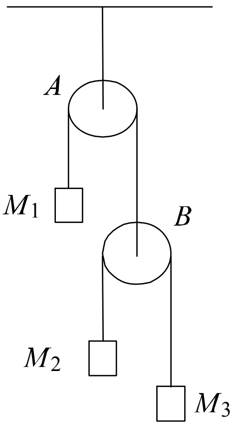
Ответ: t = 10 с.

Задача 1.4

Если доску наклонить под углом 60° к горизонту, то тело, лежащее на доске, начинает скользить с ускорением 5 м/с^2. Каков должен быть максимальный угол наклона доски, чтобы тело еще оставалось в равновесии?

Ответ: α = 36.

Задача 1.5



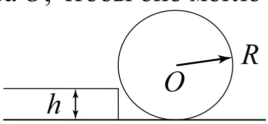
Через невесомый блок A перекинута нить, к одному концу которой прикреплен груз M_1, а к другому невесомый блок B, на нити которого висят грузы M_2 и M_3. Блок A со всеми грузами подвешен к пружинным весам. Определите ускорение a груза M_1 и показание T пружинных весов, считая, что $M_2 \neq M_3$, $M_1 > M_2 + M_3$.

Ответ: $a = \dfrac{(M_1M_2 + M_1M_3 - 4M_2M_3)\cdot g}{M_1M_2 + M_1M_3 + 4M_2M_3}$,

$$T = \frac{(16M_1M_2M_3)\cdot g}{M_1M_2 + M_1M_3 + 4M_2M_3}.$$

Задача 1.6

Колесо радиусом R и массой m стоит перед ступенькой высотой h. Какую наименьшую горизонтальную силу F надо приложить к оси колеса O, чтобы оно могло подняться на ступеньку? Трение не учитывать.



Ответ: $F \geq mg\sqrt{\dfrac{2h}{R}}$, $h << R$.

Задача 1.7

Лодка стоит неподвижно в стоячей воде. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние сдвинется лодка, если масса человека 60 кг, масса лодки 120 кг, длина лодки 3 м? Сопротивлением воды пренебречь.

Ответ: $S = 1$ м.

Молекулярная физика. Термодинамика

Задача 2.1

Сколькими ходами поршневого насоса емкостью 200 см^3 можно откачать воздух из стеклянного баллона, емкость которого 1 л, до давления 0,1 мм рт. ст., если первоначальное давление в баллоне 760 мм рт. ст.?

Ответ: $n = 49$.

Задача 2.2

Масса m идеального газа, находящегося при температуре T, охлаждается изотермически так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определите совершенную газом работу. Молекулярный вес газа μ.

Ответ: $A = \frac{n-1}{n}\frac{m}{\mu}RT$.

Задача 2.3

Определите, во сколько раз отличается коэффициент диффузии азота ($\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) и углекислого газа ($\mu_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), если оба газа находятся при одинаковой температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

Ответ: $\frac{D_1}{D_2} = 1,25$.

Задача 2.4

Определите изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой m = 10 г, если давление газа уменьшилось от p_1 = 0,1 МПа до p_2 = 50 кПа.

Ответ: ΔS = 2,06 Дж/К.

Задача 2.5

В дне стеклянного сосуда имеется небольшое отверстие радиусом r. До какой высоты можно налить в этот сосуд жидкость, не смачивающую стекло, чтобы она не выливалась?

Ответ: $h \le \frac{\sigma}{2r\rho g}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 5 т. Т. 1. Механика: Учеб. пособие. СПб.: Лань, 2011. 448 с.

2. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 5 т. Т. 3. Молекулярная физика и термодинамика: Учеб. пособие. СПб.: Лань, 2011. 224 с.

3. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. СПб.: Спец. лит., 2005. 327 с.

Дополнительная литература

1. *Рахштадт Ю.А.* Физика. Ч. 1. Физические основы механики: Учеб. пособие. М.: Изд. Дом МИСиС, 2009. 174 с.

1. *Рахштадт Ю.А.* Физика. Ч. 2. Молекулярная физика и термодинамика: Учеб. пособие. М.: Изд. Дом МИСиС, 2009. 126 с.

Приложение. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЕДИНИЦЫ ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

В науке и технике используются единицы измерения физических величин, образующие определенные системы. В основу совокупности единиц, устанавливаемой стандартом для обязательного применения, положены единицы Международной системы (СИ).

Международная система единиц (СИ) построена на 6 *основных* (метр, килограмм, секунда, кельвин, ампер, кандела) и 2 *дополнительных* единицах (радиан, стерадиан). В стандарте «Единицы физических величин» приведены также: остальные единицы системы СИ; единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ (например: тонна, минута, час, градус Цельсия, градус, минута, секунда, литр, киловатт-час, оборот в секунду, оборот в минуту), и другие единицы, применяемые в теоретических разделах физики и астрономии (световой год, парсек, ангстрем, электрон-вольт, барн, рентген, кюри). Важнейшие из этих единиц и соотношения между ними приведены в табл. П1.

Сокращенные обозначения единиц, приведенные в таблицах, применяются только после числового значения величины или в заголовках граф таблиц. Нельзя применять сокращенные обозначения вместо полных наименований единиц в тексте (без числового значения величин). При использовании как русских, так и международных обозначений единиц используется прямой шрифт; сокращенные обозначения единиц, названия которых даны по именам ученых (Ньютон, Паскаль, Ватт и т.д) следует писать с прописной буквы (Н, Па, Вт); в обозначениях единиц точку как знак сокращения не применяют. Обозначения единиц, входящих в произведение, разделяются точками как знаками умножения; в качестве знака деления применяют обычно косую черту; если в знаменатель входит произведение единиц, то оно заключается в скобки.

Для образования кратных и дольных единиц используются десятичные приставки (табл. П2). Особенно рекомендуется применение приставок, представляющих собой степень числа 10 с показателем, кратным трем. Целесообразно использовать дольные и кратные единицы, образованные от единиц СИ и приводящие к числовым значениям, лежащим между 0,1 и 1000 (например, 17 000 Па следует записать как 17 кПа). Не допускается присоединять две или более приставок к одной единице (например, 10^{-9} м следует записать как 1 нм).

Для образования единиц массы приставку присоединяют к основному наименованию «грамм» (например, 10^{-6} кг = 10^{-3} г = 1 мг). Если сложное наименование исходной единицы представляет собой произведение или дробь, то приставку присоединяют к наименованию первой единицы (например, кН·м). В необходимых случаях допускается в знаменателе применять дольные единицы длины, площади и объема (например, В/см).

В табл. П3 приведены основные физические и астрономические постоянные.

Таблица П1

Единицы измерения физических величин в системе СИ и их соотношение с другими единицами

Наименование величин	Единицы измерения	Сокращенное обозначение	Размерность	Внесистемные единицы
1	2	3	4	5
Основные единицы				
Длина	метр	м		1 Å = 10^{-10} м 1 св. год = = $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м
Масса	килограмм	кг		
Время	секунда	с		1 ч = 3600 с 1 мин = 60 с
Температура	кельвин	К		t, °С + 273 = T, К
Сила тока	ампер	А		
Сила света	кандела	кд		
Дополнительные единицы				
Плоский угол	радиан	рад		1° = π/180 рад 1′ = π/108·10^{-2} рад 1″ = π/648·10^{-3} рад
Телесный угол	стерадиан	ср		Полный телесный угол = 4π ср
Производные единицы				
Частота	герц	Гц	$с^{-1}$	
Угловая скорость	радиан в секунду	рад/с	$с^{-1}$	1 об/с = 2π рад/с 1 об/мин = = 0,105 рад/с
Объем	кубический метр	$м^3$	$м^3$	1 л = 10^{-3} $м^3$
Скорость	метр в секунду	м/с	$м \cdot с^{-1}$	1 км/ч = 0,278 м/с
Плотность	килограмм на кубический метр	кг/$м^3$	$кг \cdot м^{-3}$	
Сила	ньютон	Н	$кг \cdot м \cdot с^{-2}$	
Работа, энергия, количество тепла	джоуль	Дж (Н·м)	$кг \cdot м^2 \cdot с^{-2}$	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж 1 кВт·ч = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж 1 эрг = $1 \cdot 10^{-7}$ Дж

1	2	3	4	5
Мощность	ватт	Вт (Дж/с)	кг·м^2·с$^{-3}$	1 л.с. = 735 Вт
Давление	паскаль	Па (Н/м^2)	кг·м$^{-1}$·с$^{-2}$	1 атм = 0,981·10^5 Па 1 мм рт. ст. = 133 Па 1 атм = 760 мм рт. ст. = = 1,013·10^5 Па
Момент силы	ньютон-метр	Н·м	кг·м^2·с$^{-2}$	
Момент инерции	килограмм-метр в квадрате	кг·м^2	кг·м^2	
Динамическая вязкость	паскаль-секунда	Па·с	кг·м$^{-1}$·с$^{-1}$	
Кинематическая вязкость	квадратный метр на секунду	м^2/с	м^2·с$^{-1}$	
Теплоемкость системы	джоуль на кельвин	Дж/К	кг·м^2·с$^{-2}$·К$^{-1}$	
Удельная теплоемкость	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)	м^2·с$^{-2}$·К$^{-1}$	
Электрический заряд	кулон	Кл	А·с	
Потенциал, электрическое напряжение	вольт	В (Вт/А)	кг·м^2·с$^{-3}$·А$^{-1}$	
Напряженность электрического поля	вольт на метр	В/м	кг·м·с$^{-3}$·А$^{-1}$	
Электрическое смещение (электрическая индукция)	кулон на квадратный метр	Кл/м^2	м$^{-2}$·с·А	
Электрическое сопротивление	ом	Ом (В/А)	кг·м^2·с$^{-3}$·А$^{-2}$	
Электрическая емкость	фарад	Ф (Кл/В)	кг$^{-1}$·м^2·с^4·А^2	
Магнитный поток	вебер	Вб (В·с)	кг·м^2·с$^{-2}$·А$^{-1}$	
Магнитная индукция	тесла	Тл (Вб/м^2)	кг·с$^{-2}$·А$^{-1}$	
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	А/м	м$^{-1}$·А	
Индуктивность	генри	Гн (Вб/А)	кг·м^2·с$^{-2}$·А$^{-2}$	
Световой поток	люмен	лм	кд	
Яркость	кандела на квадратный метр	кд/м^2	м$^{-2}$·кд	
Освещенность	люкс	лк	м$^{-2}$·кд	

Таблица П2

Приставки для образования наименований кратных и дольных единиц

Кратность	Приставка		Дольность	Приставка	
	Название	Обозначение		Название	Обозначение
10^{12}	тера	Т	10^{-1}	деци	д
10^{9}	гига	Г	10^{-2}	санти	с
10^{6}	мега	М	10^{-3}	милли	м
10^{3}	кило	к	10^{-6}	микро	мк
10^{2}	гекто	г	10^{-9}	нано	н
10^{1}	дека	да	10^{-12}	пико	п
			10^{-15}	фемто	ф
			10^{-18}	атто	а

Таблица П3

Основные физические и астрономические постоянные

Величина	Числовое значение
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}$ кг$^{-1}\cdot$м$^{3}\cdot$с$^{-2}$
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м$\cdot$с$^{-2}$
Радиус Земли	$R_З = 6{,}37\cdot10^{6}$ м
Масса Земли	$M_З = 5{,}98\cdot10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$R_С = 6{,}95\cdot10^{8}$ м
Радиус земной орбиты	$R_о = 1{,}49\cdot10^{11}$ м
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж$\cdot$К$^{-1}$
Число Авогадро	$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж$\cdot$моль$^{-1}\cdot$К$^{-1}$
Абсолютный нуль температур	0 К = –273,15 °С
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_m = 22{,}4\cdot10^{-3}$ м$^{3}\cdot$моль$^{-1}$
Скорость света в вакууме	$c = 3\cdot10^{8}$ м$\cdot$с$^{-1}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф$\cdot$м$^{-1}$ = $1/4\pi\cdot9\cdot10^{9}$ Ф$\cdot$м$^{-1}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12{,}6\cdot10^{-7}$ Гн$\cdot$м$^{-1}$ = $4\pi\cdot10^{-7}$ Гн$\cdot$м$^{-1}$
Элементарный электрический заряд	$1\lvert e\rvert = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Число Фарадея	$F = 9{,}65\cdot10^{4}$ Кл$\cdot$моль$^{-1}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Постоянная Планка	$h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт$\cdot$м$^{-2}\cdot$К$^{-4}$
Постоянная в законе смещения Вина	$b = 2{,}9\cdot10^{-3}$ К$\cdot$м
Постоянная Ридберга	$R_\infty = 13{,}6$ эВ
Магнетон Бора	$\mu_B = 9{,}27\cdot10^{-24}$ А$\cdot$м^{2}

Учебное издание

Капуткин Дмитрий Ефимович
Пташинский Виктор Васильевич
Рахштадт Юрий Александрович

ФИЗИКА

Механика. Молекулярная физика

Учебное пособие для практических занятий
Часть 1

Редактор *И.Е. Оратовская*

Компьютерная верстка *И.В. Воловик*

Подписано в печать 15.01.14	Бумага офсетная	
Формат 60×90 $^1/_{16}$	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 8,43
Рег. № 454	Тираж 500 экз.	Заказ 4111

Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (495) 638-45-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (499) 236-76-17, тел./факс (499) 236-76-35